

## 4

### Geração das Silhuetas

Este capítulo mostra como recuperar a curva silhueta de superfícies em  $\mathbb{R}^4$  definidas implícita e parametricamente. Ele está dividido em duas seções uma para descrever o caso implícito (seção 4.1) e outra para descrever o caso paramétrico (seção 4.2).

#### 4.1

##### Caso implícito

Curvas e superfícies podem ser representadas como imagem inversa de uma função implícita. Vamos utilizar a superfície definida em 3.3.1 para encontrar e visualizar a silhueta.

Quando uma superfície  $S$  é descrita por uma função implícita o espaço normal pode ser calculado diretamente. No  $\mathbb{R}^4$  uma superfície possui duas direções normais independentes (ver (19)). Utilizando a definição 3.3.1, então os vetores normais à superfície implícita podem ser calculados diretamente e são dados por

$$\mathbf{n}_1 = \nabla(f_1) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial w} \right)$$

e

$$\mathbf{n}_2 = \nabla(f_2) = \left( \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial w} \right).$$

##### 4.1.1

###### Silhueta em relação a $\phi_2$

No caso de um ponto silhueta em relação a  $\phi_2$  temos duas equações equivalentes que determinam tal ponto, as equações 3-5 e 3-6; nos restringimos ao uso da equação 3-6 e a denotamos por  $h$ . Então temos a seguinte definição de curva silhueta para uma superfície  $S$  dada na forma implícita:

**Definição 4.1.1 (Curva silhueta)** *A curva silhueta  $C$  de uma superfície  $S$  no  $\mathbb{R}^4$  descrita na forma implícita como em 3.3.1 é o conjunto de pontos de  $S$*

que satisfazem a equação

$$h(x, y, z, w) = \det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = 0, \quad (4-1)$$

onde  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$  são vetores que formam uma base para o complemento ortogonal do subespaço gerado por  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ .

Para determinar  $h$  precisamos calcular os dois vetores normais à superfície.

Assim como os vetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , os vetores  $\mathbf{m}_1$  e  $\mathbf{m}_2$  também são obtidos da matriz de rotação  $A$  dada pelos ângulos de *Euler*, com isso o vetor  $\mathbf{m}_1$  é igual a primeira linha da matriz de rotação  $A$  e o vetor  $\mathbf{m}_2$  é igual a segunda linha da matriz de rotação  $A$ .

No presente estudo utilizamos superfícies  $S$  em  $\mathbb{R}^4$  representadas por  $f^{-1}(0)$  para  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e desejamos encontrar e visualizar a curva silhueta destas mesmas superfícies. Para isso, executamos os seguintes passos:

1. Encontramos um ponto inicial  $\mathbf{p}_0$  da curva silhueta  $C$  da superfície  $S$ ;
2. Utilizamos um método de continuação numérica para percorrer a curva e visualizar os pontos encontrados.

Para encontrar uma condição inicial, precisamos encontrar um ponto  $\mathbf{p}_0$  que satisfaça as três equações, ou seja, precisamos encontrar  $\mathbf{p}_0 \in D \subset \mathbb{R}^4$  tal que

$$\begin{cases} f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{0}, \\ h(\mathbf{p}_0) = 0, \end{cases}$$

onde  $f(\mathbf{p}_0) = \mathbf{0}$  significa que  $f(\mathbf{p}_0) = (f_1(\mathbf{p}_0), f_2(\mathbf{p}_0)) = (0, 0)$ , ou seja,  $f_1(\mathbf{p}_0) = 0$  e  $f_2(\mathbf{p}_0) = 0$ .

Para isso, escolhemos um ponto aleatoriamente no domínio  $D \subset \mathbb{R}^4$  para em seguida utilizarmos o *método de Newton*<sup>1</sup> para solucionar o sistema de equações e chegarmos ao ponto inicial  $\mathbf{p}_0$  da curva silhueta  $C$  na superfície  $S$ .

Considere  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - [\mathbf{F}'(\mathbf{x}^i)]^+ \mathbf{F}(\mathbf{x}^i), \quad i = 0, 1, \dots$$

onde  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  é dada pelas funções  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de  $n+1$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  e  $[\mathbf{F}'(\mathbf{x}^i)]^+$  corresponde a pseudo-inversa.

<sup>1</sup>Isaac Newton (1643 - 1727): cientista inglês, mais reconhecido como físico e matemático, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo natural e teólogo.

No nosso caso, a matriz  $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^i)$  é da seguinte forma:

$$\mathbf{F}'(x, y, z, w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

Precisamos encontrar a pseudo-inversa. Sabendo que a *inversa de Moore-Penrose* de uma matriz  $M_{n \times (n+1)}$  com posto máximo é definida como

$$M^+ = M^t(MM^t)^{-1}$$

Então, o método de Newton em nosso caso é dado por

$$\mathbf{p}^{i+1} = \mathbf{p}^i - [\mathbf{F}'(\mathbf{p}^i)^+] \mathbf{F}(\mathbf{p}^i) = \mathbf{p}^i - [\mathbf{F}'(\mathbf{p}^i)^t (\mathbf{F}'(\mathbf{p}^i) \mathbf{F}'(\mathbf{p}^i)^t)^{-1}] \mathbf{F}(\mathbf{p}^i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Agora temos que solucionar o seguinte sistema:  $[\mathbf{F}'(\mathbf{p}^i)^+] \mathbf{F}(\mathbf{p}^i) = \mathbf{b}$ . Para obter  $\mathbf{F}'(\mathbf{p}^i)^+$  de uma maneira mais fácil, fazemos a decomposição QR da matriz  $\mathbf{F}'(\mathbf{p}^i)^t$  (ver(1)). Assim, podemos encontrar  $\mathbf{b}$  da seguinte forma

$$\mathbf{F}'(\mathbf{p}^i)^t = QR \Rightarrow R^t \mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{p}^i) \text{ e } \mathbf{b} = Q\mathbf{a}.$$

Encontrado  $\mathbf{b}$ , substituímos esse valor na fórmula do método de Newton modificado e continuamos a iteração até convergir. O ponto  $\mathbf{p}_0$  é o primeiro ponto da curva silhueta  $C$  da superfície  $S$  em relação a  $\phi_2$ .

A figura 4.1 ilustra o algoritmo 4.1, que mostra essa versão do método de Newton modificado apresentada acima.

Algoritmo 4.1: Método de Newton modificado	
Passo 1:	Escolha $\mathbf{p}^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$
Passo 2:	Escolha $\epsilon > 0$
Passo 3:	Repita
Passo 4:	decomposição QR de $\mathbf{F}'(\mathbf{p}^i)^t$
Passo 5:	$R^t \mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{p}^i)$
Passo 6:	$\mathbf{b} = Q\mathbf{a}$
Passo 7:	$\mathbf{p}^{i+1} = \mathbf{p}^i - \mathbf{b}$ , onde $\mathbf{b} = [\mathbf{F}'(\mathbf{p}^i)^+] \mathbf{F}(\mathbf{p}^i)$
Passo 8:	enquanto $\ \mathbf{p}^{i+1} - \mathbf{p}^i\  > \epsilon$

Tabela 4.1: Método de Newton modificado

Encontrado o ponto  $\mathbf{p}_0$ , aplicamos o *método preditor-corretor* de continuação numérica, tomando o método de Euler como preditor e como corretor utilizamos novamente o método de Newton modificado; esse último já visto

acima para encontrar o ponto  $\mathbf{p}_0$  que tomamos como ponto de partida. O método de Euler (ver (1)) consiste em encontrar uma sequência de pontos na direção do vetor tangente  $\mathbf{t}$  (ver figura 4.2), isto é,

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{p}_j + \lambda \mathbf{t}(\mathbf{p}_j),$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  representa o tamanho do passo.

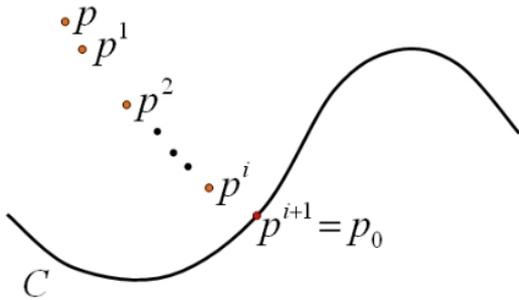


Figura 4.1: Método de Newton

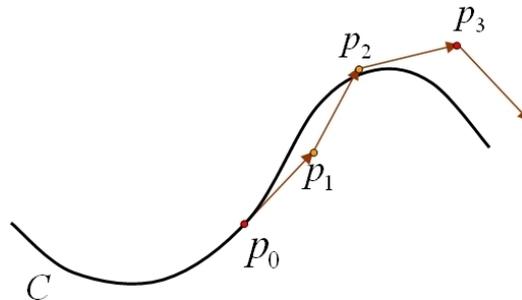


Figura 4.2: Método de Euler

O vetor tangente  $\mathbf{t}(\mathbf{p}_j)$  é calculado através do produto vetorial  $\otimes$  em  $\mathbb{R}^4$  entre os vetores  $\mathbf{n}_1 = \text{grad}(f_1)$ ,  $\mathbf{n}_2 = \text{grad}(f_2)$ , já vistos anteriormente, e  $\mathbf{n}_3 = \text{grad}(h)$ , ou seja,

$$\mathbf{t} = \otimes(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} & \vec{l} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} & \frac{\partial h}{\partial w} \end{vmatrix}$$

A tabela 4.2 mostra o algoritmo do método de Euler descrito acima.

Algoritmo 4.2:	Método de Euler
Passo 1:	Dado $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$
Passo 2:	Escolha $\lambda \in \mathbb{R}$
Passo 3:	$\mathbf{t}(\mathbf{p}_j) = \otimes(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$
Passo 4:	$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{p}_j + \lambda \mathbf{t}(\mathbf{p}_j)$

Tabela 4.2: Método de Euler

A tabela 4.3 mostra essa versão do método preditor-corretor com o método de Euler como preditor e o método de Newton modificado como corretor e a figura 4.3 ilustra tal método.

Com isso, encontramos os pontos da curva silhueta  $C$  em relação a  $\phi_2$  da superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^4$  definida implicitamente.

Algoritmo 4.3: Método predictor-corretor Euler-Newton	
Passo 1:	$\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{p}_0) = 0$
Passo 2:	$\lambda \in \mathbb{R}$
Passo 3:	$\mathbf{t}(\mathbf{p}_j) = \otimes(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$
Passo 4:	$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{p}_j + \lambda \mathbf{t}(\mathbf{p}_j)$
Passo 5:	$\epsilon > 0$
Passo 6:	Repita
Passo 7:	decomposição QR de $\mathbf{F}'(\mathbf{p}_{j+1})^t$
Passo 8:	$R^t \mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{p}_{j+1}^i)$
Passo 9:	$\mathbf{b} = Q\mathbf{a}$
Passo 10:	$\mathbf{p}_{j+1}^{i+1} = \mathbf{p}_{j+1}^i - \mathbf{b}$ , onde $\mathbf{b} = [\mathbf{F}'(\mathbf{p}_{j+1}^i)^+] \mathbf{F}(\mathbf{p}_{j+1}^i)$
Passo 11:	enquanto $\ \mathbf{p}_{j+1}^{i+1} - \mathbf{p}_{j+1}^i\  > \epsilon$

Tabela 4.3: Método Predictor-Corretor Euler-Newton

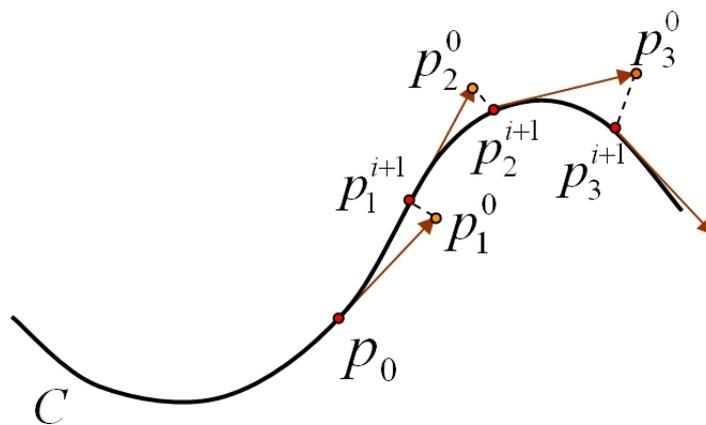


Figura 4.3: Método predictor-corretor Euler-Newton

### 4.1.2

#### Silhueta em relação a $\phi_1$

Nesse caso, para encontrar os pontos silhueta basta fazer o produto interno entre os vetores normais à superfície,  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$ , com o vetor  $\mathbf{e}_1$  em cada ponto  $\mathbf{p}$  na superfície  $S$  e encontrar os pontos que satisfazem ambas as equações, 3-3 e 3-4, como visto na proposição 3.4.1.

### 4.1.3

#### Ponto silhueta duplo

Para descobrir os pontos silhueta duplos precisamos encontrar os pontos silhueta em relação a  $\phi_1$  e em relação a  $\phi_2$ , ao mesmo tempo, como vimos na definição 3.4.1. O método utilizado consiste em calcular o produto interno entre os vetores que representam a visão dos observadores,  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , com os dois vetores normais à superfície,  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$ . Se  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ , então temos um ponto de silhueta em relação a ambas as projeções,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ ,

ou seja, um ponto de silhueta duplo.

Com essas informações, agora podemos plotar os pontos silhueta da superfície  $S$  definida implicitamente.

## 4.2

### Caso paramétrico

Nessa seção vamos determinar e visualizar a silhueta para superfícies em  $\mathbb{R}^4$  definidas por equações paramétricas. Para isso utilizaremos a aritmética intervalar para gerar uma subdivisão robusta do domínio paramétrico.

#### 4.2.1

##### Silhueta em relação a $\phi_2$

Quando uma superfície está representada por uma equação implícita seus vetores normais são obtidos diretamente. No caso de uma superfície representada por equações paramétricas são os vetores tangentes que podem ser obtidos diretamente e para encontrar os vetores normais usamos a decomposição  $QR$ , o que aumenta a quantidade de cálculos efetuados. Em consequência disso e das equações 3-5 e 3-6 serem equivalentes, escolhemos a representação da curva silhueta  $C$  de superfícies paramétricas  $S$  como a equação 3-5 e a denotamos por  $g$ . Então temos a seguinte definição de curva silhueta para uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^4$  dada na forma paramétrica:

**Definição 4.2.1 (Curva silhueta)** *A curva silhueta  $C$  de uma superfície  $S$  descrita na forma paramétrica como em 3.3.2 é o conjunto de pontos  $p$  de  $S$  que satisfazem a equação*

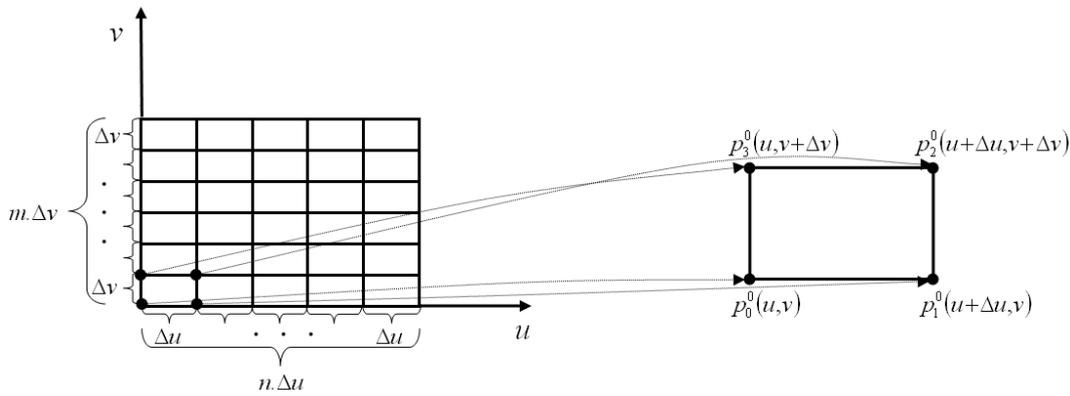
$$g(u, v) = \det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0 \quad (4-2)$$

onde  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  geram o plano tangente a  $S$  em  $p$  e  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$  representam o observador.

#### 4.2.2

##### Subdivisão uniforme do domínio

Considere uma subdivisão do domínio paramétrico  $D \subset \mathbb{R}^2$  tomando  $n$  comprimentos  $\Delta u > 0$  e  $m$  comprimentos  $\Delta v > 0$ . Com isso obtemos  $n \times m$  retângulos em  $D$ , cujos vértices são os pontos  $\mathbf{p}_i^j(u, v)$ ,  $\mathbf{p}_{i+1}^j(u + \Delta u, v)$ ,  $\mathbf{p}_{i+2}^j(u + \Delta u, v + \Delta v)$  e  $\mathbf{p}_{i+3}^j(u + \Delta u, v + \Delta v)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  e  $j = 0, 1, \dots, m-1$ . A figura 4.4 (a) ilustra essa forma de divisão do domínio de  $S$  e a figura 4.4 (b) mostra um dos retângulos do domínio e seus respectivos vértices.



(a) Subdivisão do domínio de  $S$ . (b) Um retângulo do domínio de  $S$ .

Figura 4.4: Domínio de  $S$ .

Como a superfície  $S$  está representada por uma equação paramétrica, os vetores tangentes podem ser obtidos diretamente e para encontrá-los calculamos as derivadas parciais da função  $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)$  em relação a  $u$  e em relação a  $v$  em cada um dos pontos  $\mathbf{p}_i^j \in D$ , obtendo assim  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$ , respectivamente; isto é,

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\partial G(u, v)}{\partial u} = \left( \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial u} \right)^T$$

e

$$\mathbf{t}_2 = \frac{\partial G(u, v)}{\partial v} = \left( \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial w}{\partial v} \right)^T.$$

Com os vetores  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  já temos como calcular  $g(u, v) = \det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  em cada vértice do reticulado, pois os vetores  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ , que representam a visão dos observadores foram previamente determinados, como foi visto no capítulo 3.

Para encontrar a curva silhueta  $C$  de uma superfície paramétrica  $S$  tomamos cada retângulo no domínio subdividido e verificamos o sinal do  $\det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  em cada um dos quatro vértices desses retângulos, ou seja, verificamos se  $\det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) < 0$  ou se  $\det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \geq 0$  em cada ponto  $\mathbf{p}_i^j \in U$ . Se houver mudança de sinal do determinante em pelo menos uma das arestas de tal retângulo sabemos, pelo teorema do valor intermediário, que a curva silhueta passa por algumas das arestas desse retângulo. Uma outra possibilidade é o determinante ser igual a zero no vértice, então temos que a curva silhueta passa justamente sobre esse vértice do retângulo.

Com a subdivisão uniforme não podemos garantir que encontramos a melhor aproximação da curva silhueta real. Isso pode acontecer, por exemplo, se  $m$  e  $n$  não forem grandes o suficiente. As figuras 4.5 (a) e (b) mostram duas

curvas silhueta com formas diferentes e (c) mostra que as duas curvas tomam a mesma forma quando o domínio não foi suficientemente subdividido.

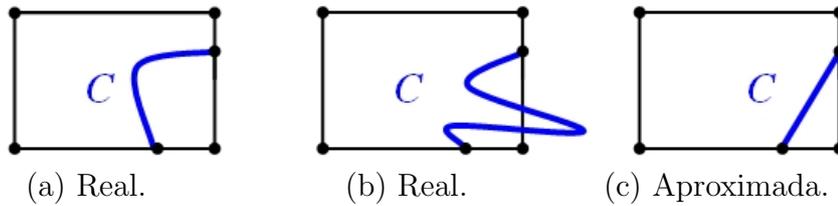


Figura 4.5: Curva silhueta.

Existem alguns métodos que garantem robustez, ou seja, uma melhor aproximação da forma topológica da curva que dependem do tipo de formulação paramétrica (ver (16)). Optamos por utilizar aritmética intervalar para encontrar uma maneira de garantir a robustez da curva silhueta  $C$ , o que veremos na subseção a seguir.

**4.2.3**  
**Subdivisão adaptativa do domínio**

Como vamos trabalhar com conjuntos de intervalos ao invés de conjuntos de números reais, primeiramente criamos dois intervalos iniciais de acordo com a definição 2.1.1,  $[u] \equiv [\underline{u}, \bar{u}]$  e  $[v] \equiv [\underline{v}, \bar{v}]$ . O domínio da superfície  $S$  é dado por  $D = ([\underline{u}, \bar{u}] \times [\underline{v}, \bar{v}]) \subset \mathbb{R}^2$ , como na figura 4.6.

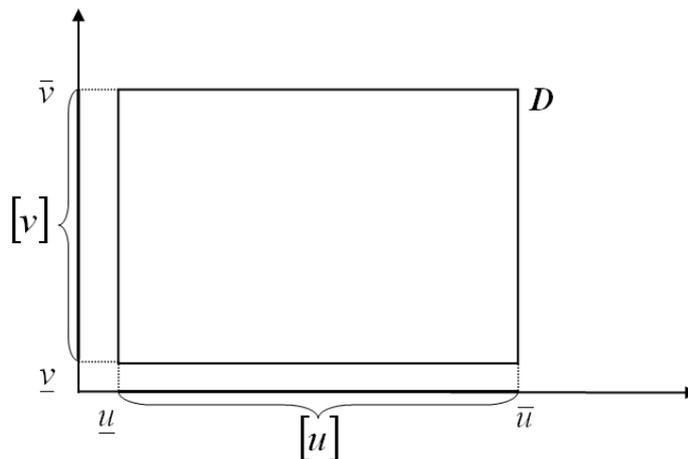


Figura 4.6: Domínio  $D$ .

Embora a definição da curva silhueta  $C$  seja a mesma que vimos anteriormente na definição 4.2.1, agora não serão mais utilizados os parâmetros  $u$  e  $v$ , mas os intervalos  $[u]$  e  $[v]$  e a função  $g$  é estendida para formulação intervalar  $\mathbf{g}([u], [v]) = \det([\mathbf{t}_1], [\mathbf{t}_2], \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ .

**Subdivisão do domínio**

Utilizamos a mesma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^4$  definida em um mesmo domínio retangular  $D$  e igualmente parametrizada pela função  $G(u, v)$  como na definição 3.3.2, onde  $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ , porém agora a divisão do domínio  $D$  é feita por uma *quadtree*.

Ao utilizarmos uma estrutura *quadtree* dividimos o espaço recursivamente em quatro regiões de parâmetros retangulares, utilizando intervalos regulares ao longo das duas direções axiais. A divisão é feita sempre que um critério é satisfeito e não se tenha atingido o nível máximo de profundidade pré-determinado da árvore. A figura 4.7 mostra um exemplo de uma estrutura em árvore e cada nível da divisão de um domínio através da *quadtree*.

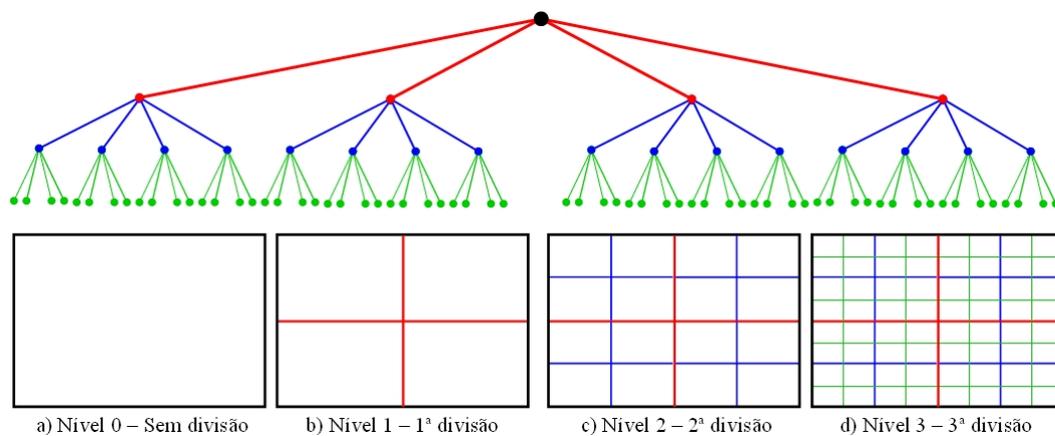


Figura 4.7: *Quadtree*.

Nesse trabalho utilizamos aritmética intervalar como ferramenta no controle da divisão do domínio  $D$ .

Uma região do domínio é descartada quando sabemos que a curva não passa por ela. Caso contrário, avaliamos se é ou não necessária a subdivisão. A subdivisão depende também da variação da curvatura da curva: quanto maior for a variação da curvatura, mais subdivisões haverá na região que contém a curva, desse modo a subdivisão é adaptativa geometricamente.

A figura 4.8 à esquerda mostra um exemplo de divisão simples do domínio e à direita mostra um exemplo de divisão adaptada do domínio utilizando *quadtree* para gerar uma curva. Observe, na figura à direita, que algumas regiões que contém a curva possuem mais subdivisões.

Precisamos estabelecer os critérios para realizar a subdivisão do domínio  $D$  já que temos a ferramenta para realizar tal divisão, a *quadtree*. Dada uma região  $R$  do domínio  $D$ , onde

$$R = \{([u, \bar{u}] \times [v, \bar{v}]) \subset D \subset \mathbb{R}^2; [u] \equiv [u, \bar{u}] \text{ e } [v] \equiv [v, \bar{v}]\}$$

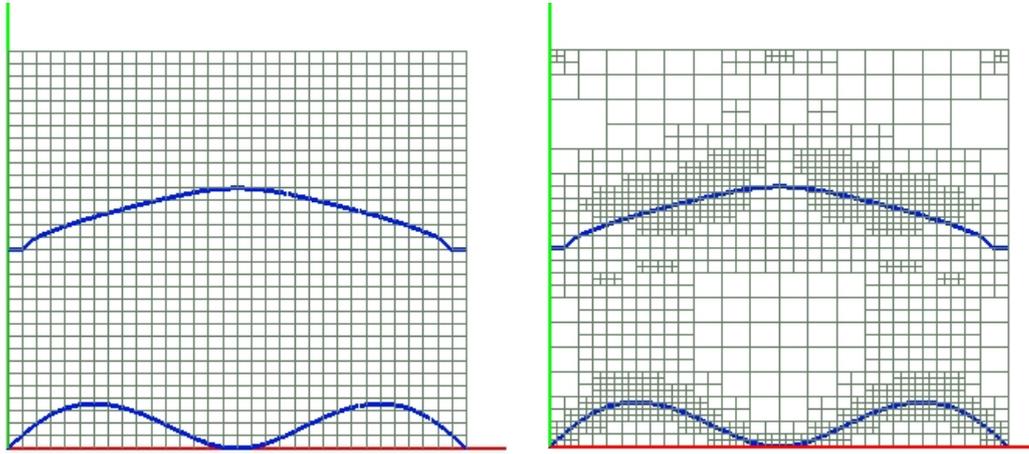


Figura 4.8: Divisão do domínio utilizando *quadtree*.

e desde que não se tenha atingido o nível máximo de profundidade da árvore, os critérios que utilizamos para definir se a região  $R$  deve ou não ser subdividida são os seguintes: critério da *componente conectada*, critério *topológico*, e critério *geométrico* (ver (15)).

1. Critério da *componente conectada*: elimina as regiões da *quadtree* que não contém uma parte da curva através do seguinte teste:

$$\text{Se } 0 \notin \mathbf{g}(R) \text{ então descarte } R.$$

Esse é um teste de rejeição rápido e robusto (ver teorema 2.2.1).

2. Critério *topológico*: analisa se existe a possibilidade de mais de uma componente da curva na região  $R$ . Ou seja, se a curva silhueta é localmente um gráfico de função, fazendo o seguinte teste:

$$\text{Se } (0, 0) \in \nabla \mathbf{g}(R) \text{ então divide } R.$$

3. Critério *geométrico*: identifica variações na direção da curva analisando a existência de altas curvaturas através da variação do gradiente dentro da região e é feito da seguinte forma:

$$\text{Se } \text{diam} \left( \frac{\nabla \mathbf{g}(R)}{\|\nabla \mathbf{g}(R)\|} \right) > \epsilon \text{ então divide } R,$$

$$\text{onde } \text{diam} \left( \frac{\nabla \mathbf{g}(R)}{\|\nabla \mathbf{g}(R)\|} \right) = \max(\max(\text{diam}([t_1])), \max(\text{diam}([t_2]))).$$

Com isso, geramos uma subdivisão do domínio adaptada e robusta de modo que, com um número mínimo de subdivisões, sua geometria seja melhor aproximada e a sua forma topológica seja preservada.

Quando a região  $R$  precisa ser subdividida, essa subdivisão é feita da seguinte forma: tomamos os pontos médio,  $m_u$  e  $m_v$  como na equação (2-3), dos intervalos  $[u]$  e  $[v]$  respectivamente, relativos a tal região, ou seja,  $m_u = m([u]) = \frac{u + \bar{u}}{2}$  e  $m_v = m([v]) = \frac{v + \bar{v}}{2}$ , e formamos os quatro seguintes novos intervalos:

$$[u_0] = [\underline{u}, m_u]; [u_1] = [m_u, \bar{u}]; [v_0] = [\underline{v}, m_v] \text{ e } [v_1] = [m_v, \bar{v}].$$

Como a subdivisão é feita através da *quadtree*, ela gera quatro novas regiões em cada uma das subdivisões (ver figura 4.9). Temos então as seguintes subregiões de  $R$ :

$$\begin{aligned} R_1 &= ([\underline{u}, m_u] \times [\underline{v}, m_v]); \\ R_2 &= ([m_u, \bar{u}] \times [\underline{v}, m_v]); \\ R_3 &= ([\underline{u}, m_u] \times [m_v, \bar{v}]); \\ R_4 &= ([m_u, \bar{u}] \times [m_v, \bar{v}]). \end{aligned}$$

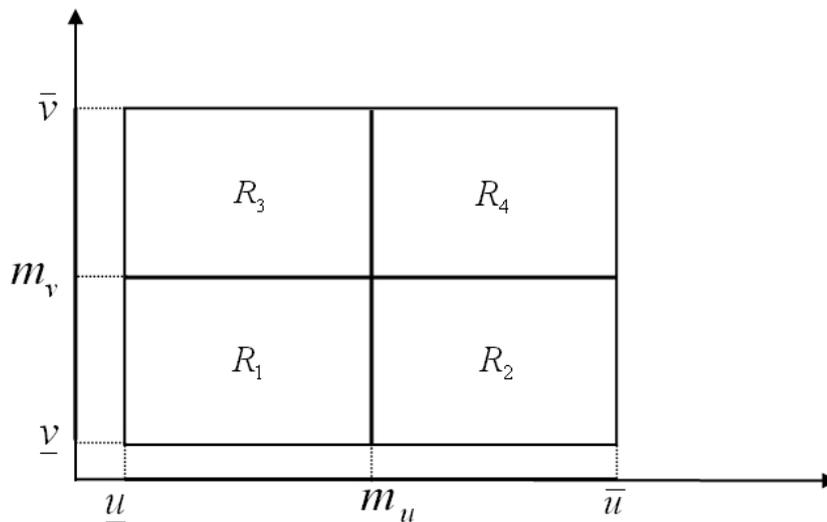


Figura 4.9: Subregiões de  $R$ .

Cada nó folha das regiões que não são descartadas é armazenado em uma pilha, até que se chegue ao final da divisão. Quando isso acontece, desempilhamos os nós, para então encontrarmos a curva aplicando o mesmo método utilizado anteriormente para gerar a curva silhueta.