2
Aritmética Intervalar - Conceitos Básicos

Na década de 60 o estudante de doutorado da Universidade de Stanford, Ramon E. Moore (16), desenvolveu um método com o objetivo de produzir resultados confiáveis, colocando limites em erros de arredondamento no cálculo numérico, sendo assim um dos precursores da hoje conhecida Aritmética Intervalar.

A Aritmética Intervalar (AI) é uma ferramenta numérica para manipulação e operação com intervalos. A seguir, encontra-se uma breve apresentação da Aritmética Intervalar retratando algumas propriedades de operações com intervalos. Todas as definições e resultados, bem como suas demonstrações, podem ser encontrados nos trabalhos (16), (4), (22) e (5).

2.0.1
Intervalos de números reais

Um *intervalo real*, ou somente *intervalo* é um subconjunto não-vazio dos números reais, fechado e limitado que segue a seguinte definição.

Definição 2.1 *Dados* $\underline{x} \in \mathbb{R}$ *e* $\overline{x} \in \mathbb{R}$ *tal que* $\underline{x} \leq \overline{x}$ *chama-se de intervalo* $[x]$ *o conjunto*

$$[x] \equiv [\underline{x}, \overline{x}] := \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\},$$

onde $\underline{x}$ *é o limite inferior e* $\overline{x}$ *é o limite superior do intervalo* $[x]$*, também chamados de ínfimo e supremo, respectivamente.*

Intervalo Fino

Um intervalo é chamado de *fino* quando os limites inferior e superior são iguais, ou seja, $\underline{x} = \overline{x}$. Neste caso, o intervalo é representado apenas por x e as operações realizadas sobre ele seguem as operações dos números reais.

Interior de um intervalo

O *interior de um intervalo* $[x]$ é um conjunto de números reais tal que:

$$]x[:= \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} < x < \overline{x}\}$$

2.0.2
Conjunto $\mathbb{IR}$

Denota-se por $\mathbb{IR}$ o conjunto de todos os intervalos de números reais, isto é

$$\mathbb{IR} = \{[x] : \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \overline{x}\}.$$

2.0.3
Relações entre intervalos

As relações de *igualdade* (=), *inclusão* ($\subseteq$), *inclusão própria* ($\subset$), *interseção* ($\cap$) e *união* ($\cup$) são definidas no sentido usual da teoria dos conjuntos, assim como descrito abaixo.

Definição 2.2 (Igualdade de dois intervalos) *Sejam $[x]$ e $[y]$ dois intervalos de $\mathbb{R}$. Diz-se que:*

$$[x] = [y] \implies \underline{x} = \underline{y} \text{ e } \overline{x} = \overline{y}$$

Definição 2.3 (Inclusão de intervalos) *Um intervalo $[x]$ é dito estar* ***contido no interior*** *de $[y]$, isto é, $[x] \subset [y]$, se $\underline{y} < \underline{x}$ e $\overline{x} < \overline{y}$. Neste caso, esta relação é denotada por $[x] \subset [y]$, e pode também ser chamada de* ***relação de inclusão própria****.*

A relação de inclusão $[x] \subseteq [y]$ segue as definições 2.3 e 2.2, uma vez que $[x] \subseteq [y] \iff \underline{y} \leq \underline{x}$ e $\overline{x} \leq \overline{y}$.

Definição 2.4 (Interseção de dois intervalos) *Sejam $[x]$ e $[y]$ dois intervalos. A* ***interseção*** *dos intervalos $[x]$ e $[y]$ é dada pelo intervalo $[x] \cap [y] = [max\{\underline{x}, \underline{y}\}, min\{\overline{x}, \overline{y}\}]$, caso $max\{\underline{x}, \underline{y}\} \leq min\{\overline{x}, \overline{y}\}$. Caso $max\{\underline{x}.\underline{y}\} > min\{\overline{x}, \overline{y}\}$ então $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Definição 2.5 (União de dois intervalos não disjuntos) *Sejam $[x]$ e $[y]$ dois intervalos tais que $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. A* ***união*** *dos intervalos $[x]$ e $[y]$ é dada pelo intervalo $[x] \cup [y] = [min\{\underline{x}, \underline{y}\}, max\{\overline{x}, \overline{y}\}]$.*

Definição 2.6 (União convexa de dois intervalos) *Sejam $[x]$ e $[y]$ dois intervalos quaisquer. A* ***união convexa*** *dos intervalos $[x]$ e $[y]$ é dada pelo intervalo $\overline{[x] \cup [y]} = [min\{\underline{x}, \underline{y}\}, max\{\overline{x}, \overline{y}\}]$. Nesta união, a interseção entre os dois intervalos pode ser vazia.*

Relações de ordem entre intervalos

As relações de ordem dos números reais podem ser estendidas para os intervalos.

Definição 2.7 *Se* $\star \in \{<, \leq, \geq, >\}$ *e* $[x]$ *e* $[y] \in \mathbb{IR}$ *então é dito que*

$$[x] \star [y] \iff x \star y, \text{ para todo } x \in [x] \text{ e } y \in [y].$$

Diante disso pode-se concluir que:

$$\begin{aligned}
[x] < [y] &\iff \overline{x} < \underline{y} \\
[x] > [y] &\iff \underline{x} > \overline{y} \\
[x] \leq [y] &\iff \overline{x} \leq \underline{y} \\
[x] \geq [y] &\iff \underline{x} \geq \overline{y}
\end{aligned}$$

2.0.4 Operações elementares sobre intervalos

Definição 2.8 *Sejam* $[x], [y] \in \mathbb{IR}$, *dois intervalos reais. As operações de soma, subtração, multiplicação e divisão em* $\mathbb{IR}$ *são definidas por*

$$[x] \circ [y] = \{x \circ y : x \in [x] \text{ e } y \in [y]\}, \text{ onde } \circ \in \{+, -, \cdot, /\}.$$

Para a operação de divisão, $0 \notin [y]$.

Definição 2.9 *Se* ω *é uma operação unária e* $[x] \in \mathbb{IR}$, *então* $\omega([x])$ *é definida por*

$$\omega([x]) = \{\omega(x) : x \in [x]\} = [min\{\omega(x) : x \in [x]\}, max\{\omega(x) : x \in [x]\}].$$

As proposições a seguir tratam de fórmulas mais convenientes para $[x] \circ [y]$, de tal forma que os limites dos intervalos resultantes sejam expressos pelos limites dos intervalos que estão sendo operados, as mesmas não serão demonstradas por se tratarem de conceitos básicos já bastante difundidos na literatura, mas suas demonstrações podem ser encontradas em (20) na forma de vários teoremas.

Proposição 2.1 *Sejam* $[x], [y] \in \mathbb{IR}$. *Então:*

1. ***Adição intervalar:*** $[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}]$;

2. ***Pseudo inverso aditivo intervalar:*** $-[x] = [-\overline{x}, -\underline{x}]$;

3. ***Subtração intervalar:*** $[x] - [y] = [x] + (-[y]) = [\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}]$;

4. ***Multiplicação intervalar:*** $[x]\cdot[y] = [min\{\underline{x}\cdot\underline{y}, \underline{x}\cdot\overline{y}, \overline{x}\cdot\underline{y}, \overline{x}\cdot\overline{y}\}, max\{\underline{x}\cdot\underline{y}, \underline{x}\cdot\overline{y}, \overline{x}\cdot\underline{y}, \overline{x}\cdot\overline{y}\}]$;

5. ***Pseudo inverso multiplicativo intervalar:*** $[x]^{-1} = 1/[x] = [\frac{1}{\overline{x}}, \frac{1}{\underline{x}}]$ *e* $0 \notin [x]$;

6. ***Divisão intervalar:*** $\frac{[x]}{[y]} = [x]\cdot[y]^{-1} = [min\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\}, max\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\}]$, *com* $0 \notin [y]$.

$[x]\cdot[y]$	$0 \le \underline{y}$	$\underline{y} < 0 < \overline{y}$	$\overline{y} \le 0$
$0 \le \underline{x}$	$[\underline{x}\cdot\underline{y}, \overline{x}\cdot\overline{y}]$	$[\overline{x}\cdot\underline{y}, \overline{x}\cdot\overline{y}]$	$[\overline{x}\cdot\underline{y}, \underline{x}\cdot\overline{y}]$
$\underline{x} < 0 < \overline{x}$	$[\underline{x}\cdot\overline{y}, \overline{x}\cdot\overline{y}]$	$[min(\underline{x}\cdot\overline{y}, \overline{x}\cdot\underline{y}), max(\underline{x}\cdot\underline{y}, \overline{x}\cdot\overline{y})]$	$[\overline{x}\cdot\underline{y}, \underline{x}\cdot\underline{y}]$
$\overline{x} \le 0$	$[\underline{x}\cdot\overline{y}, \overline{x}\cdot\underline{y}]$	$[\underline{x}\cdot\overline{y}, \underline{x}\cdot\underline{y}]$	$[\overline{x}\cdot\overline{y}, \underline{x}\cdot\underline{y}]$

Tabela 2.1: Multiplicação de intervalos

$[x]/[y]$	$0 < \underline{y}$	$\overline{y} < 0$
$0 \le \underline{x}$	$[\underline{x}/\overline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\underline{y}]$
$\underline{x} < 0 < \overline{x}$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\underline{y}]$	$[\overline{x}/\overline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$
$\overline{x} \le 0$	$[\underline{x}/\underline{y}, \overline{x}/\overline{y}]$	$[\overline{x}/\underline{y}, \underline{x}/\overline{y}]$

Tabela 2.2: Divisão de intervalos

Regras mais compactas para multiplicação e divisão entre intervalos dependem das relações de ordem entre os extremos dos mesmos, e são dadas na tabelas 2.0.4 e 2.0.4.

Proposição 2.2 (Propriedades algébricas da adição intervalar)
Sejam $[x], [y]$ *e* $[z] \in \mathbb{IR}$. *Então:*

– ***Fechamento:*** *Se* $[x], [y] \in \mathbb{IR}$ *então* $[x] + [y] \in \mathbb{IR}$;

– ***Associatividade:*** $[x] + ([y] + [z]) = ([x] + [y]) + [z]$;

– ***Comutatividade:*** $[x] + [y] = [y] + [x]$;

– ***Elemento neutro:*** $[0] = [0, 0] \in \mathbb{IR}$ *tal que* $[x] + [0] = [0] + [x] = [x]$.

Proposição 2.3 (Propriedades algébricas da multiplicação intervalar)
Sejam $[x], [y]$ *e* $[z] \in \mathbb{IR}$. *Então:*

– ***Fechamento:*** *Se* $[x], [y] \in \mathbb{IR}$ *então* $[x] \cdot [y] \in \mathbb{IR}$;

- ***Associatividade:*** $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$;
- ***Comutatividade:*** $[x] \cdot [y] = [y] \cdot [x]$;
- ***Elemento neutro:*** $[1] = [1, 1] \in \mathbb{IR}$ *tal que* $[x] \cdot [1] = [1] \cdot [x] = [x]$;
- ***Subdistributividade:*** $[x] \cdot ([y] + [z]) \subseteq ([x] \cdot [y]) + ([x] \cdot [z])$.

Proposição 2.4 (Inclusão Monotônica) *Se* $[x]$ *está contido num outro intervalo* $[x']$ *e* $[y]$ *está contido em* $[y']$*, então a operação entre* $[x]$ *e* $[y]$ *está contida no intervalo calculado pela operação dos intervalos maiores* $[x']$ *e* $[y']$*, isto é,*

$$[x] \subseteq [x'], [y] \subseteq [y'] \implies [x] \circ [y] \subseteq [x'] \circ [y'],\ onde \circ \in \{+, -, \cdot, /\}.$$

2.0.5
Topologia de $\mathbb{IR}$

Definição 2.10 (Distância entre dois intervalos) *Sejam* $[x]$ *e* $[y]$ *dois intervalos. A* ***distância*** *entre* $[x]$ *e* $[y]$ *é dada pelo número real não negativo* $d([x], [y]) = max(|\underline{x} - \underline{y}|, |\overline{x} - \overline{y}|)$*, isto é, a "maior distância em módulo entre os extremos".*

Definição 2.11 (Módulo de um intervalo) *Seja* $[x]$ *um intervalo. O* ***módulo*** *de* $[x]$ *é o número real não negativo* $|[x]| = d([x], 0) = max(|\underline{x}|, |\overline{x}|)$*, isto é, a "maior distância em módulo de um dos extremos a zero".*

Definição 2.12 (Ponto médio de um intervalo) *Seja* $[x]$ *um intervalo. O* ***ponto médio*** *de* $[x]$ *é dado pelo número real* $m([x]) = \frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}$.

Definição 2.13 (Raio de um intervalo) *Seja* $[x]$ *um intervalo. O* ***raio*** *de* $[x]$ *é dado por* $rad([x]) = \frac{\overline{x}-\underline{x}}{2}$.

Definição 2.14 (Diâmetro de um intervalo) *Seja* $[x]$ *um intervalo. O* ***diâmetro*** *de* $[x]$ *é o número real não negativo* $diam([x]) = \overline{x} - \underline{x}$.

2.0.6
Funções definidas em intervalos

Um dos mais usuais problemas da análise intervalar é a estimativa de uma função real de uma ou várias variáveis reais, cujo domínio está contido em $\mathbb{IR}$. Paral tal será apresentado um conjunto de definições e teoremas para tratar de funções definidas em intervalos.

Definição 2.15 *Seja uma função real de variável real* $\varphi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *contínua em todo intervalo fechado em seu domínio* D. *Define-se a avaliação dessa função sobre o intervalo* $[x]$ *da seguinte forma:*

$$\varphi([x]) = \{\varphi(x)/x \in [x]\},$$

isto é, $\varphi([x])$ *significa a imagem da função real* ϕ *sobre o intervalo* $[x]$. *Como* φ *é contínua,* $\varphi([x])$ *também é um intervalo.*

Definição 2.16 (Função intervalar) *(22) Seja* $F : X \to Y$ *uma função. Se* $X = Dom(F) \subseteq \mathbb{IR}$ *e* $Y = CD(F) \subseteq \mathbb{IR}$, *dizemos que* F *é uma* ***função intervalar de uma variável intervalar***.

Teorema 2.1 *Sejam* f *uma função real de variável real e* X *e* Y *dois intervalos. A função* f *é isotônica em relação a inclusão, isto é,*

$$se\ X \subseteq Y \subseteq Dom(f),\ então\ f(X) \subseteq f(Y).$$

Definição 2.17 (Inclusão intervalar) *Dado* $x \in \mathbb{R}$, *diz-se que* $X \in \mathbb{IR}$ *é uma* ***representação*** *de* x *se* $x \in X$.

Definição 2.18 (Imagem intervalar de uma função real) *Seja* f *uma função real de variável real e* X *um intervalo tal que* $X \subseteq Dom(f)$, *com* f *contínua em* X. *A* ***imagem intervalar*** *da função* f *em* X *é o intervalo:*

$$Im(f, X) = [min\{f(x)/x \in X\}, max\{f(x)/x \in X\}].$$

Dessa maneira, se $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ *é um intervalo pontual, então* $Y = f(X)$ *também é um intervalo pontual, dado por* $Y = [f(\underline{x}), f(\overline{x})]$. *Ainda, se* $X = [\underline{x}, \overline{x}]$ *é um intervalo com* $diam(X) > 0$, *então* $Im(f, X)$ *é o* ***intervalo de menor diâmetro que contém todos os valores reias de*** $f(X)$***, quando*** $x \in X$.

Definição 2.19 (Extensão intervalar de uma função real) *Sejam* f *uma função real de variável real e* X *um intervalo. A* ***extensão intervalar*** *ou* ***avaliação intervalar*** *de* f *em* X *é a função intervalar* $f_{[]}([x])$ *tal que, cada ocorrência da variável real* x *é substituída pela variável intervalar* X *e cada operação real* $(+, -, \cdot, /)$ *é substituída pela respectiva operação intervalar de tal modo que, quando* X *for um intervalo pontual, então* $f_{[]}([x]) = f(x)$.

Teorema 2.2 (Teorema Fundamental da AI) *Sejam* f *uma função real contínua de variável real* x *e* $f_{[]}([x])$ *a sua respectiva extensão intervalar. Então, vale que*

$$f([x]) \subseteq f_{[]}([x]) \text{ para todo } [x] \subseteq Dom(f),$$

onde a igualdade ocorre somente em casos raros.

Teorema 2.3 *Uma extensão intervalar é isotônica em relação a inclusão, já que as operações e as funções reais de intervalo são isotônicas, isto é,*

$$[x] \subseteq [y] \implies f_{[]}([x]) \subseteq f_{[]}([y])$$

Usando as propriedades de monotonicidade das funções reais elementares, pode-se escrever a imagem das funções estendidas para intevalos correspondentes, da seguinte forma:

$$\varphi([x]) = [\varphi(\underline{x}), \varphi(\overline{x})], \qquad \varphi \in \{\tan^{-1}, \sinh, \sinh^{-1}, \log\}$$

$$\varphi([x]) = [\varphi(\overline{x}), \varphi(\underline{x})], \qquad \varphi \in \{\cot^{-1}, \coth^{-1}\}$$

$$[x]^2 = \begin{cases} [\overline{x}^2, \underline{x}^2] & \text{if } x < 0, \\ [0, |[x]|^2] & \text{if } 0 \in [x], \\ [\underline{x}^2, \overline{x}^2] & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{[x]} = [\sqrt{\underline{x}}, \sqrt{\overline{x}}], \qquad [x] > 0$$

$$e^{[x]} = [e^{\underline{x}}, e^{\overline{x}}]$$

$$[x]^n = \begin{cases} [\underline{x}^n, \overline{x}^n] & \text{if } \ 0 < \underline{x} \ \text{ ou } \ n \ \text{ ímpar}, \\ [0, |[x]|^n] & \text{if } \ 0 \in [x] \ \text{ e } \ n \ \text{ par}, \\ [\overline{x}^n, \underline{x}^n] & \text{if } \ \overline{x} < 0 \ \text{ e } \ n \ \text{ par}. \end{cases}$$

$$\cos([x]) = \begin{cases} [-1,1] & \text{if} \quad 1 + \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \leq \frac{\overline{x}}{\pi}, \\ [-1, max(\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x}))] & \text{if} \quad \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \leq \frac{\overline{x}}{\pi} \ \text{ e } \ \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \mod 2 = 1, \\ [min(\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x})), 1] & \text{if} \quad \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \leq \frac{\overline{x}}{\pi} \ \text{ e } \ \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \mod 2 = 0, \\ [min(\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x})), max(\cos(\underline{x}), \cos(\overline{x}))] & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\sin([x]) = \begin{cases} [-1,1] & \text{if} \quad 1 + \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \leq \frac{\overline{x}}{\pi}, \\ [-1, max(\sin(\underline{x}), \sin(\overline{x}))] & \text{if} \quad \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \leq \frac{\overline{x}}{\pi} \ \text{ e } \ \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \mod 2 = 1, \\ [min(\sin(\underline{x}), \sin(\overline{x})), 1] & \text{if} \quad \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \leq \frac{\overline{x}}{\pi} \ \text{ e } \ \lceil \frac{\underline{x}}{\pi} \rceil \mod 2 = 0, \\ [min(\sin(\underline{x}), \sin(\overline{x})), max(\sin(\underline{x}), \sin(\overline{x}))] & \text{caso contrário.} \end{cases}$$