

5 Aplicações

Neste capítulo apresentaremos algumas aplicações da curva silhueta. A primeira é auxiliar na visualização de superfícies em \mathbb{R}^4 . A silhueta destaca importantes curvas na superfície e identifica quando o plano tangente degenera segundo a projeção escolhida. Na segunda aplicação, estudamos objetos 3D em movimento e aplica-se a curva silhueta para o problema de colisão. Uma terceira aplicação é a geração de curvas *offset* no plano. Utilizamos superfícies em \mathbb{R}^4 representadas nas formas implícita e paramétrica para gerar e visualizar as silhuetas.

5.1 Visualização da curva silhueta em \mathbb{R}^4

Alguns exemplos de superfícies em \mathbb{R}^4 podem ser modeladas como o gráfico de uma função complexa (ver (12) e (18)) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\mathbf{w} = f(\mathbf{z}), \text{ onde } \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathbb{C}.$$

O gráfico deste tipo de função é uma superfície S no \mathbb{R}^4 .

Considerando $\mathbf{z} = x + iy$ e $\mathbf{w} = z + iw$ tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= f(\mathbf{z}) \\ \mathbf{w} - f(\mathbf{z}) &= 0 \\ z + iw - f(x + iy) &= 0 \\ z - \operatorname{Re}(f(\mathbf{z})) + i(w - \operatorname{Im}(f(\mathbf{z}))) &= 0 \end{aligned} \tag{5-1}$$

segue que:

$$\begin{cases} z - \operatorname{Re}(f(\mathbf{z})) = 0 \\ w - \operatorname{Im}(f(\mathbf{z})) = 0 \end{cases}$$

Se definimos $\mathbf{h} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{h}(x, y, z, w) =$

$(h_1(x, y, z, w), h_2(x, y, z, w))$ e

$$\begin{aligned} h_1(x, y, z, w) &= z - \operatorname{Re}(f(\mathbf{z})) \\ h_2(x, y, z, w) &= w - \operatorname{Im}(f(\mathbf{z})) \end{aligned} \quad (5-2)$$

então segue que $S = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{0})$.

Já no caso paramétrico, o gráfico de f pode ser dado por:

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}(\mathbf{z}); \\ y &= \operatorname{Im}(\mathbf{z}); \\ z &= \operatorname{Re}(f(\mathbf{z})); \\ w &= \operatorname{Im}(f(\mathbf{z})). \end{aligned} \quad (5-3)$$

Todas as superfícies visualizadas estão na forma paramétrica e utilizamos malhas retangulares para representá-las. Para a geração dessas superfícies utilizamos coordenadas polares (u, v) , substituindo $x = u \cos(v)$ e $y = u \operatorname{sen}(v)$ na equação 5-1:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}) &= f(x + iy) \\ &= f(u \cos(v) + iu \operatorname{sen}(v)) \end{aligned} \quad (5-4)$$

Em todas as imagens, os objetos estão projetados no plano xy e os eixos x , y , z e w estão representados, respectivamente, nas cores vermelha, verde, azul e marrom, como veremos nos exemplos a seguir.

Nas subseções seguintes apresentaremos alguns exemplos de silhuetas obtidas nos casos paramétrico e implícito.

5.1.1

$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2$$

Vamos determinar, por exemplo, a curva silhueta da superfície dada pelo gráfico de $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2$ através da equação 3-6, quando os vetores que representam a visão do observador 1 e 2 são, respectivamente, $\mathbf{e}_1 = (0, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$.

Por 5-2 segue que $h_1 = z - x^2 + y^2$ e $h_2 = w - 2xy$.

Em seguida, vamos determinar os vetores normais à superfície, \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 , bem como os vetores \mathbf{m}_1 e \mathbf{m}_2 , para calcular o determinante.

$$\mathbf{n}_1 = \nabla(h_1) = (-2x, 2y, 1, 0) \text{ e } \mathbf{n}_2 = \nabla(h_2) = (-2x, -2y, 0, 1).$$

$$\mathbf{m}_1 = (0, 0, 1, 0) \text{ e } \mathbf{m}_2 = (1, 0, 0, 0).$$

$$\text{Se } \det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = 0.$$

Então,

$$\det(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) = \begin{vmatrix} -2x & 2y & 1 & 0 \\ -2y & -2x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2y \Rightarrow y = 0.$$

Logo:

$$h_1 = 0 \Rightarrow z - x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow z = x^2 \text{ e}$$

$$h_2 = 0 \Rightarrow w - 2xy = 0 \Rightarrow w = 0.$$

Portanto, a curva encontrada tem a forma de uma parábola (ver figura 5.1).

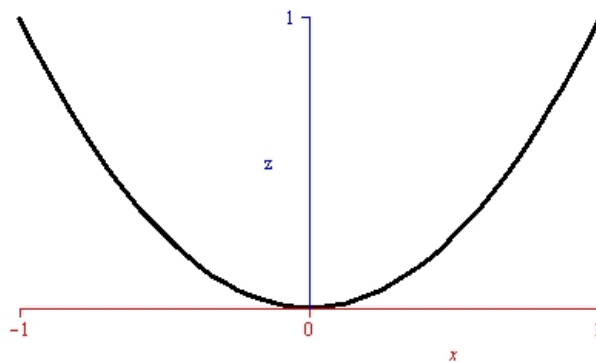


Figura 5.1: $z = x^2$.

A figura 5.2 mostra a curva silhueta obtida para a superfície implícita $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{0})$ onde $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2$ verificando a curva prevista.

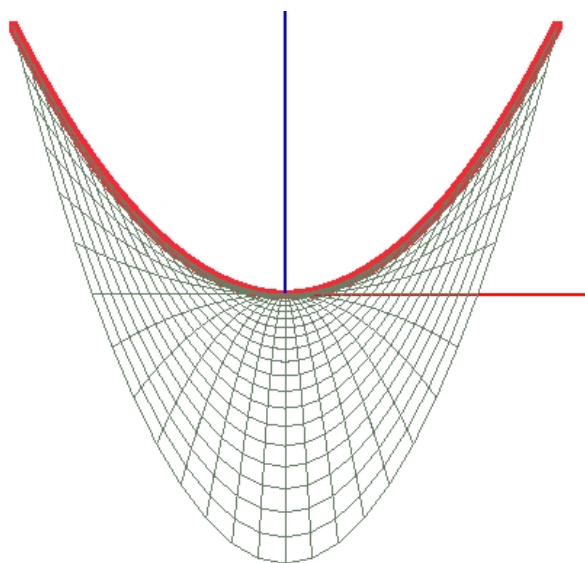


Figura 5.2: Curva silhueta com observadores no eixo y e w .

A figura 5.3 (a) mostra a distribuição das cores que representam os valores da função dada por $\det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ na superfície dada pelo gráfico de $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2$, onde a cor preta significa que $|\det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)| \leq 0,01$ e a cor branca corresponde a $|\det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)| = 4$. Em (b) está representada a silhueta paramétrica (azul) dessa mesma superfície.

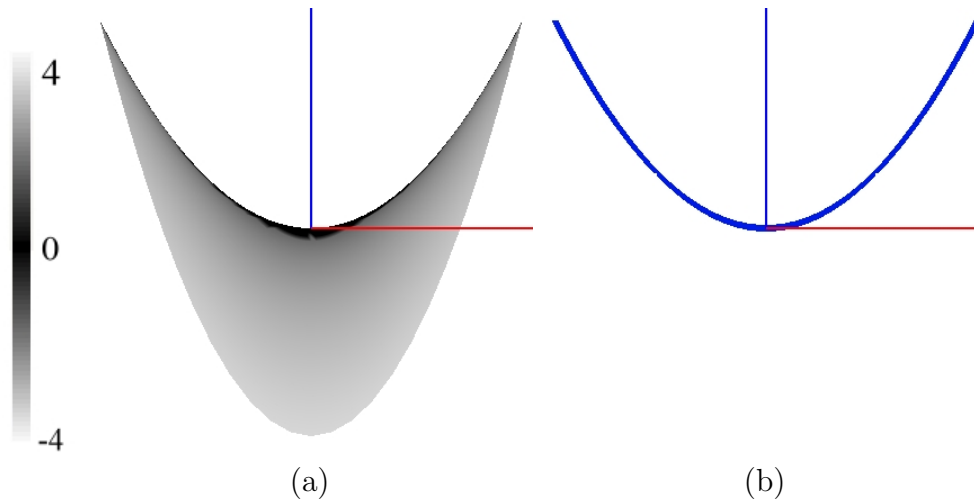


Figura 5.3: $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2$ com distribuição de cor do determinante.

A figura 5.4 mostra o resultado obtido para esta função, sendo que nesse exemplo foi gerada a curva silhueta tanto no caso implícito (ver figura 5.4 (a) e (b)) de acordo com o método mostrado na seção 4.1, quanto no caso paramétrico (ver figura 5.4 (c), e (d)) através dos métodos explicados na seção 4.2, bem como a superfície paramétrica (ver figura 5.4 (d)).

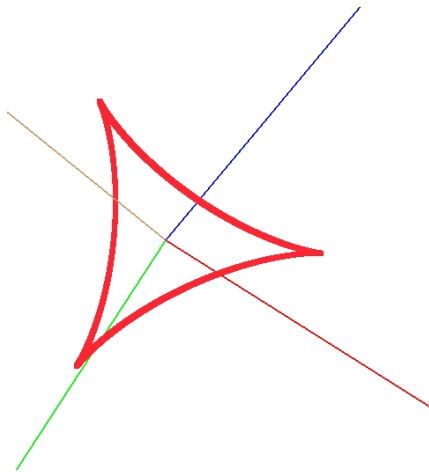
A equação paramétrica foi obtida como descrita na equação 5-3, ou seja,

$$\begin{aligned}x &= u \cos(v) \\y &= u \sin(v) \\z &= u^2 \cos(2v) \\w &= u^2 \sin(2v)\end{aligned}$$

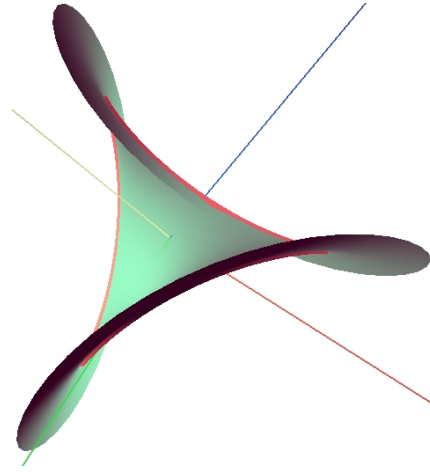
Os objetos estão rotacionados através dos ângulos de Euler como descrito na seção 3.1.2.

A tabela abaixo resume as equações aplicadas, bem como os valores em radianos dos ângulos de Euler utilizados para rotacionar a superfície e a silhueta da figura 5.4. Nesse caso, os valores dos parâmetros u e v variam em $[0, 1]$ e $[0, 2\pi]$, respectivamente.

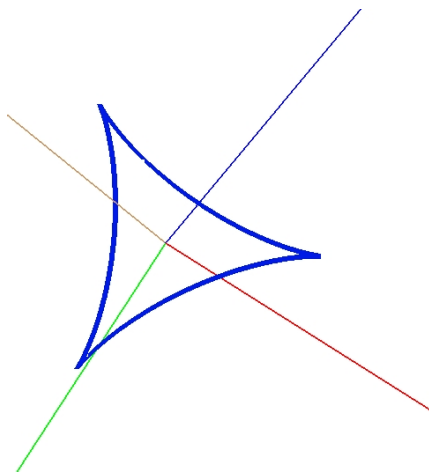
Equações implícitas	Equações paramétricas	Ângulos de Euler
$h_1(x, y, z, w) = z - x^2 + y^2$	$x = u \cos(v)$	$\theta_1 = 9\pi/32, \quad \theta_2 = 23\pi/16$
$h_2(x, y, z, w) = w - 2xy$	$y = u \sin(v)$	$\theta_3 = 15\pi/32, \quad \theta_4 = 15\pi/32$
	$z = u^2 \cos(2v)$	$\theta_5 = 3\pi/16, \quad \theta_6 = 0$
	$w = u^2 \sin(2v)$	



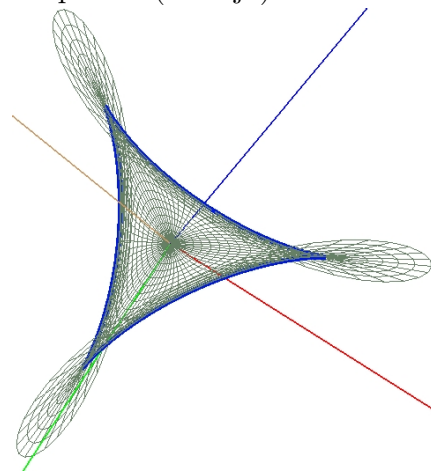
(a) implícito (laranja)



(b) superfície com silhueta implícita (laranja)



(c) paramétrico (azul)



(d) *wireframe* com silhueta paramétrica (azul)

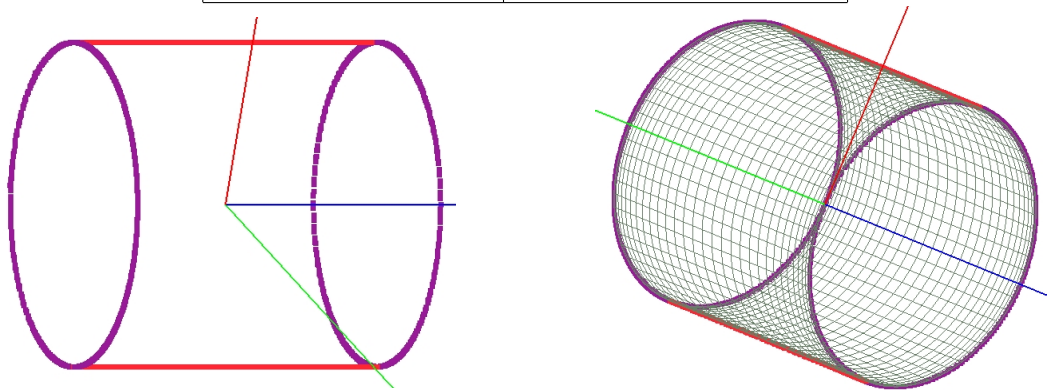
Figura 5.4: $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^2$.

5.1.2

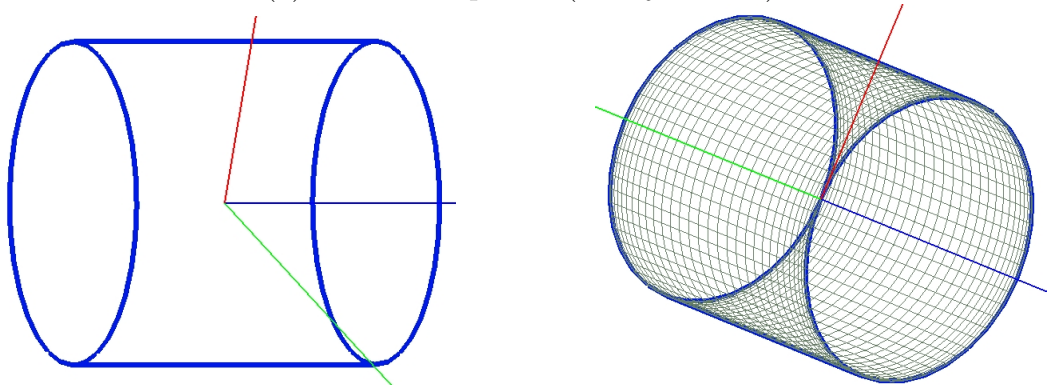
Toro *flat*

Implementamos também a superfície toro *flat* (9, 3), que veremos nos exemplos seguintes. A tabela abaixo apresenta a formulação implícita e paramétrica do toro *flat*. A curva silhueta obtida para esse exemplo é apresentada inicialmente nas figuras 5.5, 5.6, 5.7 e 5.8, para uma posição particular dos observadores.

Equações implícitas	Equações paramétricas
$f_1 = x^2 + y^2 - 1$	$x = \text{sen}(u)$
$f_2 = z^2 + w^2 - 1$	$y = \text{cos}(u)$
	$z = \text{sen}(v)$
	$w = \text{cos}(v)$



(a) Silhueta implícita (laranja e roxo).



(b) Silhueta paramétrica (azul).

Figura 5.5: Curva silhueta do toro *flat*.

Os objetos foram rotacionados, na figura 5.5-esquerda, com $\theta = (11\pi/32, 9\pi/32, 0, 5\pi/32, 3\pi/8, 0)$ e na figura 5.5-direita com $\theta = (3\pi/8, \pi/4, 0, 0, 0, 0)$.

Aqui destacamos dois tipos de silhueta: os pontos laranja (figura 5.5 (a)) são os pontos silhueta em relação a ϕ_2 e os pontos roxo são os pontos silhueta em relação a ϕ_1 , como visto na proposição 3.4.1 do capítulo 3.

As imagens superior, centro e inferior da figura 5.6 diferem apenas pela rotação do ângulo θ_3 . Na figura 5.6-superior os objetos foram rotacionados com $\theta = (-5\pi/32, 5\pi/32, 0, 3\pi/16, 5\pi/32, 0)$; na 5.6-centro com $\theta = (-5\pi/32, 5\pi/32, 3\pi/32, 3\pi/16, 5\pi/32, 0)$ e na 5.6-inferior com $\theta = (-5\pi/32, 5\pi/32, 3\pi/16, 3\pi/16, 5\pi/32, 0)$.

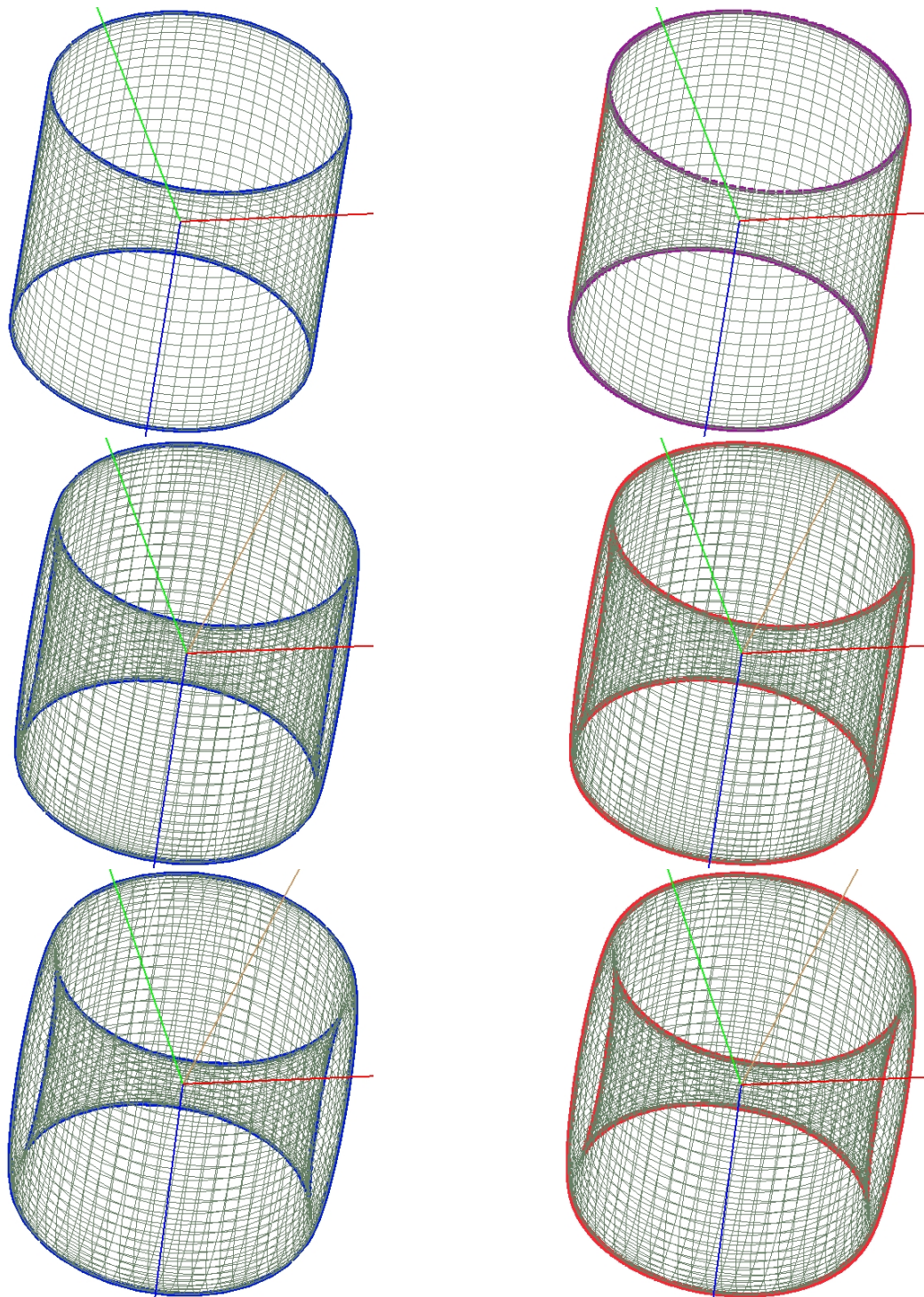


Figura 5.6: Curva silhueta do toro *flat*.

Na figura 5.7-superior os objetos foram rotacionados com $\theta = (-11\pi/32, -9\pi/32, 45\pi/32, 21\pi/32, \pi/4, 0)$, na figura 5.7-centro com $\theta = (5\pi/32, 3\pi/16, 5\pi/32, 9\pi/16, \pi/8, 0)$ e na figura 5.7-inferior com $\theta = (5\pi/32, 3\pi/16, \pi/8, 7\pi/8, 3\pi/16, 0)$.

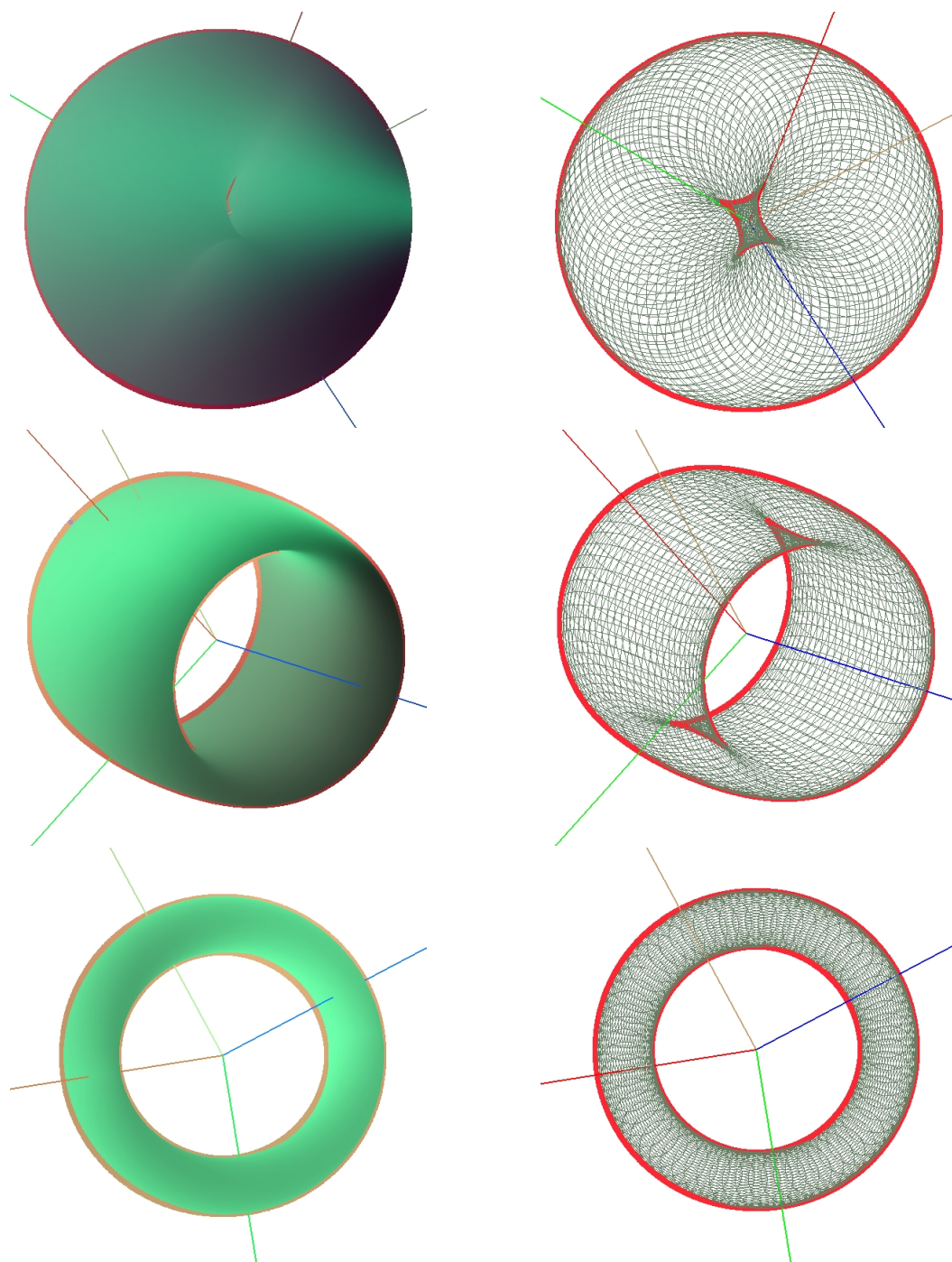


Figura 5.7: Silhueta implícita (laranja) e superfície paramétrica do toro *flat*.

Observe que em alguns casos (figura 5.7- centro e inferior) tanto a superfície quanto a curva silhueta se assemelham a de um toro em \mathbb{R}^3 .

A figura 5.8 mostra a superfície do toro e a sua curva silhueta no caso implícito (laranja, roxo e preto). Os objetos foram rotacionadas através dos ângulos de Euler na figura 5.8 a) com $\theta = (0, 0, 0, 0, \pi/2, 0)$, na figura 5.8 b) com $\theta = (0, \pi, \pi/32, 0, \pi/2, 0)$, na figura 5.8 c) com $\theta = (\pi/2, \pi/2, 3\pi/16, 0, 0, 0)$, na figura 5.8 d) com $\theta = (\pi/2, \pi/2, 3\pi/16, 0, 0, 0)$.

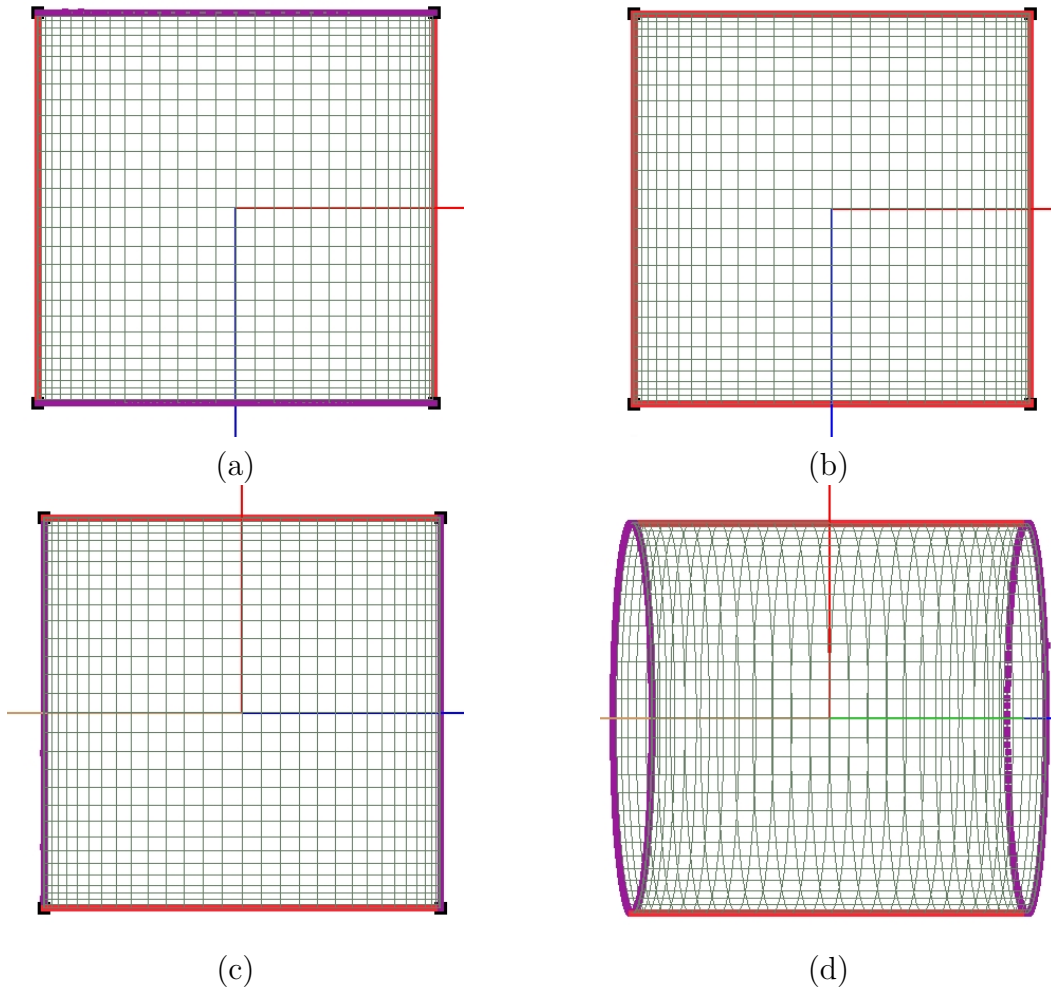
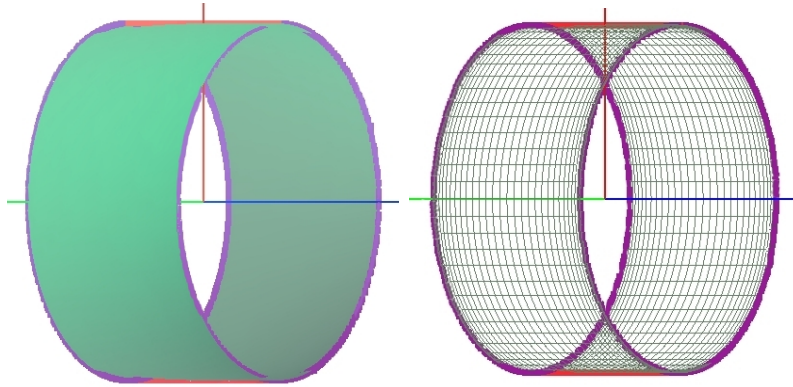


Figura 5.8: Curva silhueta do toro *flat*.

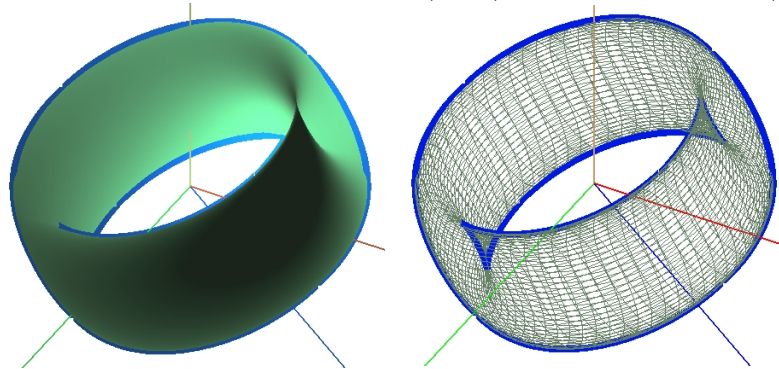
Na figura 5.8 os pontos roxo são os pontos silhueta em relação a ϕ_1 , os pontos laranja são pontos silhueta em relação a ϕ_2 , como na proposição 3.4.1 e os pontos preto são os ponto silhueta duplo, ou seja, pontos silhueta em relação a ϕ_1 e a ϕ_2 , como na definição 3.4.1. Observe que em (a) e (b) as figuras diferem apenas pela rotação do ângulo θ_3 . Já em (c) e (d) as figuras diferem apenas pela rotação do ângulo θ_2 .

Na figura 5.9 os objetos foram gerados através das equações do toro *flat* mostradas na tabela da próxima página e rotacionados com $\theta = (0, 0, 0, \pi/2, 5\pi/16, 0)$ (superior) e $\theta = (0, 7\pi/32, 9\pi/32, 5\pi/32, 19\pi/32, 9\pi/32)$ (inferior).

Equações implícitas	Equações paramétricas
$f_1 = x^2 + y^2 - 4$	$x = 2 \text{sen}(u)$
$f_2 = z^2 + w^2 - 1$	$y = 2 \text{cos}(u)$
	$z = \text{sen}(v)$
	$w = \text{cos}(v)$



(a) Silhueta implícita em relação a ϕ_1 (roxo) e em relação a ϕ_2 (laranja)



(b) Silhueta paramétrica (azul)

Figura 5.9: Curva silhueta e superfície do toro *flat*.

A figura 5.10 (a) mostra a distribuição das cores para a superfície toro *flat*, onde a cor preta significa que $|\det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)| \leq 0,01$ representa a silhueta e a cor branca corresponde a $|\det(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)| = 2$. Em (b) está representada a silhueta implícita (laranja) e em (c) a silhueta paramétrica (azul).

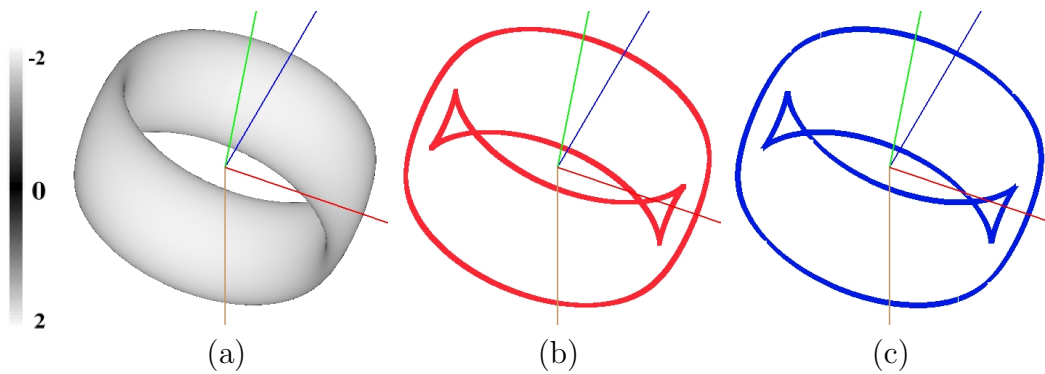


Figura 5.10: Superfície toro *flat* com distribuição de cor do determinante.

5.1.3

$$f(\mathbf{z}) = \log(\mathbf{z})$$

Implementamos também a função logarítmica, ou seja, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(\mathbf{z}) = \log(\mathbf{z})$. A tabela abaixo mostra as equações implícitas e paramétricas dessa função, com os valores dos parâmetros u e v variando em $(0, 6]$ e $[0, 2\pi]$, respectivamente. A figura 5.11 mostra a superfície juntamente com a sua curva silhueta.

Equações implícitas	Equações paramétricas
$f_1 = z - \log(x^2 + y^2)/2$	$x = u \cos(v)$
$f_2 = w - \arctan(y, x)$	$y = u \text{sen}(v)$
	$z = \log(u^2)/2$
	$w = \arctan(u \text{sen}(v), u \cos(v))$

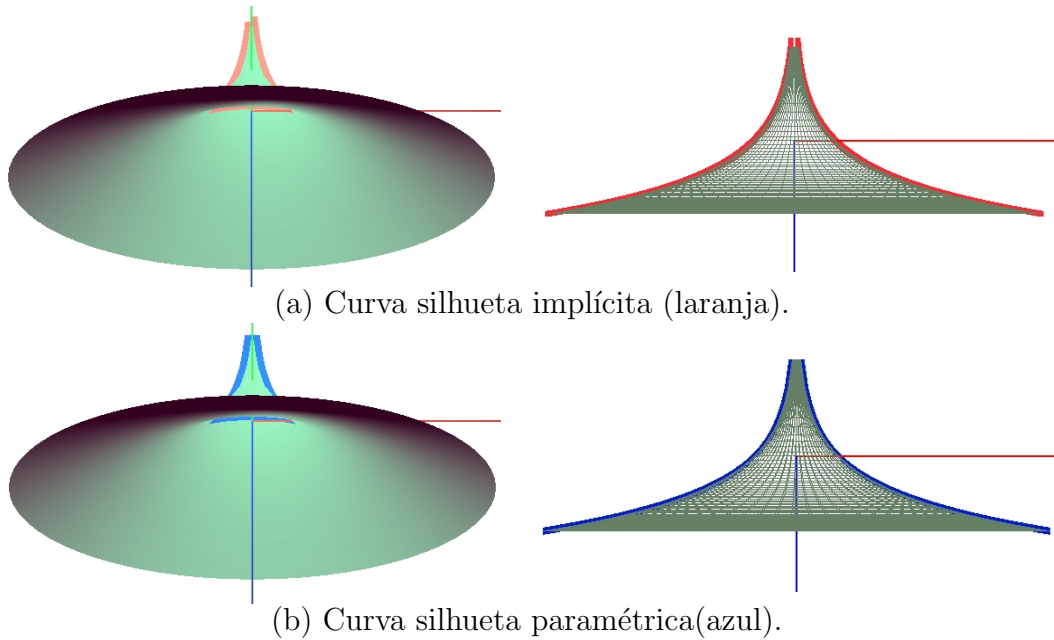


Figura 5.11: $f(\mathbf{z}) = \log(\mathbf{z})$.

Na figura 5.11-esquerda a superfície está rotacionada através dos ângulos de Euler com $\theta = (0, 3\pi/8, 0, 0, 0, 0)$ e a figura 5.11-direita com $\theta = (0, 0, 0, 0, \pi/2, 0)$.

Implementamos um exemplo de função trigonométrica regular, o seno.

5.1.4

$f(\mathbf{z}) = \text{sen}(\mathbf{z})$

A figura 5.12 mostra a função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(\mathbf{z}) = \text{sen}(\mathbf{z})$. A tabela abaixo traz as equações implícitas e paramétricas, com $u \in [0, 3]$ e $v \in [0, 2\pi]$, bem como os valores dos ângulos de Euler utilizados para rotacionar os objetos.

Equações implícitas	Equações paramétricas	Ângulos de Euler
$f_1 = z - \sin(x) \cosh(y)$	$x = u \cos(v)$	$\theta_1 = \frac{6\pi}{32}, \theta_2 = \frac{6\pi}{32}$
$f_2 = w - \cos(x) \sinh(y)$	$y = u \sin(v)$	$\theta_3 = \frac{5\pi}{32}, \theta_4 = \frac{18\pi}{32}$
	$z = \text{sen}(u \cos(v)) \cosh(u \sin(v))$	$\theta_5 = 0, \theta_6 = 0$
	$w = \cos(u \cos(v)) \sinh(u \sin(v))$	

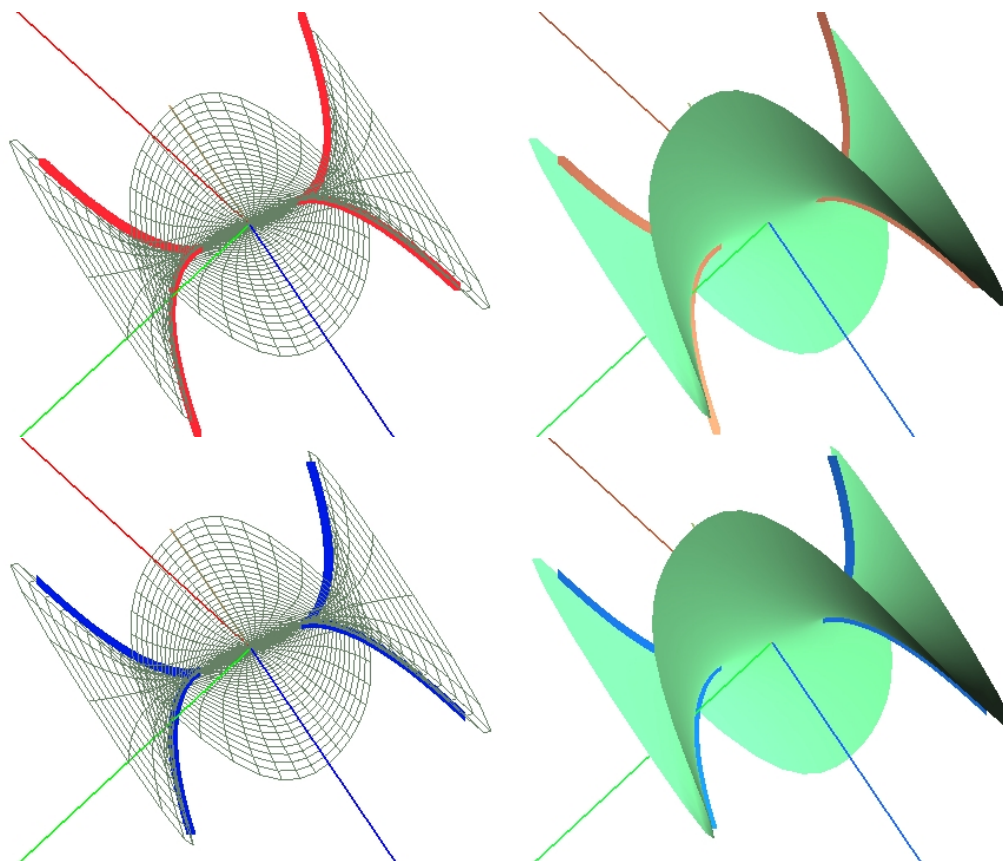


Figura 5.12: $f(\mathbf{z}) = \text{sen}(\mathbf{z})$.

5.1.5

Superfície de Steiner

A figura 5.13 mostra outra superfície implementada, a superfície de Steiner¹ (9) e sua curva silhueta, todas as imagens foram rotacionadas através dos ângulos de Euler em \mathbb{R}^4 . A parametrização de tal superfície é dada por

$$\begin{aligned} x &= \cos^2(u) \cos^2(v) - \sin^2(u) \cos^2(v) \\ y &= \sin(u) \cos(u) \cos^2(v) \\ z &= \cos(u) \sin(v) \cos(v) \\ w &= \sin(u) \sin(v) \cos(v) \end{aligned}$$

com os parâmetros u e v variando em $[0, \pi]$.

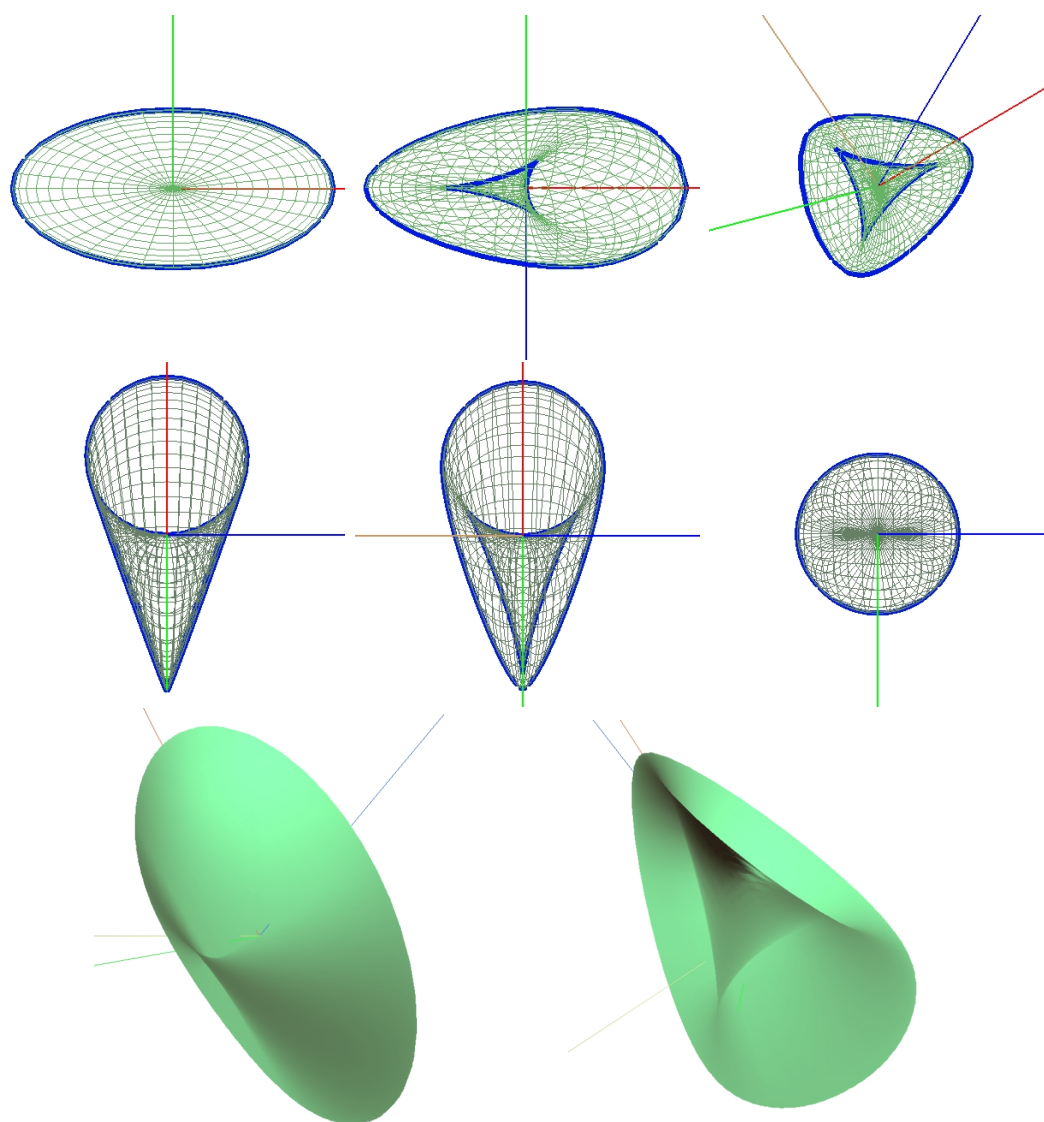


Figura 5.13: Superfície de Steiner e sua curva silhueta paramétrica.

¹Jakob Steiner (1796 - 1863): matemático suíço.

5.2 Colisão

Os modelos em 4D podem ser aplicados para representar a trajetória de um objeto 3D em movimento. Nesse caso consideramos um espaço $x - y - z - t$, onde t representa o tempo. Cada corpo em movimento é representado por uma 3-variedade em \mathbb{R}^4 .

Considerando dois corpos em movimento com as trajetórias descritas por V_1 e V_2 então haverá colisão entre os corpos se $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$. $S = V_1 \cap V_2$ é uma superfície em \mathbb{R}^4 que representa todos os pontos de contato.

Uma aplicação da silhueta será determinar o ponto inicial de colisão, ou seja, o ponto $\mathbf{p}(x, y, z, t) \in V_1 \cap V_2$ com menor tempo t , como descreveremos a seguir. O ponto inicial da colisão está relacionado a problemas de robótica e animação.

- No ponto de colisão de dois objetos em 3D observamos que as normais serão paralelas (ver figura 5.14).

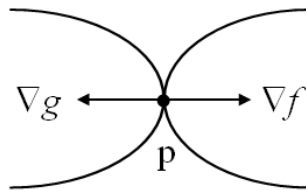


Figura 5.14: Ponto de colisão

Portanto, no modelo 4D buscamos no conjunto $V_1 \cap V_2$ o ponto onde as normais projetadas em (x, y, z) são paralelas, ou seja:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \alpha \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) \tag{5-5}$$

A solução dessa equação juntamente com a determinação de $V_1 \cap V_2$ corresponde a um sistema de equações não-lineares. Para resolver esse problema observe que a solução procurada satisfaz

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_x & n_y & n_z & n_w \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial w} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

pois

$$n_x \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} \right) - n_y \left(\frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \right) + n_z \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

e o ponto inicial de colisão satisfaz a equação acima, anulando cada uma das parcelas.

O determinante acima corresponde a curva silhueta da superfície S para um observador em $(x, y, z, 0)$. O ponto inicial de contato é o ponto sobre a curva silhueta com menor tempo t .

No exemplo a seguir considere um cilindro e uma esfera, ambos de raio 1, com seus centros nos eixos x e z , respectivamente:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + (z + t)^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

O cilindro está fixo e a esfera está se movendo sobre o eixo z de acordo com o tempo t (ver figura 5.15 (a)). Na figura 5.15 (b) ilustramos a curva silhueta (vermelha) que representa a interseção do cilindro fixo com a esfera em movimento. O primeiro ponto de colisão está destacado em azul e corresponde a $\mathbf{p}(0, 0, 1, -2)$, cujo tempo $t = -2$.

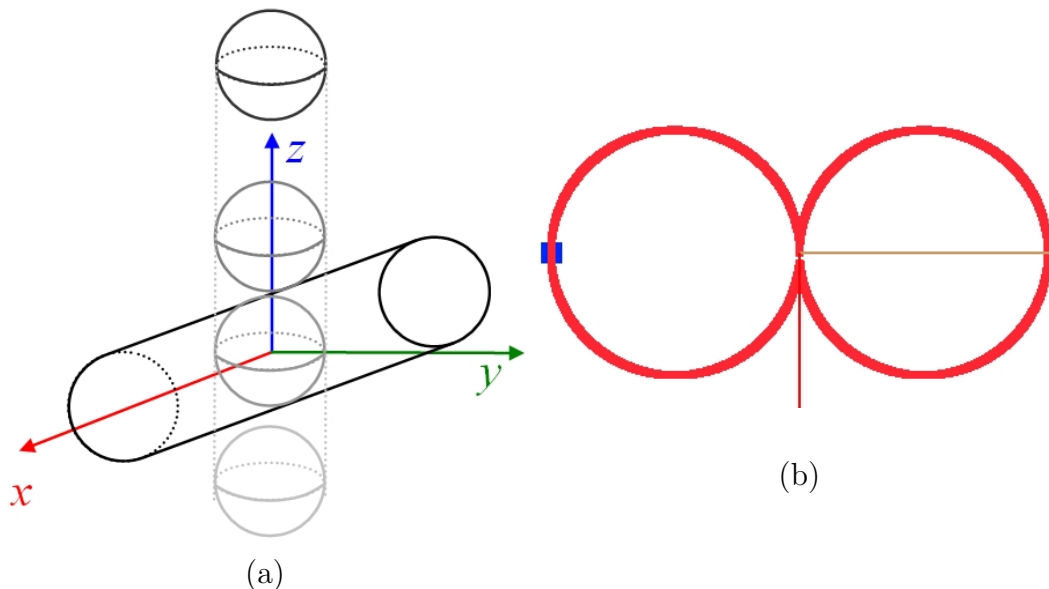


Figura 5.15: Colisão entre um cilindro fixo e uma esfera em movimento, ambos com o mesmo raio.

Agora considere um cilindro de raio 1 e uma esfera de raio 1.2, com seus

centros nos eixos x e z , respectivamente:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - 1 & = 0 \\ x^2 + y^2 + (z + t)^2 - 1,44 & = 0 \end{cases}$$

Assim como no exemplo anterior, o cilindro está fixo e a esfera está se movendo sobre o eixo z de acordo com o tempo t (ver figura 5.16 (a)). Na figura 5.16 (b) ilustramos a curva silhueta (vermelha) que representa a interseção do cilindro fixo com a esfera em movimento. O primeiro ponto de colisão está destacado em azul e corresponde a $\mathbf{p}(0, 0, 1, -2.2)$, no tempo $t = -2, 2$.

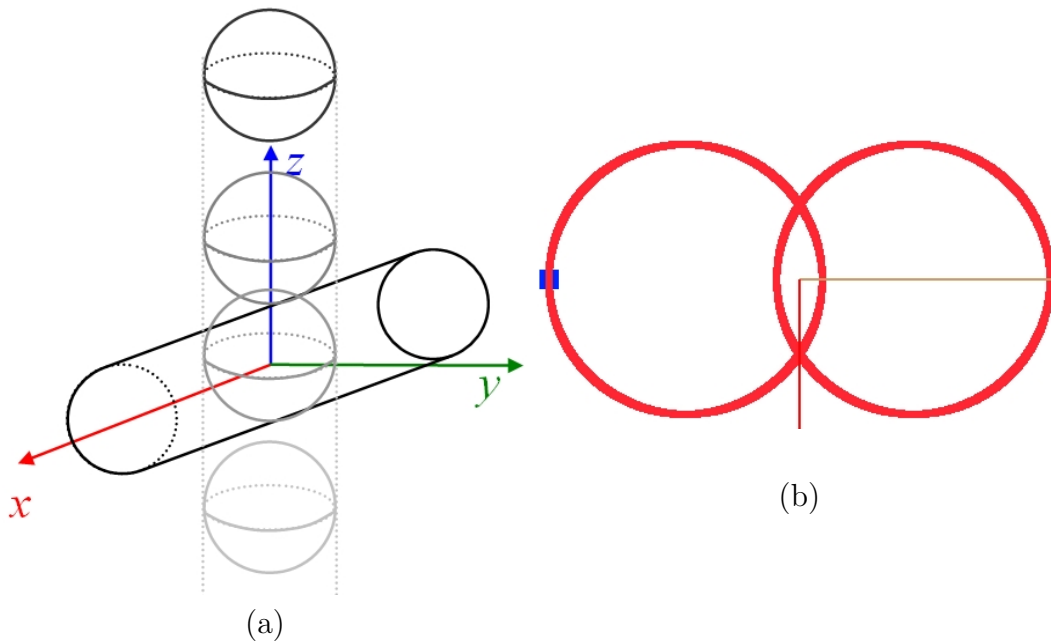


Figura 5.16: Colisão entre um cilindro fixo e uma esfera em movimento.

Considere um cilindro de raio 1 e uma esfera de raio 0.7, com seu centro no eixo z :

$$\begin{cases} (y - 0, 2t)^2 + z^2 - 1 & = 0 \\ x^2 + y^2 + (z + t)^2 - 0,49 & = 0 \end{cases}$$

O cilindro e a esfera estão ambos em movimento sobre os eixos y e z , respectivamente, de acordo com o tempo t conforme ilustra a figura 5.17 (a). A figura 5.17 (b) ilustra a curva silhueta (vermelha) que representa a interseção do cilindro com a esfera, ambos em movimento e o primeiro ponto de colisão entre eles que está destacado em azul e corresponde a $\mathbf{p}(0, -0.14, 0.98, -1.67)$, cujo tempo $t = -1, 67$.

No exemplo seguinte considere duas esferas com raio 1 e 0,7, respectiva-

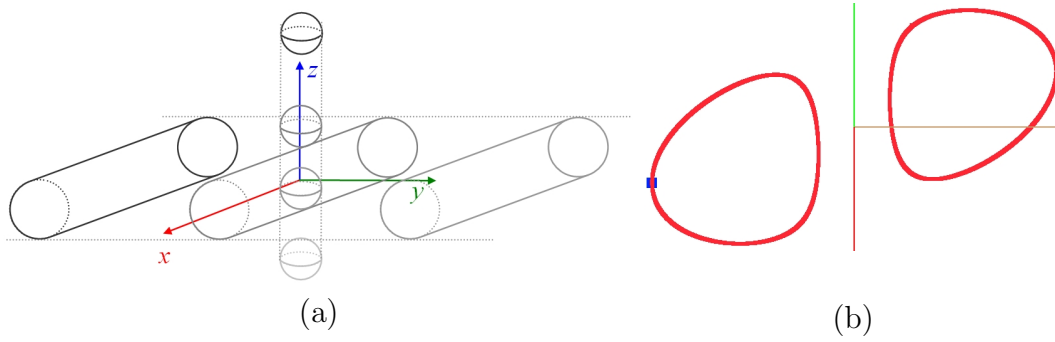


Figura 5.17: Colisão entre um cilindro e uma esfera, ambos em movimento.

mente, com seus centros no eixo z :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z + t)^2 - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + (z + 2t)^2 - 0,49 = 0 \end{cases}$$

movendo-se sobre esse mesmo eixo em velocidades diferentes de acordo com o tempo t (ver figura 5.18 (a)). A figura 5.18 (b) ilustra a curva silhueta (vermelha) que representa a interseção das duas esferas em movimento e o primeiro ponto de colisão entre elas que está destacado em azul e corresponde a $\mathbf{p}(0, 0, 2.7, -1.7)$, cujo tempo $t = -1,70$.

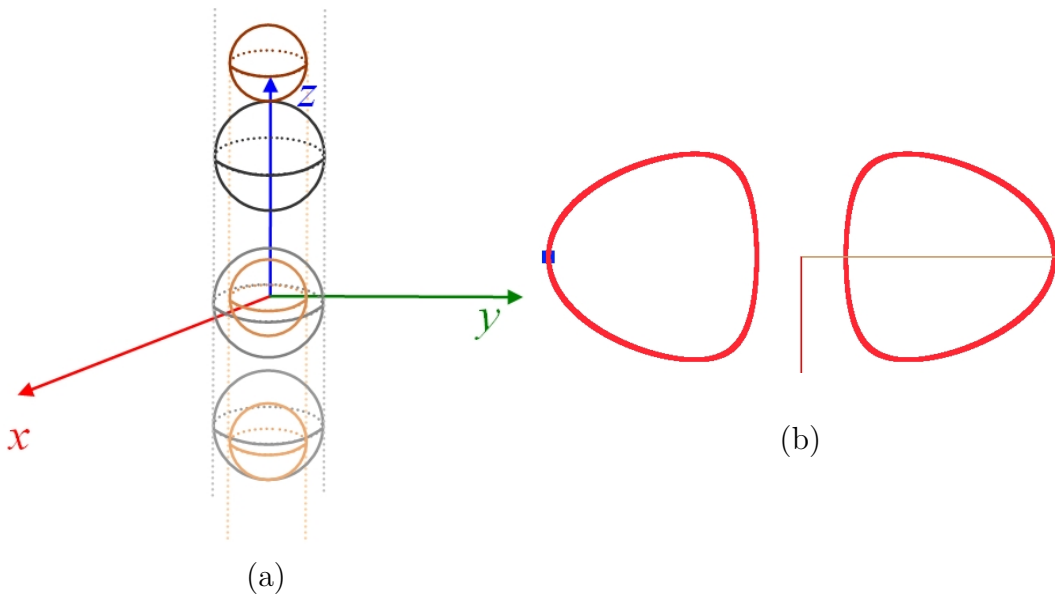


Figura 5.18: Colisão entre duas esferas em movimento.

5.3

Curva *offset*

Uma aplicação de curvas silhuetas que destacaremos nessa seção será a geração de curvas *offset*. Existe uma relação direta entre essas curvas que permite aplicar o algoritmo proposto de silhueta para *offset*.

Informalmente descrevemos uma curva *offset* no plano como uma curva com distância constante r da curva original, tomado na direção normal.

Mais precisamente, dada uma curva implícita $f(x, y) = 0$ em \mathbb{R}^2 , sua curva *offset* com distância $r > 0$ pode ser formulada pelo método do envelope (10, 19) como o conjunto de equações:

$$\begin{aligned} g: & \quad (x - z)^2 + (y - w)^2 - r^2 = 0 \\ & \quad \quad \quad f(z, w) = 0 \\ C: & \quad \quad \quad \nabla_{z,w}g \cdot \bar{\mathbf{t}} = 0 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \nabla_{z,w}g &= \left(\frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial w} \right)^t \\ \bar{\mathbf{t}} &= \left(\frac{\partial f}{\partial w}, -\frac{\partial f}{\partial z} \right)^t \end{aligned}$$

A figura 5.19 ilustra um exemplo do método descrito acima.

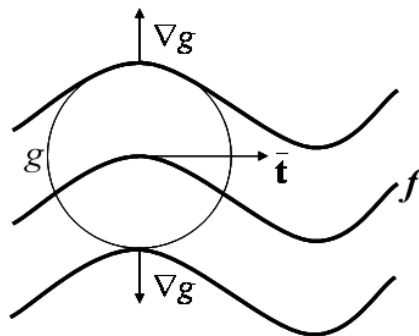


Figura 5.19: Curva *offset* através do método do envelope.

Uma característica das curvas *offsets* é que elas podem ter cúspides ou auto-interseções no plano. Se consideramos a geração da curva em dimensões superiores essas singularidades podem desaparecer.

Seguindo (10) utilizaremos a curva silhueta para gerar a curva *offset*. Para estabelecer a relação entre essas curvas, observamos que $V_1 = g^{-1}(0)$ e $V_2 = f^{-1}(0)$ são tais que $S = V_1 \cap V_2$ é uma superfície no \mathbb{R}^4 .

Se $\mathbf{p}(x, y, z, w) \in S$ então as normais em \mathbf{p} são

$$n_1 = \nabla g(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial g}{\partial w} \right)$$

$$n_2 = \nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial w} \right)$$

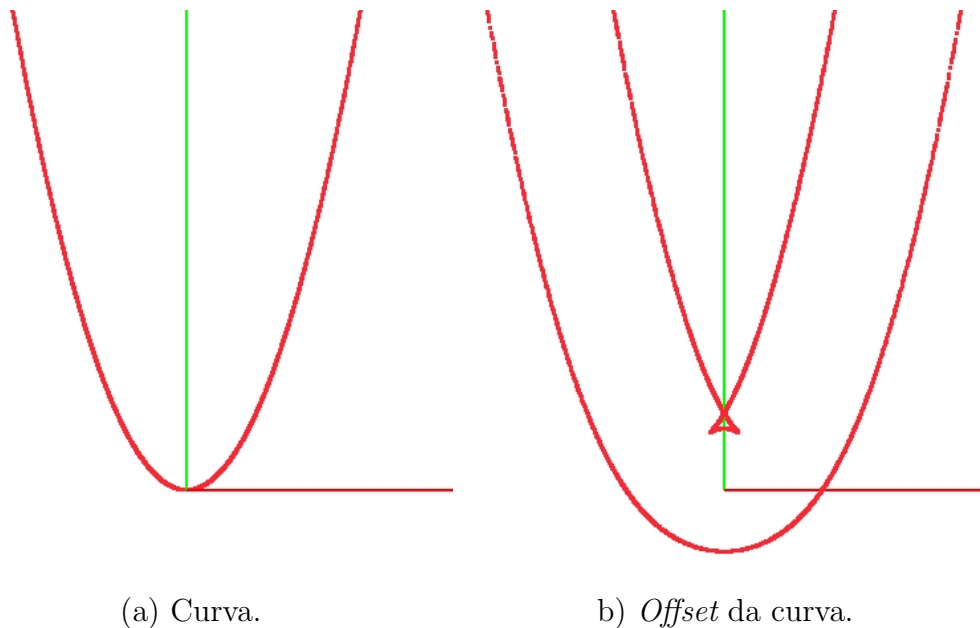
Dessa forma a condição C corresponde a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ 0 & 0 & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{vmatrix} = 0.$$

Conforme a definição 4.1.1, a curva *offset* corresponde a curva silhueta da superfície S se considerarmos os observadores $\mathbf{e}_1 = (0, 0, 0, 1)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1, 0)$.

Para gerar a curva *off-set* das curvas nos exemplos a seguir, utilizamos o mesmo método para gerar a curva silhueta de superfícies definidas implicitamente como descrito na subseção 4.1. Em todos os exemplos utilizamos a distância $r = 1$. A seguir alguns resultados obtidos.

A figura 5.20 (a) mostra a curva $w - z^2 = 0$ em \mathbb{R}^2 e (b) mostra a sua curva *offset*. Observe que a curva *offset* superior tem cúspides e auto-interseção.



(a) Curva.

b) *Offset* da curva.

Figura 5.20: $f(z, w) = w - z^2$.

A figura 5.21 (a) mostra um exemplo típico de uma curva cúbica cuspidal (singular), definida por $w^2 - z^3 = 0$ em \mathbb{R}^2 , que apresenta um ponto singular em $(0, 0)$. E a figura 5.21 (b) mostra a sua curva *offset*.

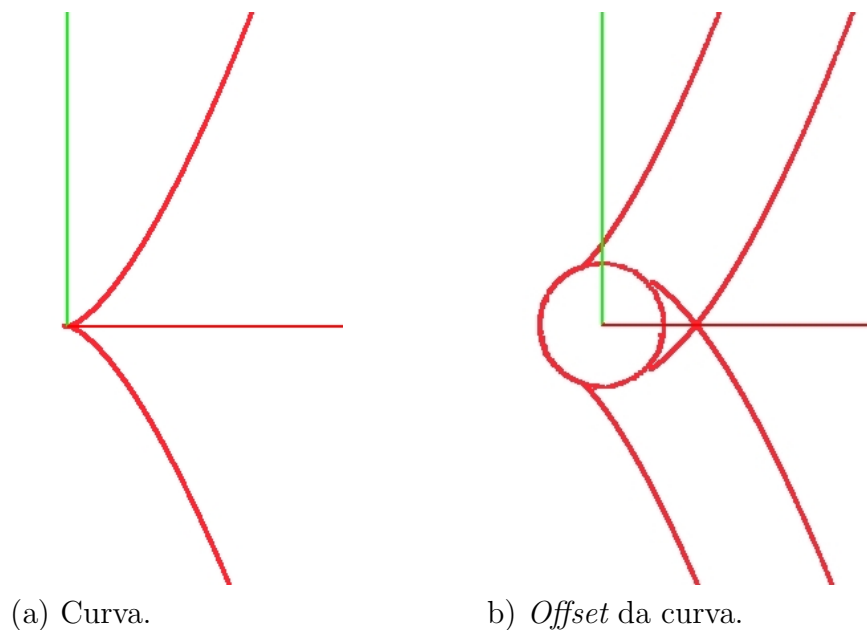


Figura 5.21: $f(z, w) = w^2 - z^3$.

A figura 5.22 (a) mostra a curva $z^2 - w^2 - 1 = 0$ em \mathbb{R}^2 e (b) mostra a sua curva *offset*.

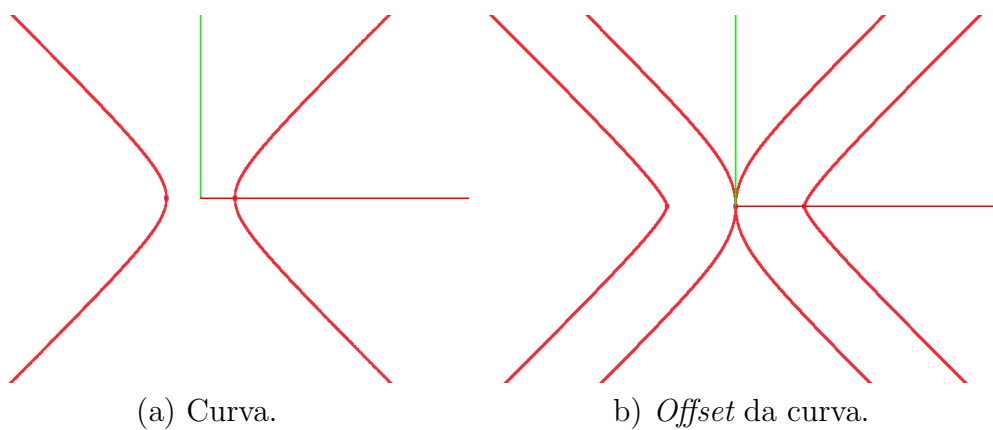
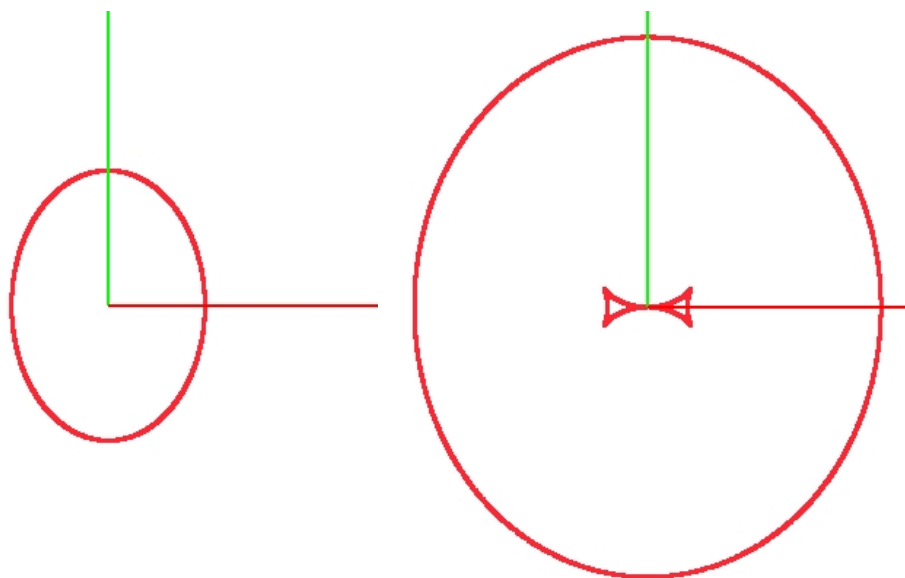


Figura 5.22: $f(z, w) = z^2 - w^2 - 1$.

A figura 5.23 (a) ilustra a curva $2z^2 + w^2 - 1 = 0$ em \mathbb{R}^2 e (b) mostra a sua curva *offset*, com auto-interseção na curva mais interna.

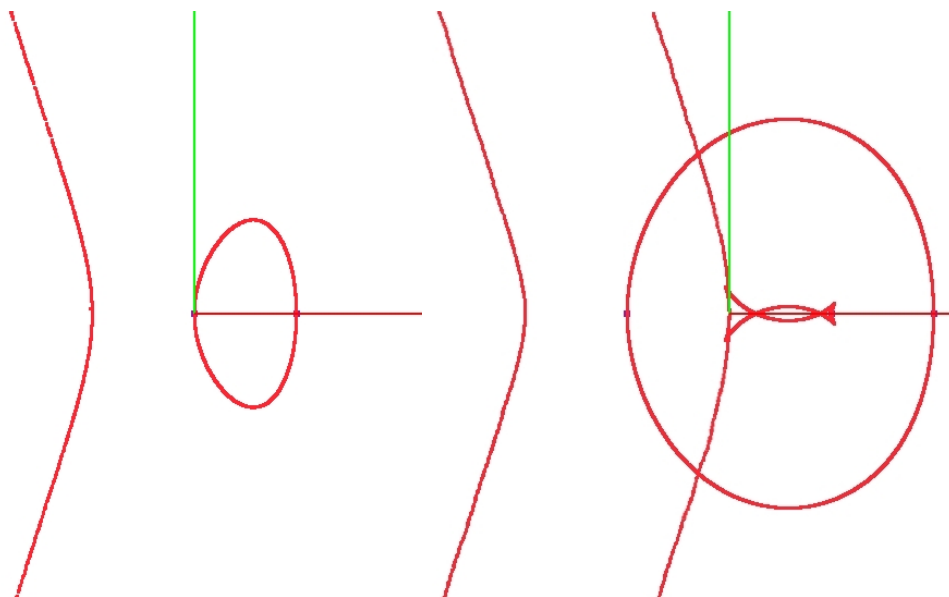


(a) Curva.

b) *Offset* da curva.

Figura 5.23: $f(z, w) = 2z^2 + w^2 - 1$.

A figura 5.24 (a) ilustra a curva $4w^2 - 9(z - z^3) = 0$ em \mathbb{R}^2 e (b) mostra a sua curva *offset*, também com auto-interseção na curva mais interna.



(a) Curva.

(b) *Offset* da curva.

Figura 5.24: $f(z, w) = 4w^2 - 9(z - z^3)$.

5.4 Interface gráfica

Os métodos de aproximação da curva silhueta foram implementados na linguagem de programação $C++$, utilizando a biblioteca GSL para a parte numérica e a biblioteca $OpenGL$ para a parte gráfica.

Criamos uma interface gráfica (ver figura 5.25) através da $GLUI$ que consiste de uma janela principal e de uma janela secundária.

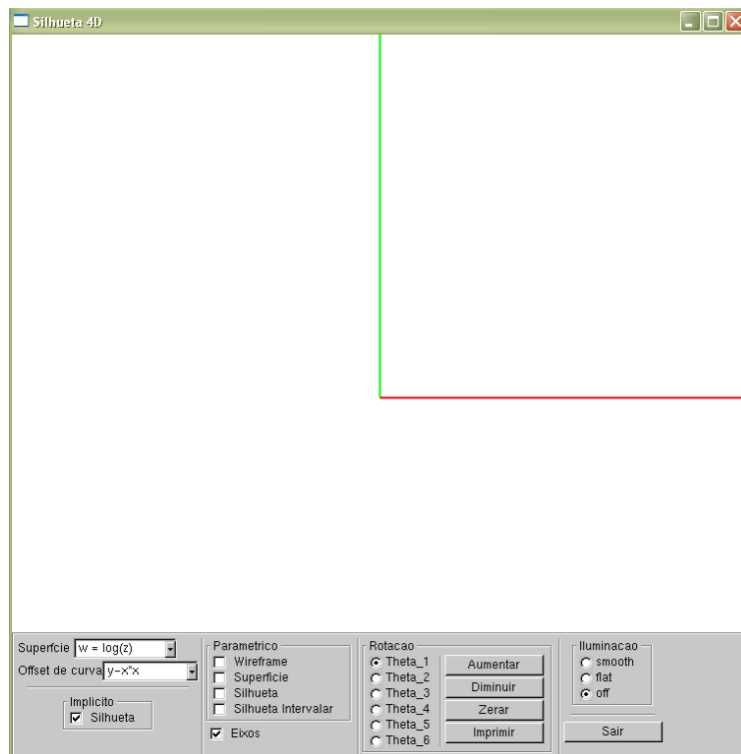


Figura 5.25: Interface gráfica.

Nessa interface, o usuário pode visualizar o objeto, bem como interagir com ele, rotacionando-o com o botão direito do *mouse* através dos ângulos de Euler em 3D (ver 3.1.1), na janela principal. Já na janela secundária, existem comandos para que o usuário possa escolher o tipo de objeto a ser visualizado: silhueta de uma superfície na forma implícita ou na forma paramétrica, superfície na forma paramétrica, *offset* de curva, iluminação, e também escolher o ângulo que deseja utilizar para rotacionar o objeto em 4D através dos ângulos de Euler (ver 3.1.2).