1
Introdução

Georg Cantor introduziu em 1878 o conceito de cardinalidade. Seus estudos mostraram, em particular, que existe uma bijeção entre o intervalo $[0,1]$ e o quadrado $[0,1]^2$, o que motivou quase que imediatamente a pergunta de se essa bijeção poderia de alguma forma ser contínua. No entanto, em 1879, E. Netto mostrou que tal bijeção é necessariamente descontínua, conforme relata Sagan em (S94).

Deixando de lado a hipótese da bijetividade, G. Peano construiu em 1890 uma função contínua e sobrejetiva de $[0,1]$ em $[0,1]^2$, isto é, uma curva que preenche o quadrado. Desde então, curvas que passam por todos os pontos de uma região bidimensional de interior não-vazio são chamadas de *curvas de Peano*.

Foi David Hilbert, no entanto, que primeiro descobriu um procedimento geométrico que permitia a construção de toda uma classe de curvas de Peano. O procedimento de Hilbert é hoje bem conhecido e se baseia em subdivisões simultâneas de um quadrado e de um intervalo, bem demonstrado pela figura 1.1. A figura aponta as relações entre os subintervalos e os subquadrados no três primeiros passos da construção de Hilbert. Se um intervalo I é mapeado em um quadrado Q, seus subintervalos, gerados no passo seguinte serão mapeados nos subquadrados de Q que foram gerados no mesmo passo. Hilbert observou que é sempre possível arranjar os subquadrados de forma que a subintervalos adjacentes correspondam subquadrados com uma aresta em comum.

A seguinte pergunta é atribuída por J. Pach e C.A. Rogers em (PR83) a M. Mihalik e A. Wieczorek do Instytut Podrtaw Informatyki da Academia Polonesa de Ciências, e também é citada como problema em aberto por (CFG91, problem A.37).

Problema 1 *Existe uma curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de Peano com a propriedade adicional de que $\gamma([a,b])$ é um subconjunto convexo do quadrado, para todo $0 \leq a \leq b \leq 1$?*

Pach e Rogers não conseguiram solucionar o problema, mas construíram em (PR83) uma curva γ de Peano tal que $\gamma([0,b])$ é convexo para todo b.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

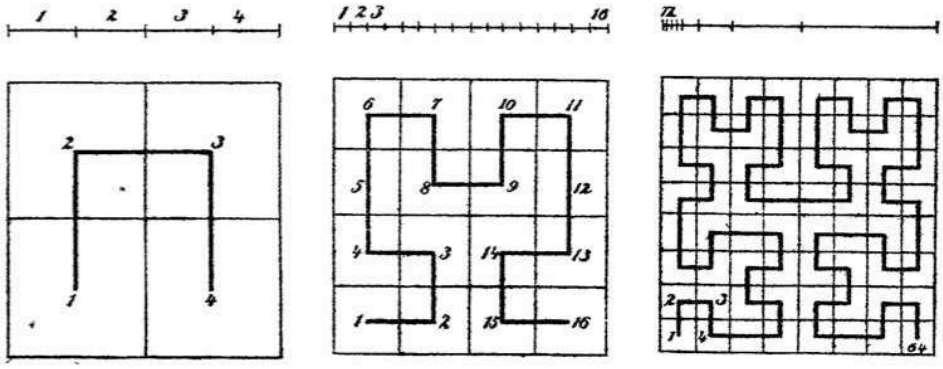

Figura 1.1: Esta é uma reprodução da figura original de Hilbert (Hi91).

Independentemente, Andrew Vince e David C. Wilson obtiveram em (VW86) o mesmo resultado através de uma construção um pouco similar.

Vale observar que Pach e Rogers também mostraram que uma versão discretizada do problema tem resposta positiva: veja (VPR88). No Capítulo 6 da tese de doutorado (U06) são estabelecidas diversas propriedades das "curvas de Peano convexas", mas não sua existência.

O resultado principal desta dissertação é o seguinte:

Teorema 1.1 *Existe uma curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ e existe um campo contínuo de direções X em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que γ é curva de Peano, e para todo $t > 0$, o conjunto $K_t = \gamma([0,t])$ é convexo com bordo C^∞, tangente ao campo em cada ponto, e com curvatura afastada de zero (por uma constante que não depende de t). Além disso, $\gamma(t) \in Fr(K_t)$ $\forall t$.*

Isto melhora o resultado de (PR83, VW86). A informação nova mais relevante é o campo de direções X. Em algum sentido, a curva γ parece ser tangente ao campo X. Tentamos dar sentido preciso a esta afirmação analisando diversos conceitos de tangência. No entanto, não conseguimos encontrar um conceito de tangência que fosse satisfeito pela nossa curva e que ao mesmo tempo respeitasse alguns critérios básicos – ver discussão no capítulo 4.

A construção da curva γ é inspirada em (PR83) e (VW86), mas é feita de maneira mais "flexível". Por exemplo, enquanto Pach e Rogers definem o objeto *lune* como a região entre um arco de parábola e uma curva que é seccionalmente arco de parábola, a nossa lua é simplesmente a região entre duas funções C^∞. Esta maior flexibilidade de fato simplifica a construção e permite ajustes convenientes na curva.

Vamos relembrar alguns resultados clássicos respeito de curvas tangentes a campos de direções. Um teorema do próprio Peano (veja por exemplo (Ho76,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

p. 148)) assegura que todo campo contínuo tem curvas tangentes. Porém pode existir mais de uma curva tangente ao campo passando por um ponto dado. De fato, existem equações diferenciais para as quais não vale a unicidade de soluções: $dy/dt = |y|^{1/2}$ é um exemplo. Um exemplo bastante natural e interessante de um campo de direções contínuo que não é unicamente integrável é descrito em (B03, p. 12–14). Nestes exemplos, os pontos de "bifurcação" formam uma curva. Já o campo do Teorema 1.1 possui um conjunto denso de pontos de bifurcação. Outros exemplos de campos com muitas bifurcações são construídos em (BF04).

Por outro lado, podemos dizer que a não-unicidade é um fenômeno patológico: Campos contínuos genéricos (no sentido do Teorema de Baire) são unicamente integráveis: veja (Ho76, p. 151). Além disso, o clássico Teorema de Cauchy–Picard garante a unicidade no caso de campos suficientemente regulares (Lipschitz). Isso é usualmente demonstrado utilizando o Teorema de Ponto Fixo para Contrações (veja por exemplo (Ho76, p. 57)). Outra demonstração (que obtém o Teorema de Existência de Peano ao longo do caminho) é apresentada em (AAN09).

Esta dissertação está assim organizada: O Capítulo 2 contém a construção de curvas de Peano e campos de direções com todas as propriedades mencionadas no Teorema 1.1, exceto a convexidade. No Capítulo 3 usamos estes resultados e, tomando cuidados para garantir a convexidade, demonstramos o Teorema 1.1. No Capítulo 4, exploramos algumas definições de tangência de uma curva (apenas contínua) a um campo contínuo de direções. Investigamos algumas propriedades destas definições, como por exemplo se uma curva de Peano pode ser tangente a um campo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA