



**Jocélia Abreu Barcellos Vargas**

**Um Método Híbrido para o Cálculo de Reservas do Tipo IBNR**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Hélio Côrtes Vieira Lopes  
Co-Orientador: Prof. Cristiano A. C. Fernandes

Rio de Janeiro  
Março de 2011



**Jocélia Abreu Barcellos Vargas**

**Um Método Híbrido para o Cálculo de Reservas do Tipo IBNR**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Hélio Côrtes Vieira Lopes**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Jéssica Quintanilha Kubrusly**

Instituto de Estatística – UFF

**Dr. Rodrigo Simões Atherino**

JGP – Global Gestão de Recursos

**José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do

Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 18 de Março de 2011

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Jocélia Abreu Barcellos Vargas**

Graduou-se em Matemática pela Universidade Federal do Espírito Santo - UFES.

Ficha Catalográfica

Vargas, Jocélia Abreu Barcellos

Um Método Híbrido para o Cálculo de Reservas do Tipo IBNR / Jocélia Abreu Barcellos Vargas; orientador: Hélio Côrtes Vieira Lopes; co-orientador: Cristiano A. C. Fernandes. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departamento de Matemática, 2011.

85 f: il. ; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Teses. 2. Provisão de Reservas do tipo IBNR. 3. Estatística. 4. Probabilidade. 5. Matemática Atuarial. 6. Aprendizagem Estatística. 7. Máquina de Suporte Vetorial para Regressão. 8. Regressão por Processos Gaussianos. I. Lopes, Hélio. II. Fernandes, Cristiano. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Um Método Híbrido para Cálculo de Reserva do Tipo IBNR.

CDD: 510

## Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, pela vida, pela saúde, pelo ânimo, pela oportunidade, por me levantar nos momentos de queda, por estar ao meu lado nos momentos de fraquezas, dúvidas e alegrias e por sempre iluminar e orientar meus caminhos.

Ao professor Hélio Côrtes Vieira Lopes pela orientação, comentários, críticas, sugestões, e sobretudo paciência e incentivo durante todo o trabalho.

Aos meu amados pais, José Faustino e Célia pelo incentivo, suporte, amor incondicional e por me ensinarem a seguir sempre da direção do bem com dignidade.

Ao meu também amado marido, Ricardo, pelo companheirismo, apoio nos momentos de ansiedade, incentivo constante, paciência diária, pelas observações constantes no texto da dissertação e na parte computacional, mas sobretudo pelo carinho.

Aos meus queridos irmãos, Fabiano e Murilo, pela disponibilidade em me atender, por me apoiarem, pelo afeto e por estarem ao meu lado em todos os momentos de minha vida.

A toda minha família, tios, primos, sobrinho e amigos, por estarem sempre participando da minha vida e que de forma direta ou indireta, me ajudaram muito nessa etapa, em especial a Adriano José, Danielle, Elisângela e Pedro José pelas hospedagens e momentos de descontração.

Ao professor Cristiano Augusto C. Fernandes do Departamento de Engenharia Elétrica da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, pelos valiosos comentários e disponibilidade em atendimento nos momentos de dúvidas.

Ao professor Tara Keshar Nanda Baidya do Departamento Engenharia Industrial da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro pelas aulas que foram de fundamental importância durante o trabalho, pela compreensão e paciência.

À Jéssica Quintanilha Kubrusly pela ajuda na obtenção de referências bibliográficas e disponibilidade dos dados para simulações.

Aos professores do Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, pela disponibilidade em tirar dúvidas, pelas aulas e o incentivo aos estudos, em especial a Sinésio Pesco e Thomas Lewiner.

Aos funcionários da secretaria do Departamento de Matemática da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Creuza Nascimento, Katia Beatriz Aguiar, Orlando Nascimento e Otávio Barros pelo carinho, atenção e pela colaboração diária.

A todos colegas do laboratório, pela companhia, pelos momentos únicos de estudo e de convivência. As risadas e conversas na cozinha, os grupos de estudos que antecederam as provas e trabalhos foram muito especiais. Em especial agradeço a Andréa Lins, João Paixão, Leandro Souza, Luana Sá, Renata Thomaz e Rogério Almeida pela ajuda nas disciplinas, na produção escrita e o incentivo ao meu desenvolvimento na parte computacional. Também agradeço aos colegas que fiz no Departamento de Engenharia Industrial durante as disciplinas que lá cursei.

À PUC - Rio, CAPES e CNPQ, pela oportunidade de cursar o Mestrado, pelo incentivo à pesquisa e pelo importante auxílio financeiro durante o programa de mestrado.

## Resumo

Vargas, Jocélia Abreu Barcellos; Lopes, Hélio; Fernandes, Cristiano.  
**Um Método Híbrido para o Cálculo de Reservas do Tipo IBNR.** Rio de Janeiro, 2011. 85p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Nesta dissertação são apresentados métodos para a previsão ou cálculo de previsão de reservas do tipo IBNR (*Incurred But Not Reported*), ou seja, a provisão para sinistros ocorridos e não avisados às seguradoras no momento em que ocorreram. Os métodos apresentados são baseados em dados dispostos em um *triângulo de desenvolvimento* e na técnica *Chain Ladder*. Neste trabalho é também apresentado um novo modelo híbrido não-paramétrico, derivado do modelo híbrido desenvolvido por *Kubrusly et al.* em (20), cujo objetivo é melhorar a estimativa da provisão IBNR realizada pelo método *Chain Ladder*. A eficiência do novo modelo é verificada por meio de simulações utilizando a técnica de *bootstrap*.

### Palavras-chave

Provisão de Reservas do tipo IBNR; Estatística; Probabilidade; Matemática Atuarial; Aprendizagem Estatística; Máquina de Suporte Vetorial para Regressão; Regressão por Processos Gaussianos;

## Abstract

Vargas, Jocélia Abreu Barcellos; Lopes, Hélio(advisor); Fernandes, Cristiano(co-advisor). **A Hybrid Method for IBNR Reserves Estimation.** Rio de Janeiro, 2011. 85p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This thesis presents methods to estimate IBNR (*Incurred But Not Reported*) reserves, i.e. provision for claims incurred but not reported to insurance companies when they occurred. These methods are based on *runoff triangle* data and *Chain Ladder* technique. In this work, it is also presented a new non-parametric hybrid model adapted from a hybrid method developed by Kubrusly et al. in (20). The objective is to improve the estimation of IBNR reserves obtained with the *Chain Ladder* technique. Finally, the efficiency of the new model is verified through simulations using the *bootstrap* technique.

### Keywords

IBNR Reserves; Statistics; Probability; Actuarial Mathematics; Statistical Learning; Support Vector Regression; Gaussian Process Regression;

# Sumário

1	Introdução	<b>13</b>
1.1	Motivação	14
1.2	Trabalhos Relacionados	15
1.3	Contribuições	15
1.4	Organização	16
2	Provisão de Reservas IBNR - Conceitos Básicos	<b>17</b>
2.1	Organização dos Dados	17
2.2	Notação Utilizada	18
2.3	Método de Estimação <i>Chain Ladder</i>	19
3	Modelos para o Cálculo de IBNR	<b>22</b>
3.1	O Método de Mack	22
3.2	Método Bootstrap Chain Ladder	25
4	Aproximação de Funções	<b>35</b>
4.1	Um Breve Comentário sobre Aprendizagem Estatística	36
4.2	Máquinas de Suporte Vetorial	37
4.3	Processo Gaussiano	51
4.4	SVR e GPR no software R	57
5	Um Modelo Híbrido para Cálculo de IBNR	<b>59</b>
5.1	O Modelo Híbrido	59
5.2	Comparações e resultados	64
6	Procedimento Bootstrapping	<b>72</b>
6.1	Bootstrapping	72
6.2	Análise de Desvio padrão via <i>Bootstrapping</i>	73
7	Conclusão	<b>76</b>
	Referências Bibliográficas	<b>77</b>
A	Primeiro Apêndice	<b>80</b>
A.1	Passo-a-Passo do Modelo <i>Bootstrap Chain Ladder</i>	80
B	Segundo Apêndice	<b>82</b>
B.1	Pseudo-Código para Implementação do Método Híbrido	82



## Lista de figuras

2.1	Triângulo da matriz $C$ cujas entradas devem ser estimadas para o cálculo das reservas.	18
3.1	Etapas do procedimento <i>Bootstrapping</i> para cálculo de reservas. (22).	30
4.1	Máquina de suporte vetorial. (31)	38
4.2	Hiperplano linear de separação ótima para (a) dados linearmente separáveis e (b) dados não separáveis e os respectivos vetores suporte (circulados). (3)	39
4.3	Modelos de Funções de Perda.(14)	41
4.4	A esquerda estão representadas variáveis de folga para regressão linear unidimensional com função $\varepsilon$ -insensível. A direita uma situação análoga para o caso não linear.	43
4.5	A esquerda está representado um hiperplano separador linear e a direita a respectiva função de perda $\varepsilon$ -insensível. (29)	44
4.6	Função de perda $\varepsilon$ -insensível quadrática. (5)	44
4.7	Arquitetura de uma máquina de suporte vetorial para regressão. (29)	51
4.8	Modelo gráfico de um GPR. (26)	57
5.1	Triângulo de desenvolvimento usado para o cálculo da reserva IBNR.	60
5.2	Criação dos dados de entrada para os modelos híbrido 1. (19)	61
5.3	Criação dos dados de entrada para o modelo híbrido 2 e 3.	63
5.4	Dados utilizados para comparação de reserva IBNR. (19)	66
6.1	Etapas do procedimento <i>Bootstrapping</i> no modelo híbrido para cálculo de reservas.	73
A.1	Reserva estimada via Bootstrap Chain Ladder.	81

## Lista de tabelas

2.1	Entradas conhecidas da matriz $C$ .	18
2.2	<i>Triângulo de desenvolvimento</i> $I$ para o caso de $n = 10$ .	19
2.3	<i>Triângulo acumulado</i> $A$ referente ao <i>triângulo de desenvolvimento</i> $I$ mostrado na Tabela 2.2. Dados da AFG - Triângulo RAA do pacote Chain Ladder, plataforma R.	19
2.4	Pagamentos futuros estimados para o Triângulo RAA disponível no pacote Chain Ladder, plataforma R.	21
2.5	Reserva Estimada.	21
3.1	Fatores de desenvolvimento e parâmetros de variância para o Exemplo 3.1.1.	25
3.2	Reservas e erros de previsão para o Exemplo 3.1.1.	25
3.3	Reservas Estimadas no Exemplo 3.2.1.	33
3.4	Erros de previsão das reservas no Exemplo 3.2.1.	34
5.1	Triângulo RAA do pacote Chain Ladder, plataforma R.	65
5.2	Triângulo ABC do pacote Chain Ladder, plataforma R.	65
5.3	Reservas estimadas para os triângulos ABC e RAA usando o Modelo Híbrido 1.	67
5.4	Reservas estimadas para os triângulos ABC e RAA usando o Modelo Híbrido 2.	67
5.5	Reservas estimadas para os triângulos ABC e RAA usando o Modelo Híbrido 3.	67
5.6	Resultado de simulação usando GPR e SVR para os modelos híbridos 1, 2 e 3. Os valores em negrito são os que estão mais próximos do IBNR observado.	68
5.7	Comparação de estimativas para reservas IBNR usando o modelo híbrido 1. Os valores em negrito são os que estão mais próximos do IBNR observado.	69
5.8	Comparação de estimativas para reservas IBNR usando o modelo híbrido 2. Os valores em negrito são os que estão mais próximos do IBNR observado.	70
5.9	Comparação de estimativas para reservas IBNR, usando o modelo híbrido 3. Os valores em negrito são os que estão mais próximos do IBNR observado.	71
6.1	Estimativas das reservas e desvios padrões obtido pelo modelo híbrido 1. Os valores da reservas em negrito são os que estão mais próximos do IBNR observado. Os menores desvios obtidos se encontram em itálico.	74
6.2	Estimativas das reservas e desvios padrões obtido pelo modelo híbrido 2. Os valores da reservas em negrito são os que estão mais próximos do IBNR observado. Os menores desvios obtidos se encontram em itálico.	74

- 6.3 Estimativas das reservas e desvios padrões obtido pelo modelo híbrido 3. Os valores da reservas em **negrito** são os que estão mais próximos do IBNR observado. Os menores desvios obtidos se encontram em *itálico*.

*“Buscai em primeiro lugar o Reino de Deus e a sua justiça e todas estas coisas vos serão dadas em acréscimo”. (Mateus 6, 33).  
Dissertação dedicada a Ricardo, José Faustino, Célia, Murilo e Fabiano.*