

Referências Bibliográficas

- [1] ATHERINO, R. S. **Estimação de Reservas IBNR por Modelos em Espaço de Estado: Empilhamento por Linhas do Triângulo Runoff**. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), 2008.
- [2] ATHERINO, R. S.; FERNANDES, C. A. C. **Um modelo em espaço de estado para estimação de reservas IBNR**. Revista Brasileira de Risco e Seguro, p. 93–109, 2007.
- [3] BURGESS, C. J. C. **A tutorial on support vector machines for pattern recognition**. Data Mining and Knowledge Discovery, 2:121–167, 1998 (document).
- [4] CASELLA, G.; BERGER, K. L. **Statistical Inference**. Duxbury, 2002.
- [5] CRISTIANINI, N.; SHAWE-TAYLOR, J. **An Introduction to Support Vector Machines and Other Kernel-based Learning Methods**. Cambridge University Press, 2000.
- [6] DE JONG, P. **Forecasting general insurance liabilities**. Department of Actuarial Studies Reserch Series, 2004.
- [7] DIAS, M. S. **O uso de máquina de suporte vetorial para regressão SVR na estimação da estrutura a termo da taxa de juros do brasil**. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), 2007.
- [8] EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. **An Introduction to the Bootstrap**. Chapman and Hall, 1993.
- [9] ENGLAND, P. D.; VERRALL, R. J. **Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving**. Insurance: Mathematics and Economics, 25:281–293, 1999.
- [10] ENGLAND, P. D.; VERRALL, R. J. **Stochastic claims reserving in general insurance**. British Actuarial Journal, 8:281–293, 2002.

- [11] FUNENSEG. **Dicionário de Seguros - Escola Nacional de Seguros**, 2010.
- [12] GESSANN, M. **The Chain Ladder package for R**, 2008.
- [13] GUJARATI, D. **Econometria Básica**. Campus/Elsevier, 2006.
- [14] GUNN, S. R. **Support vector machines for classification and regression**. Technical report, Faculty of Engineering, Science and Mathematics School of Eletronics and Computer Science, 1998.
- [15] HERBST, T. **An application of randomly truncated data models in reserving IBNR claims**. Insurance: Mathematics and Economics, 25 (2):123–131, 1999.
- [16] KARATZOGLOU, A.; SMOLA, A. **Kernlab - An S4 package for kernel methods in R**, 2004.
- [17] KREMER, E. **IBNR claims and the two-way model of ANOVA**. Scandinavian Actuarial Journal, p. 47–55, 1982.
- [18] KUBRUSLY, J. **Métodos estatísticos para cálculo de reservas**. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), 2005.
- [19] KUBRUSLY, J. **Regressão Construtiva por Regiões Definidas Implicitamente**. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), 2009.
- [20] KUBRUSLY, J.; DIAS, M.; LAGE, M. ; LOPES, H. **A hybrid chain ladder and gaussian process regression method for IBNR estimation**. Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance, 4th BSMIF:Contributed Paper, 2009.
- [21] KUBRUSLY, J.; LOPES, H. ; ÁLVARO VEIGA. **Um método probabilístico para cálculo de reserva do tipo IBNR**. Revista Brasileira de Risco e Seguro, 4(7):17–46, 2008.
- [22] LOWE, J. **A practical guide to measuring reserve variability using: Bootstrapping, operational time and a distribution free approach**. General Insurance Convention, 1994.
- [23] MACK, T. **A simple parametric model for rating automobile insurance or estimating IBNR claims reserves**. Austin Bulletin, 22(1):93–109, 1991.

- [24] MACK, T. **Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates.** Austin Bulletin, 23(3)(76):443–518, 1993.
- [25] MACK, T. **Which stocastic model is underlying the chain ladder method?** Insurance: Mathematics and Economics, 15(2-3):133–138, 1994.
- [26] RASMUSSEN, C. E.; WILLIAMS, C. K. I. **Gaussian Processes for Machine Learning.** Springer, 2006.
- [27] RENSHAW, A. E. **Chain ladder and interactive modelling (claims reserving and GLIM).** Journal of the Institute for Actuaries, 116(III):559–587, 1989.
- [28] RENSHAW, A. E.; VERRALL, R. J. **A stochastic model underlying the chain ladder technique.** British Actuarial Journal, 4(4):903–923(21), 1998.
- [29] SMOLA, A. J.; SCHÖLKOPF, B. **A tutorial on support vector regression.** Statistics and Computing, 14(3):199–222, 2003.
- [30] TARBELL, T. F. **Incurred but not reported claim reserve.** Casualty Actuarial Society Forum, Spring, 20:Parte II, 1934.
- [31] VAPNIK, V. **Statistical Learning Theory.** Wiley, 1998.
- [32] VERRALL, R. J. **Chain ladder and maximum likelihood.** Journal of the Institute of Actuaries, 18(III):489–499, 1991b.
- [33] VERRALL, R. J. **Statistical methods for the chain ladder technique.** Casualty Actuarial Society Forum, Spring, p. 393–446, 1994.
- [34] WASSERMAN, L. **All of Statistics: A Concise Course in Statistical Inference.** Springer, 2003.
- [35] WÜTHRICH, M. V.; MERZ, M. **Stochastic claims reserving methods in insurance.** Wiley Finance, 2008.

A

Primeiro Apêndice

A.1

Passo-a-Passo do Modelo Bootstrap Chain Ladder

O procedimento *bootstrapping* realizado no modelo apresentado no Capítulo 3 segue os seguintes passos:

1. Obtenha os fatores de crescimento \hat{f}_j por meio do *Chain Ladder* padrão.
2. Obtenha valores ajustados para o triângulo acumulado (superior) por meio de uma fórmula recursiva, mantendo os valores da diagonal principal, de acordo com:

$$\hat{A}_{i,n-i+1} = A_{i,n-i+1} \text{ e } \hat{A}_{i,j} = A_{i,j-1} * \hat{f}_j. \quad (\text{A-1})$$

3. Obtenha os valores ajustados para os dados incrementais, $\hat{m}_{i,j}$, para um novo triângulo (superior) por meio de diferenças.
4. Calcule os resíduos de Pearson (sem escala) para este triângulo usando a fórmula:

$$r_{i,j}^{(P)} = \frac{I_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{\hat{m}_{i,j}}} \quad (\text{A-2})$$

5. Calcule o parâmetro escalar de Pearson, isto é, o quadrado da soma dos resíduos de Pearson dividido pelos graus de liberdade, onde o grau de liberdade é o número de observações menos o número de parâmetros estimados.

$$\phi = \frac{\sum_{i,j=n-i+1} (r_{i,j}^{(P)})^2}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1} \quad (\text{A-3})$$

6. Ajuste os resíduos de Pearson para corrigir a inclinação usando uma abordagem analítica.

$$r_{i,j}^{ajust} = \sqrt{\frac{n}{\frac{1}{2}n(n+1) - 2n + 1}} * r_{i,j}^{(P)} \quad (\text{A-4})$$

7. Após este procedimento, inicia-se o “laço” iterativo que será repetido N vezes ($N=999$):
- “Reamostrre” os resíduos “ajustados”, com reposição, criando assim um novo triângulo inicial de resíduos;
 - Para cada entrada (i, j) deste triângulo encontre $I_{i,j} = \hat{m}_{i,j} + \sqrt{\hat{m}_{i,j}} * r_{i,j}^{(ajust)}$, criando assim um conjunto de pseudo-incrementos para o triângulo “inicial”;
 - Crie o pseudo-triângulo (superior) acumulado a partir desses incrementos;
 - Por meio do *Chain Ladder* padrão, calcule os fatores de desenvolvimento para esses pseudo-dados acumulados preenchendo assim o triângulo (inferior);
 - Obtenha novamente um triângulo “futuro” de incrementos que serão usados como médias na simulação do processo de distribuição;
 - Para cada (i, j) do triângulo futuro (inferior) simule um pagamento do processo de distribuição com média $\tilde{m}_{i,j}$ e variância $\phi\tilde{m}_{i,j}$.
 - Some os valores simulados no triângulo futuro (inferior) por anos de origem e reserva total;

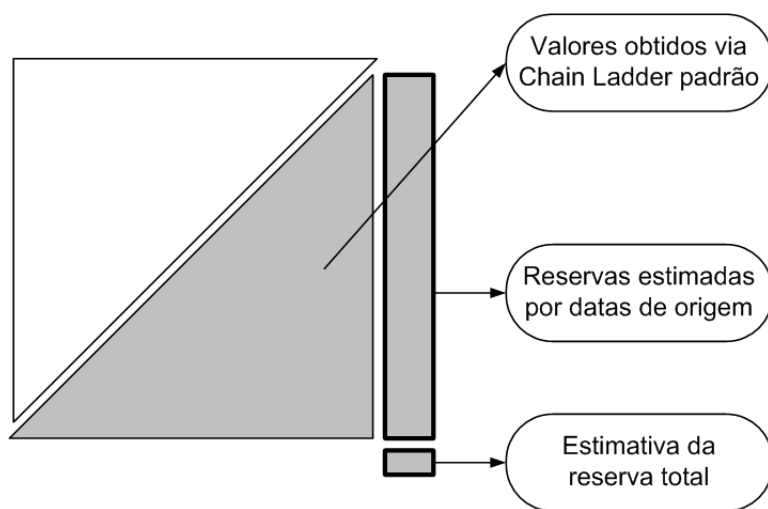


Figura A.1: Reserva estimada via Bootstrap Chain Ladder.

- Armazene os resultados e retorne ao “laço”.

O conjunto dos N resultados armazenados formam a distribuição prevista para as reservas. A média dos resultados deve ser comparada com as estimativas geradas pela técnica *Chain Ladder* padrão para checar erros. O desvio padrão dos dados armazenados fornece uma estimativa para o erro de previsão.

B Segundo Apêndice

B.1 Pseudo-Código para Implementação do Método Híbrido

O pseudo-código apresentado neste apêndice contempla uma implementação para duas variáveis de entrada e o processo de aprendizado dos resíduos é feito tanto por GPR quanto por SVR.

RT \leftarrow ABC #triângulo de desenvolvimento com dados iniciais

n \leftarrow número de linhas de RT

Procedimento para formar o triângulo acumulado inicial.

```
C := matrizn×n
for (i de 1 a n) {
  for (j de 1 a n) {
    if (j ≤ n-i+1)
      C[i,j] ← RT[i,j] else C[i,j] ← NA
  }
}
```

Procedimento para formar o triângulo incremental inicial.

```
I:= matrizn×n
for (k de 1 a n){
  I[k,1]← RT[k,1]
}
for (i de 1 a n)) {
  for (j de 2 a n) {
    if (j ≤ n-i+1)
      I[i,j] ← RT[i,j]- RT[i,j-1] else I[i,j] ← NA
  }
}
```

Procedimento para formar o triângulo acumulado que servirá de base para o procedimento do método híbrido.

```

A := matrizn×n
for (k de 1 a n){
  A[k,1] ← I[k,1]
}
for (i de 1 a n) {
  for (j de 2 a n) {
    if (j ≤ n-i+1)
      A[i,j] ← A[i,j-1] + I[i,j] else A[i,j] ← NA
  }
}

```

Cálculo dos fatores de crescimento.

```

f := vetor de tamanho n
for (j de 1 a (n-1)) {
  sa ← 0; sb ← 0
  for (i de 1 a (n-j)) {
    sa ← sa + TA[i,j]
    sb ← sb + TA[i,j+1]
  }
  f[j] ← sb/sa
}
f[n] ← 1

```

Procedimento para preencher as entradas desconhecidas da matriz $A_{n \times n}$.

```

for (de 2 a n) {
  fcl ← 1.0
  for (j de (n-i+1) a n){
    fcl ← fcl * f[j]
    if (j+1 ≤ n) A[i,j+1] ← A[i,n-i+1] * fcl
  }
}

```

Procedimento para estimar a função dos resíduos.

```

l ←  $\frac{(n^2)-(5n)+6}{2}$ 
X := matrizl×2
Y := vetor de tamanho l
m ← 0

```

```

for (i de 2 a (n-2)) {
  for (j de 2 a (n-i)) {
    m ← m+1
    X[m,1] ← (TA[i-1,j+1]/TA[i-1,j])/f[j]
    X[m,2] ← (TA[i,j]/TA[i,j-1])/f[j-1]
    Y[m] ← (TA[i,j+1]/TA[i,j])/f[j]
  }
}
MGPR ← gausspr(X,Y) (Aprendizado via processo gaussiano para regressão)
MSVR ← ksvm(X,Y, type = “eps-svr”, kernel = “rbfdot”) (Aprendizado via máquina de suporte vetorial para regressão)

```

Procedimento para estimar a triângulo com o Método Híbrido

$CC_1 \leftarrow TA$ (triângulo acumulado a ser preenchido via GPR)

$CC_2 \leftarrow TA$ (triângulo acumulado a ser preenchido via SVR)

$Z_1 :=$ vetor de tamanho 2

$Z_2 :=$ vetor de tamanho 2

```

for (i de 2 a (n-2)) {
  for (j in (n-i+1):(n-1)){
     $Z_1 \leftarrow CC_1 [i-1,j+1] / CC_1 [i-1,j])/f[j]$ 
     $Z_1 \leftarrow CC_1 [i,j] / CC_1 [i,j-1])/f[j-1]$ 
     $Z_2 \leftarrow CC_2 [i-1,j+1] / CC_2 [i-1,j])/f[j]$ 
     $Z_2 \leftarrow CC_2 [i,j] / CC_2 [i,j-1])/f[j-1]$ 
     $Res_1 \leftarrow \text{predict}(MGPR, Z_1)$ 
     $Res_2 \leftarrow \text{predict}(MSVR, Z_2)$ 
     $CC_1[i,j+1] \leftarrow CC_1[i,j+1]*f[j] + Res_1$ 
     $CC_2[i,j+1] \leftarrow CC_2[i,j+1]*f[j] + Res_2$ 
  }
}

```

Procedimento para calcular a reserva IBNR com o Metodo Híbrido

$IBNR_{gpr} \leftarrow 0$

$IBNR_{svr} \leftarrow 0$

```

for (i de 2 a n)
   $IBNR_{gpr} \leftarrow IBNR_{gpr} + CC_1[i,n] - CC_1[i,n-i+1]$ 
   $IBNR_{svr} \leftarrow IBNR_{svr} + CC_2[i,n]^2 - CC_2[i,n-i+1]$ 
}

```



```
# Procedimento para calcular a reserva IBNR real
IBNRreal ← 0
for (i dei 2 a n) {
  IBNRreal ← IBNRreal + RT[i,n] - RT[i,n-i+1]
}
```