

3 Silhuetas

Este capítulo descreve o processo de orientação de objetos em \mathbb{R}^4 através dos ângulos de *Euler* e a definição da silhueta de superfícies em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{R}^4 .

3.1 Orientação em \mathbb{R}^4 através dos ângulos de Euler

Os ângulos de *Euler* são largamente utilizados para rotacionar objetos em espaços tridimensionais. As propriedades de rotação através desses ângulos se estendem aos espaços n -dimensionais e, em particular, ao \mathbb{R}^4 que é o espaço utilizado neste estudo, embora entender geometricamente e manipular de forma intuitiva as rotações nesses espaços seja mais difícil do que parece.

A figura 3.1 ilustra um exemplo de rotação utilizando os ângulos de Euler de um objeto em \mathbb{R}^4 . Observe que as três imagens dispostas na figura são bastante diferentes, no entanto elas são projeções de uma mesma superfície em \mathbb{R}^4 .

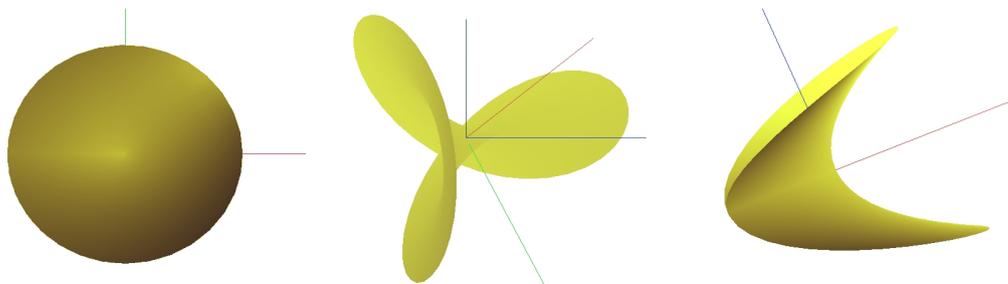


Figura 3.1: Superfície em \mathbb{R}^4 rotacionada através dos ângulos de Euler.

Em espaços bidimensionais, como o plano euclidiano, temos um grau de liberdade rotacional. A rotação é feita apenas em torno da origem do sistema de coordenadas através de um ângulo θ . Em \mathbb{R}^3 existem três graus de liberdade, as rotações podem ser feitas no plano xy , no plano yz , ou no plano zx através de três ângulos distintos. Já em \mathbb{R}^4 temos seis graus de liberdade rotacionais. Em espaços euclidianos n -dimensionais, existem $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ graus de liberdade rotacionais.

Para rotacionar um ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ através dos ângulos de Euler e representá-lo em um novo sistema de coordenadas utilizamos a seguinte transformação:

$$\mathbf{q} = R(\mathbf{p}) = A\mathbf{p}, \quad (3-1)$$

onde $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ é o ponto no novo sistema de coordenadas e $A = (a_{ij})$ é a matriz resultante do produto de $n(n-1)/2$ matrizes de rotação básica.

3.1.1

Ângulos de Euler em \mathbb{R}^3

Em \mathbb{R}^3 , a rotação é descrita por três ângulos de Euler, que chamamos de θ_1, θ_2 e θ_3 e temos $3(3-1)/2 = 3$ matrizes de rotação básica que são dadas por:

$$R_{xy}^3(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{yz}^3(\theta_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$R_{xy}^2(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $R_{xy}^3(\theta_1)$ e $R_{xy}^2(\theta_3)$ são matrizes de rotação básica no plano xy e $R_{yz}^3(\theta_2)$ é a matriz de rotação básica no plano yz .

Os ângulos de Euler em \mathbb{R}^3 constituem duas fases separadas de rotação:

1. A primeira fase orienta o eixo z no espaço 3D através de duas rotações básicas, $R_{xy}^3(\theta_1)R_{yz}^3(\theta_2)$.
2. A segunda fase orienta o sub-espaço 2D ortogonal ao eixo z através da rotação básica $R_{xy}^2(\theta_3)$.

Portanto, a matriz A é dada por $R_{xy}^3(\theta_1)R_{yz}^3(\theta_2)R_{xy}^2(\theta_3)$ e a equação 3-1 nos dá

$$\mathbf{q} = R(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} = R_{xy}^3(\theta_1)R_{yz}^3(\theta_2)R_{xy}^2(\theta_3)\mathbf{p}.$$

3.1.2

Ângulos de Euler em \mathbb{R}^4

Vimos anteriormente que os conceitos dos ângulos de Euler em \mathbb{R}^3 podem ser estendidos para o \mathbb{R}^4 e que as rotações em um espaço de quatro dimensões possuem seis graus de liberdade. Com isso, a rotação em \mathbb{R}^4 é descrita por seis ângulos de Euler, que chamamos de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$ e θ_6 e temos $4(4-1)/2 = 6$ matrizes de rotação básica que são da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 R_{xy}^4(\theta_1) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 R_{yz}^4(\theta_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 R_{zw}^4(\theta_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) \\ 0 & 0 & \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) \end{bmatrix} \\
 R_{xy}^3(\theta_4) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_4) & \cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 R_{yz}^3(\theta_5) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 \\ 0 & \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 R_{xy}^2(\theta_6) &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_6) & \cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

onde $R_{xy}^4(\theta_1)$, $R_{xy}^3(\theta_4)$ e $R_{xy}^2(\theta_6)$ são matrizes de rotação básica no plano xy , $R_{yz}^4(\theta_2)$ e $R_{yz}^3(\theta_5)$ são matrizes de rotação básica no plano yz e $R_{zw}^4(\theta_3)$ é a matriz de rotação básica no plano zw .

Os ângulos de Euler em \mathbb{R}^4 constituem três fases separadas de rotação:

1. A primeira fase orienta o eixo w em sua posição final no espaço quadridimensional através de três rotações básicas, $R_{xy}^4(\theta_1)R_{yz}^4(\theta_2)R_{zw}^4(\theta_3)$.
2. A segunda fase orienta o eixo z no sub-espaço tridimensional ortogonal ao eixo w (orientado) através de duas rotações básicas, $R_{xy}^3(\theta_4)R_{yz}^3(\theta_5)$.
3. A terceira fase orienta os eixos x e y no sub-espaço 2D ortogonal aos outros dois eixos através da rotação básica $R_{xy}^2(\theta_6)$.

Então, a matriz A é dada por $R_{xy}^4(\theta_1)R_{yz}^4(\theta_2)R_{zw}^4(\theta_3)R_{xy}^3(\theta_4)R_{yz}^3(\theta_5)R_{xy}^2(\theta_6)$ e a equação 3-1 nos dá a transformação de rotação:

$$\mathbf{q} = R(\mathbf{p}) = A\mathbf{p} = R_{xy}^4(\theta_1)R_{yz}^4(\theta_2)R_{zw}^4(\theta_3)R_{xy}^3(\theta_4)R_{yz}^3(\theta_5)R_{xy}^2(\theta_6)\mathbf{p}. \quad (3-2)$$

Portanto, para obter o ponto $\mathbf{q}(x_r, y_r, z_r, w_r)$ rotacionado em \mathbb{R}^4 basta multiplicar a matriz A pelo ponto $\mathbf{p}(x, y, z, w)$, o ponto que desejamos rotacionar.

Nas duas seções a seguir tratamos de curvas silhuetas de superfícies, primeiramente em \mathbb{R}^3 cujos conceitos são mais difundidos e, em seguida, em \mathbb{R}^4 que é o objeto desse estudo.

3.2

Curva silhueta no \mathbb{R}^3

Considere uma superfície S em \mathbb{R}^3 e um observador posicionado em um ponto \mathbf{O} . Existem alguns pontos de S , do ponto de vista \mathbf{O} , onde o plano tangente a S passa por \mathbf{O} . Projetando esses pontos por \mathbf{O} em um plano fixo π (ver figura 3.2) temos a *curva silhueta* de S a partir de \mathbf{O} : essencialmente, este é o esquema que aparece na visão humana.

Considere os pontos de S nos quais o plano tangente é paralelo a uma direção fixa \mathbf{v} (ver figura 3.3). Tais pontos encontram-se em alguma curva C em S . Essa curva C projetada em um plano perpendicular a \mathbf{v} é a *curva silhueta* de S na direção de \mathbf{v} .

Nesse caso a *curva silhueta* de uma superfície S é o conjunto dos pontos nos quais o produto interno entre o vetor \mathbf{n} normal à superfície e o vetor \mathbf{v} que representa a visão do observador é igual a zero, isto é, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$ (ver figura 3.4).

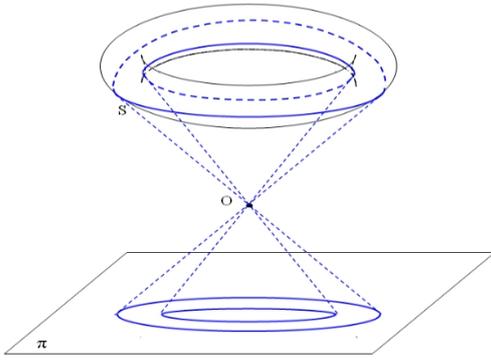


Figura 3.2: Silhueta do toro a partir do ponto de vista O .

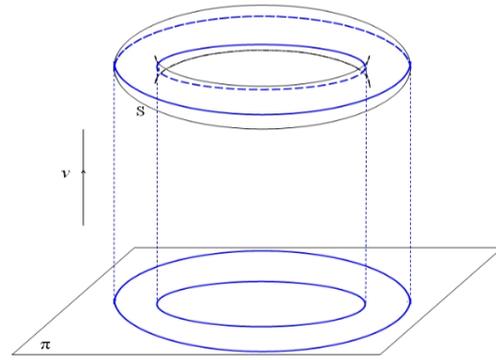


Figura 3.3: Silhueta do toro a partir da direção fixa v .

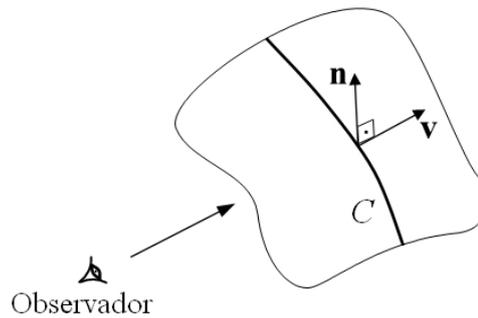


Figura 3.4: Curva Silhueta.

Quando se trata de uma superfície S em \mathbb{R}^3 aproximada por uma malha de polígonos, a curva silhueta dessa superfície pode ser aproximada usando um campo escalar. A função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ define um campo escalar sobre a malha que consiste do produto interno do vetor que representa a visão do observador com o vetor normal à superfície em cada vértice da malha. A curva silhueta é a curva de nível 0 de f .

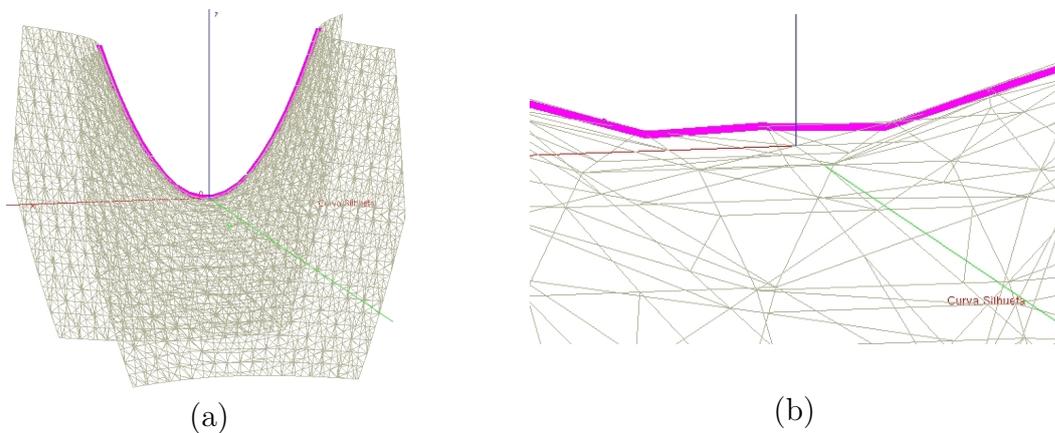


Figura 3.5: Silhueta de uma superfície em \mathbb{R}^3 aproximada por uma malha.

A figura 3.5 (a) mostra uma superfície em \mathbb{R}^3 aproximada por uma malha

de triângulos e a curva silhueta (rosa) dessa mesma superfície e a figura 3.5 (b) mostra parte da superfície ampliada e a curva silhueta (rosa) encontrada.

3.3

Superfícies no \mathbb{R}^4

Nesta seção mostramos os conceitos de superfície em \mathbb{R}^4 .

Definição 3.3.1 (Superfície Implícita no \mathbb{R}^4) Considere $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada pelas funções f_1 e f_2 . Uma superfície S em \mathbb{R}^4 pode ser representada na forma implícita por:

$$f_1(x, y, z, w) = 0$$

$$f_2(x, y, z, w) = 0.$$

Definição 3.3.2 (Superfície Paramétrica no \mathbb{R}^4) Uma superfície S em \mathbb{R}^4 pode ser representada na forma paramétrica por:

$$x = g_1(u, v)$$

$$y = g_2(u, v)$$

$$z = g_3(u, v)$$

$$w = g_4(u, v).$$

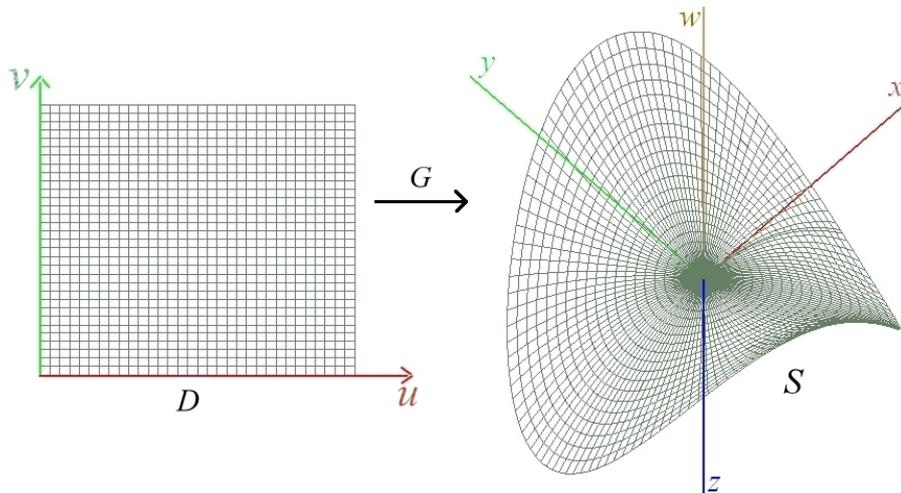


Figura 3.6: Superfície S em \mathbb{R}^4 dada na forma paramétrica.

A figura 3.6 ilustra um exemplo de uma superfície em \mathbb{R}^4 na forma paramétrica tal que $g_1(u, v) = u \cos(v)$, $g_2(u, v) = u \sin(v)$, $g_3(u, v) = u^2 \cos(2v)$ e $g_4(u, v) = u^2 \sin(2v)$, tais que $u \in [0, 1]$ e $v \in [0, 2\pi]$, cujo domínio

$$D = ([0, 1] \times [0, 2\pi]) \subset \mathbb{R}^2.$$

3.4

Silhueta

Na seção 3.2 tratamos brevemente de curva silhueta de superfícies em \mathbb{R}^3 . Nesta seção mostramos os conceitos de silhueta de superfícies em \mathbb{R}^4 .

Vamos assumir que:

1. A primeira projeção, $\phi_1 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é dada por $\phi_1(\mathbf{p}) = \pi_1(R(\mathbf{p})) = \pi_1(\mathbf{q}) = \pi_1(x_r, y_r, z_r, w_r) = (x_r, y_r, z_r)$, onde \mathbf{q} é o ponto $\mathbf{p} = (x, y, z, w)$ rotacionado como na equação 3-2. A projeção combinada $\phi_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por $\phi_2(\mathbf{p}) = \pi_2(x_r, y_r, z_r, w_r) = (x_r, y_r)$.
2. O ponto \mathbf{p} em uma superfície S é não-singular. \mathbf{t}_1 e \mathbf{t}_2 são vetores L.I. tangentes a S em \mathbf{p} , $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2\}$ são uma base para o espaço tangente a S em \mathbf{p} . \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 são vetores L.I. a S no ponto \mathbf{p} , $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2\}$ são uma base para o espaço normal.
3. A projeção é do tipo ortogonal. \mathbf{e}_1 é um vetor na direção da primeira projeção e \mathbf{e}_2 é um vetor na direção da segunda projeção.

A visão dos observadores é orientada através dos ângulos de *Euler*, com isso o vetor \mathbf{e}_1 é igual a quarta linha da matriz de rotação A e o vetor \mathbf{e}_2 é igual a terceira linha da matriz de rotação A .

Lema 3.4.1

- (a) O núcleo da transformação ϕ_1 é: $N(\phi_1) = \{\alpha\mathbf{e}_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$.
- (b) O núcleo da transformação ϕ_2 é: $N(\phi_2) = \{\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Proposição 3.4.1

- (a) \mathbf{p} é um ponto silhueta em relação a ϕ_1 se, e somente se, os vetores \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 e \mathbf{e}_1 são linearmente dependentes.
- (b) \mathbf{p} é um ponto silhueta em relação a ϕ_2 se, e somente se, os vetores \mathbf{t}_1 , \mathbf{t}_2 , \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 são linearmente dependentes.
- (c) Sejam \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 vetores linearmente independentes no plano ortogonal ao plano gerado por \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 . Então \mathbf{p} é um ponto silhueta em relação a ϕ_2 se, e somente se, os vetores \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 , \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 são linearmente dependentes.

Dem.: Ver (10).

Observação 1: Considere uma superfície S em \mathbb{R}^4 . Um ponto silhueta \mathbf{p} de S em relação a ϕ_1 é determinado pelas duas equações

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 0; \quad (3-3)$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0. \quad (3-4)$$

e as duas equações que definem a superfície S . Geralmente a solução é um conjunto de dimensão 0, isto é, um ponto.

Observação 2: Considere uma superfície S em \mathbb{R}^4 . Um ponto silhueta \mathbf{p} de S em relação a ϕ_2 é determinado por

$$\det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0, \quad (3-5)$$

ou equivalentemente,

$$\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = 0. \quad (3-6)$$

Aqui a solução, junto com as equações de S , geralmente é um conjunto de dimensão 1, ou seja, uma curva. Essa curva é chamada *curva silhueta* da superfície S .

Definição 3.4.1 *Considere uma superfície S em \mathbb{R}^4 . Um ponto silhueta duplo \mathbf{p} da superfície S são os pontos silhueta em relação às duas projeções, ϕ_1 e ϕ_2 , ou seja,*

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 0;$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0;$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = 0;$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 0.$$