2
O Processo Básico de Construção

O objetivo deste capítulo é demonstrar a proposição 2.3, além de definir objetos e provar fatos que serão relevantes para a construção do próximo capítulo. Primeiro, duas definições:

Definição 2.1 *Seja* $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *uma curva diferenciável e* $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um campo de direções.* α *é dita tangente a* X *em todo ponto se* $\alpha'(t) \parallel X(\alpha(t))$ *para todo* $t \in [0,1]$.

Aqui é necessário admitir a possibilidade de $\alpha'(t) = 0$ em um conjunto finito de t's. Isso permite que nós façamos completo uso da diferença entre campos de direções e campos de vetores, pois a curva pode parar e voltar no sentido contrário.

Definição 2.2 (Curva de Peano) *Uma curva* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *é dita* curva de Peano *se* $\gamma([0,1])$ *tem interior não-vazio.*

Proposição 2.3 *Existe uma curva* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *e existe um campo contínuo de direções* X *em* $\mathbb{R}^2$ *tal que tal que* γ *é curva de Peano e* γ *é limite uniforme de curvas* C^∞ γ_n *tangentes ao campo em cada ponto.*

2.1
Luas e suas partições

Definição 2.4 *Sejam* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funções* C^∞ *satisfazendo:*

1. *f e g têm contato de ordem infinita em a e b, isto é,* $f^{(i)}(a) = g^{(i)}(a), f^{(i)}(b) = g^{(i)}(b), \forall i \in \mathbb{N}$

2. $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$

A região $L = L(f,g) = \{(x,y) | x \in [a,b], f(x) \leq y \leq g(x)\}$ *é chamada* <u>lua</u>.

As luas com as quais nós trabalharemos serão sempre definidas em $[0,1]$.

Mais algumas definições são convenientes:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

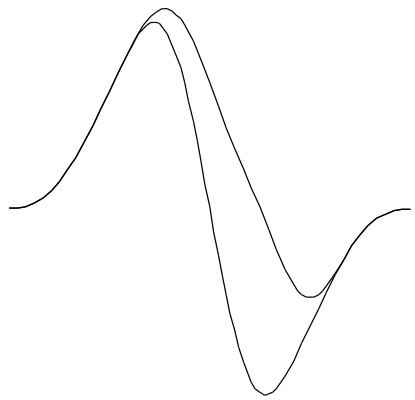


Figura 2.1: Lua típica da construção

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

Definição 2.5 *Para uma lua $L = L(f,g)$, definimos o seu suporte como $S_L = \{x \in [a,b] | f(x) < g(x)\}$. Além disso, L é dita* <u>*aberta*</u> *se S_L é um intervalo.*

É tecnicamente conveniente termos que a lua é definida em $[0,1]$. No entanto, a maioria das luas com as quais nós iremos trabalhar tem intervalos em que $f = g$, como ilustra a Figura 2.1. Gostaríamos de pensar que a lua de fato está definida em seu suporte, ideia esta que será capturada mais tarde na Definição 2.14.

Notação 1 *Para uma função C^∞ $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, denotamos*

$$||F||_0 = \sup_{x\in[a,b]} |F(x)| \text{ e } ||F||_k = \max\left(||F||_0, ||F'||_0, \ldots, ||F^{(k)}||_0\right), k \in \mathbb{N}$$

Para $L = L(f,g)$, definimos $\|L\|_k = \|g - f\|_k$.

Fixemos $\phi : \mathbb{R} \to [0,1]$ uma função C^∞ tal que $\phi^{-1}(0) = (-\infty, 1/3], \phi^{-1}(1) = [2/3, +\infty)$.

Definimos para $a < b$

$$\phi_{a,b}(x) = \phi\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

É claro que $\phi_{0,1} = \phi$, e $\phi_{a,b}^{-1}(0) = \left(-\infty, \frac{2a+b}{3}\right], \phi_{a,b}^{-1}(1) = \left[\frac{a+2b}{3}, +\infty\right)$. Note também que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_{a,b}^{(k)}(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |\phi_{a,b}^{(k)}(x)|,$$

logo podemos definir $\|\phi_{a,b}\|_k$ da maneira usual considerando ϕ restrita a $[a,b]$.

Nota 1 *Como*

$$\phi_{a,b}^{(k)}(x) = \frac{1}{(b-a)^k} \cdot \phi^{(k)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

temos que

$$\|\phi_{a,b}\|_k = \max_{i \leq k} \frac{\|\phi^{(i)}\|_0}{(b-a)^i}$$

Definição 2.6 *Seja $L = L(f,g)$ uma lua aberta definida em $[0,1]$ com suporte $S_L = (a,b)$. Defina $h(x) = (1-\phi_{a,b}(x))g(x) + \phi_{a,b}(x)f(x)$. Claramente h é C^∞ e $L_1 = L(f,h)$ e $L_2 = L(h,g)$ são luas abertas definidas em $[0,1]$. $L = L_1 \cup L_2$ é chamada a* bipartição *de L.*

Lema 2.7 *Podemos observar que as luas L_1 e L_2 geradas na bipartição de L têm mais duas propriedades importantes:*

1. $S_{L_1} = \left(a, \frac{a+2b}{3}\right), S_{L_2} = \left(\frac{2a+b}{3}, b\right)$
2. $\max(\|L_1\|_k, \|L_2\|_k) \leq 2^k \|\phi_{a,b}\|_k \|L\|_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Prova. O item (1) segue diretamente da construção.

Para o item (2), note que dado $k \in \mathbb{N}$,

$$h^{(k)}(x) = g^{(k)}(x) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \phi_{a,b}^{(k-i)}(x)(f-g)^{(i)}(x)$$

Portanto

$$||h^{(k)} - g^{(k)}||_0 \leq 2^k ||\phi_{a,b}||_k ||f-g||_k$$

e assim

$$||L_2||_k \leq \max_{i \leq k}(2^i ||\phi_{a,b}||_i ||L||_i) = 2^k ||\phi_{a,b}||_k ||L||_k$$

Da mesma forma, uma vez que $h - f = (1-\phi_{a,b})(g-f)$ temos que

$$||h^{(k)} - f^{(k)}||_0 \leq 2^k ||1-\phi_{a,b}||_k ||g-f||_k$$

Como $||1-\phi_{a,b}||_k = ||\phi_{a,b}||_k$, a prova está completa.

■

Definição 2.8 *Seja $L = L(f,g)$ uma lua aberta de suporte S_L, e $n \in \mathbb{N}$. Para $i = 0,1,\ldots,n$ defina $h_i = \left(1 - \frac{i}{n}\right) f + \frac{i}{n} g$. Então para $i = 0,\ldots,n-1$, $L_i = L(h_i, h_{i+1})$ é uma lua aberta de suporte S_L e*

$$L = L_0 \cup L_1 \cup \ldots \cup L_{n-1}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

é chamado o n-fatiamento de L.

Lema 2.9 *Dado um n-fatiamento $L = L_0 \cup \ldots \cup L_{n-1}$, vale $\forall i, \forall k$:*

$$\|L_i\|_k \leq \frac{1}{n}\|L\|_k$$

Prova.

Como

$$|h_{i+1}^{(k)}(x) - h_i^{(k)}(x)| = \frac{1}{n}|g^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)|,$$

temos

$$||h_{i+1} - h_i||_k \leq \frac{1}{n}\|L\|_k$$

■

2.2 Definição da família de luas

Começamos com uma lua aberta L definida em $[0,1]$ e com suporte $S_L = (0,1)$. Fixe também uma sequência $\{\epsilon_k\}_{k\geq 2}$ somável.

- Escolha n_1 suficientemente grande para que as luas geradas do n_1-fatiamento de L, $L = L_0^* \cup \ldots \cup L_{(n_1-1)}^*$ satisfaçam

$$\|L_i^*\|_2 < \frac{\epsilon_2}{4\|\phi_{0,1}\|_2}, i = 0, \ldots, n_1 - 1$$

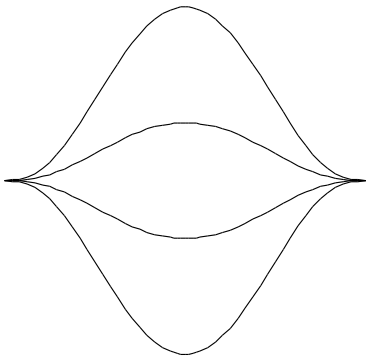
- Para cada $i \in \{0, \ldots, n_1 - 1\}$, seja $L_i^* = L_{(2i)} \cup L_{(2i+1)}$ a bipartição de L_i^*.
- Se $L_i = L(f_i, g_i)$ e $m_1 = 2n_1$ então valem:

  1. $$f_0 = f, g_{(m_1-1)} = g, f_{(i+1)} = g_i$$

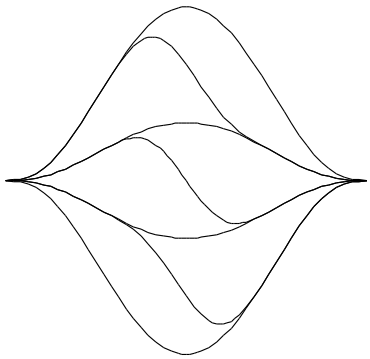
  2. Pelo Lema 2.7,
  $$||L_i||_2 < \epsilon_2, 0 \leq i \leq m_1 - 1$$

- Agora o passo indutivo. Suponha que nós temos $m_1, m_2, \ldots, m_{l-1}$ e para cada $\omega = i_1 i_2 \ldots i_{l-1}$ com $0 \leq i_j \leq m_j - 1$ está definida a lua $L_\omega = L(f_\omega, g_\omega)$, de suporte (a,b). Escolha n_ω suficientemente grande para que as luas geradas no n_ω-fatiamento de L_ω, $L_\omega = L_{\omega 0}^* \cup \ldots \cup L_{\omega(n_\omega-1)}^*$ satisfaçam

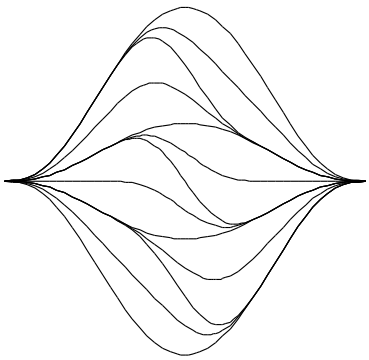
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA



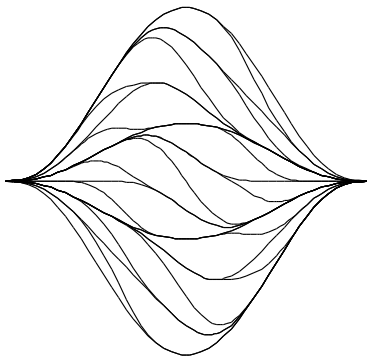
2.2(a): Lua 3-fatiada



2.2(b): Depois bipartida



2.2(c): A figura anterior é 2-fatiada



2.2(d): E mais uma vez bipartida

Figura 2.2: Exemplo mostrando dois passos indutivos (fatiamento seguido de bipartição)

$$\|L^*_{\omega i}\|_{l+1} < \frac{\epsilon_{l+1}}{2^{l+1}\|\phi_{a,b}\|_{l+1}}, i = 0, \ldots, n_\omega - 1$$

- Defina $n_l = \max\{n_\omega : \omega = i_1 i_2 \ldots i_{l-1}, 0 \leq i_j \leq m_j - 1\}$ Claramente as luas geradas no n_l-fatiamento de cada L_ω continuam satisfazendo a desigualdade acima.
- Para cada $i \in \{0, \ldots, n_l - 1\}$, seja $L^*_{\omega i} = L_{\omega(2i)} \cup L_{\omega(2i+1)}$ a bipartição de $L^*_{\omega i}$.
- Se $L_{\omega i} = L(f_{\omega i}, g_{\omega i})$ e $m_l = 2n_l$ então valem:

  1. $$f_{\omega 0} = f_\omega, g_{\omega(m_l - 1)} = g_\omega, f_{\omega(i+1)} = g_{\omega i}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

2. Pelo Lema 2.7,

$$||L_{\omega i}||_{l+1} < \epsilon_{l+1}, 0 \leq i \leq m_1 - 1$$

Definição 2.10 *Definimos*

$$\Omega = \{\omega = i_1 i_2 \dots i_n | i_j \in \{0, 1, \dots, m_j - 1\}, j = 1 \dots n\},$$

o conjunto das palavras finitas que vão indexar cada lua que aparece na construção, e $\Omega^* = \{\omega = i_1 \dots i_n \in \Omega | i_n < m_n - 1\}$.

O comprimento *da palavra* $\omega = i_1 i_2 \dots i_n$ *é* $|\omega| = n$.

Além disso, dado $\omega = i_1 \dots i_n \in \Omega^*$ *definimos o seu sucessor* $\omega^+ \in \Omega$ *como* $\omega^+ = i_1 \dots i_{n-1}(i_n + 1)$.

Assim, a cada palavra finita $\omega \in \Omega$ associamos a lua L_ω definida na construção. Além disso, no passo indutivo fica claro que se $|\omega| = l$ então

$$\|L_\omega\|_{l+1} < \epsilon_{l+1}$$

O lema a seguir garante mais uma propriedade da construção:

Lema 2.11 *Se* $f''(x), g''(x) < -\alpha < 0$ *e* $S_L = (a, b)$, *é possível fazer a construção acima mantendo* $f''_\omega(x), g''_\omega(x) < -\alpha$, *para todo* $\omega = i_1 \dots i_k \in \Omega$.

Prova. Basta mostrar que essa propriedade pode ser mantida no primeiro passo, uma vez que todos os outros passos são divisões idênticas das luas menores.

De $L = L(f, g)$ obtemos uma n_1-partição $L_i^* = L(h_i, h_{i+1})$ com $||L_i^*||_2 < \delta$ arbitrariamente pequeno (nos passos seguintes essa afirmação permanece verdade, uma vez que $\|.\|_2 \leq \|.\|_k$). Além disso, pela construção é fácil ver que $h''_i(x) < -\alpha$ (h_i é combinação convexa de f e g)

Em seguida cada L_i^* é bipartida em L_{2i} e L_{2i+1}, com

$$\|L_{2i}\|_2, \|L_{2i+1}\|_2 \leq 4\|\phi_{a,b}\|_2 \|L_i^*\|_2 < 4\delta\|\phi_{a,b}\|_2,$$

portanto mantendo a notação $L_i = L(f_i, g_i)$:

$$\|g''_i - f''_i\|_0 \leq \|L_i\|_2 < 4\delta\|\phi_{a,b}\|_2$$

Como um dos dois, f''_i ou g''_i, é igual a um dos $h''_j < -\alpha$, segue que é possível fazer δ suficientemente pequeno para que o outro permaneça menor que $-\alpha$. ■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

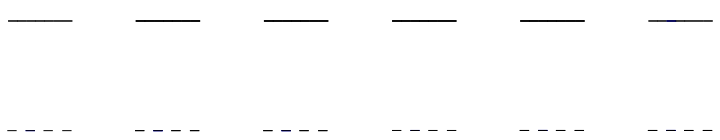


Figura 2.3: Ilustração da construção de K

2.3 Construção do conjunto de Cantor K

Vamos agora construir um conjunto de Cantor K associado ao conjunto Ω:

Definiremos famílias de intervalos $\{J_\omega\}_{\omega\in\Omega}, \{G_\omega\}_{\omega\in\Omega^*}$ tais que $J_\omega, G_\omega \subset [0,1]$, sendo os J_ω's fechados e os G_ω's abertos. A definição é por indução em $|\omega|$:

- Os intervalos $J_0, G_0, J_1, G_1, \ldots, J_{m_1-2}, G_{m_1-2}, J_{m_1-1}$ têm o mesmo comprimento, são disjuntos, se sucedem na ordem acima, e sua união é o intervalo $[0,1]$.
- Para cada palavra $\omega \in \Omega$ com comprimento $n-1 \geq 1$, os intervalos $J_{\omega 0}, G_{\omega 0}, J_{\omega 1}, G_{\omega 1}, \ldots, G_{\omega(m_n-2)}, J_{\omega(m_n-1)}$ têm o mesmo comprimento, são disjuntos, ordenados como acima, e sua união é o intervalo J_ω.

Seja

$$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\omega\in\Omega;|\omega|=n} J_\omega$$

Então K é um conjunto de Cantor, e $[0,1]\backslash K = \bigcup_{\omega\in\Omega^*} G_\omega$.

Queremos pensar nos G_ω como "gaps", como ilustra a Figura 2.3. O sentido principal da construção deste conjunto de Cantor é o seguinte: a curva que vamos construir vai percorrer, no intervalo J_ω, toda a lua essencial de L_ω (ver Definição 2.14). No entanto, quase sempre o ponto final de uma lua essencial não é o ponto inicial da seguinte, logo usamos o intervalo G_ω para andar do final de uma lua para o início da próxima.

2.4 Definição da família de funções-teto

Fixado $t \in K$ existe uma única palavra infinita $i_1 i_2 \ldots$ tal que $t \in J_{i_1\ldots i_n}, \forall n \geq 1$. Seja $\omega_n = i_1 \ldots i_n$. Queremos definir

$$F_t = \lim_{n\to\infty} f_{\omega_n} = \lim_{n\to\infty} g_{\omega_n}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

Mostremos a validade das convergências e igualdades acima. Por construção,

$$\|g_{\omega_n} - f_{\omega_n}\|_{n+1} = \|L_{\omega_n}\|_{n+1} < \epsilon_{n+1}$$

Estamos na etapa n da divisão, e queremos olhar para a etapa seguinte. A lua L_{ω_n} é dividida em $L_{\omega_n 0}, \ldots, L_{\omega_n(m_{n+1}-1)}$, sendo que $L_{\omega_n(2i)} \cup L_{\omega_n(2i+1)}$ é uma lua do fatiamento. Note também que $f_{\omega_n} = f_{\omega_n 0}$. Logo

$$\|f_{\omega_{n+1}} - f_{\omega_n}\|_{n+1} = \|f_{\omega_n i_{n+1}} - f_{\omega_n 0}\|_{n+1}$$

- Se i_{n+1} é par, então $f_{\omega_n i_{n+1}}$ veio do fatiamento, portanto é uma combinação convexa de f_{ω_n} e g_{ω_n} e assim $\|f_{\omega_n i_{n+1}} - f_{\omega_n 0}\|_{n+1} \leq \|L_{\omega_n}\|_{n+1} < \epsilon_{n+1}$
- Se é ímpar,

$$\begin{aligned}
\|f_{\omega_n i_{n+1}} - f_{\omega_n 0}\|_{n+1} &\leq \|f_{\omega_n i_{n+1}} - f_{\omega_n(i_{n+1}-1)}\|_{n+1} + \|f_{\omega_n(i_{n+1}-1)} - f_{\omega_n 0}\|_{n+1} \\
&< \|L_{\omega_n(i_{n+1}-1)}\|_{n+1} + \epsilon_{n+1} \\
&\leq \|L_{\omega_n(i_{n+1}-1)}\|_{n+2} + \epsilon_{n+1} \\
&< \epsilon_{n+2} + \epsilon_{n+1}
\end{aligned}$$

Em qualquer caso, $\|f_{\omega_{n+1}} - f_{\omega_n}\|_{n+1} < \epsilon_{n+2} + \epsilon_{n+1}$.

Mais geralmente, se $m > n$ temos que

$$\begin{aligned}
\|f_{\omega_m} - f_{\omega_n}\|_{n+1} &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \|f_{\omega_{j+1}} - f_{\omega_j}\|_{n+1} \\
&\leq \sum_{j=n}^{m-1} \|f_{\omega_{j+1}} - f_{\omega_j}\|_{j+1} < 2\sum_{j=n}^{m} \epsilon_{j+1}
\end{aligned}$$

Em particular, dado k qualquer e lembrando que $k \leq N \Rightarrow \|.\|_k \leq \|.\|_N$, temos que

$$\|f_{\omega_m} - f_{\omega_n}\|_k < 2\sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{j+1}, \forall n \geq k \tag{2-1}$$

Como ϵ_j é sequência somável, f_{ω_n} e g_{ω_n} são sequências de Cauchy em C^k. Portanto existe $\lim f_{\omega_n} = \lim g_{\omega_n} =: F_t$, que é C^∞ (já que é C^k para todo k) e satisfaz $\lim f_{\omega_n}^{(k)} = \lim g_{\omega_n}^{(k)} = F_t^{(k)}$. Note ainda que $t \leq s \Rightarrow F_t \leq F_s$ (decorre do fato de que $f_{\omega^+} = g_\omega$, logo f_ω e g_ω crescem " lexicograficamente " em ω).

Lema 2.12 *Para cada k, a aplicação $t \in K \mapsto F_t \in C^k$ é contínua.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Escolha $n > k$ tal que

$$4\sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{n+1} < \varepsilon.$$

Se δ_n é o tamanho de J_ω para $|\omega| = n$, temos que $s, t \in K$ e $|s - t| < \delta_n$ implicam que $s, t \in J_\omega$, para algum ω de tamanho n. Portanto, F_s e F_t são limites de sequências cujo termo de "tamanho" n é f_ω. Fazendo $m \to \infty$ na equação (2-1), temos que

$$\|F_s - f_\omega\|_k \leq 2\sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{j+1}, \qquad \|F_t - f_\omega\|_k \leq 2\sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{j+1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |s - t| < \delta_n \Rightarrow \|F_s - F_t\|_k &\leq \|F_s - f_\omega\|_k + \|f_\omega - F_t\|_k \\ &\leq 4\sum_{j=n}^{\infty} \epsilon_{j+1} < \varepsilon, \end{aligned}$$

completando a prova.

■

Vamos agora estender essa função para todo o intervalo $[0, 1]$. De fato, basta estender para cada $G_\omega = (\beta, \alpha)$, em que $\alpha, \beta \in K$.

$$F_\beta = \lim_{n\to\infty} f_{\omega(m_k-1)\ldots(m_n-1)}, \text{em que } k - 1 = |\omega|$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} f_{\omega(m_k-1)\ldots(m_n-1)} = \lim_{n\to\infty} g_{\omega(m_k-1)\ldots(m_n-1)} = \lim_{n\to\infty} f_{\omega^+0\ldots0} = F_\alpha,$$

temos $F_\beta = F_\alpha$ e podemos definir $F_t = F_\beta$ para todo $t \in G_\omega$.

A extensão é claramente contínua: para $t \notin K$, a função é constante numa vizinhança de t; para $t \in K$, fixo $\varepsilon > 0$ basta tomar o mesmo $\delta = \delta_n$ do Lema 2.12, já que em um intervalo qualquer não se criam novas imagens (por construção).

2.5 Definição do campo de direções

Para $x \in [0, 1], f(x) \leq y \leq g(x)$ seja t tal que $F_t(x) = y$. Defina $\psi(x, y) = F_t'(x)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

Lema 2.13 *$\psi(x,y)$ é uma função bem definida e contínua em $L = \{(x,y)|x \in [0,1], f(x) \leq y \leq g(x)\}$.*

Prova. Para ver que é bem definida, sejam $(x,y) \in L$ e $t_1 \leq t_2$ tais que $y = F_{t_1}(x) = F_{t_2}(x)$. Como $F_{t_2} - F_{t_1} \geq 0$, segue que x é um mínimo local de $F_{t_2} - F_{t_1}$ e portanto $F'_{t_2}(x) = F'_{t_1}(x)$.

Para a continuidade, suponha que $(x_n, y_n) \to (x,y)$, todos em A. Em particular $y_n = F_{t_n}(x_n) \to y = F_t(x)$.

Passemos a uma subsequência convergente de $\{t_n\}$, $t_{*n} \to t_*$. Pelo lema 2.12, $s \mapsto F_s$ é contínua em C^k, logo $F_{t_{*n}} \to F_{t_*}, F'_{t_{*n}} \to F'_{t_*}$. Assim,

$$|F_{t_{*n}}(x_n) - F_{t_*}(x)| \leq |F_{t_{*n}}(x_n) - F_{t_*}(x_n)| + |F_{t_*}(x_n) - F_{t_*}(x)| \to 0,$$

logo $F_{t_{*n}}(x_n) \to F_{t_*}(x)$, e como $y_n \to y$ vale $F_t(x) = F_{t_*}(x)$ Como ψ é bem definida vale também $F'_{t_*}(x) = F'_t(x)$, portanto um argumento similar mostra que $F'_{t_{*n}}(x_n) \to F'_t(x)$.

Se $F'_{t_n}(x_n) \not\to F'_t(x)$, então existe uma subsequência $\{t_{*n}\}$ de $\{t_n\}$ tal que $|F'_{t_{*n}}(x_n) - F'_t(x)| \geq \varepsilon > 0$. Passando a uma subsequência convergente de t_{*n} (que em particular é subsequência convergente de t_n), isso contradiz o resultado obtido no parágrafo anterior.

Portanto $F'_{t_n}(x_n) \to F'_t(x)$, ie, $\psi(x_n, y_n) \to \psi(x,y)$. ■

2.6 Definição da sequência de curvas

A idéia agora é conseguir uma sequência de curvas γ_n em $\mathbb{R}^2$ tangentes ao campo de direções contínuo $(1, \psi(x,y))$, e que convergem a uma curva de Peano γ.

Para isso, voltamos à divisão da lua. Uma vez que, para cada n fixado vale

$$\bigcup_{|\omega|=n} L_\omega = L,$$

podemos pensar nessas L_ω como estando num mesmo desenho de L com "cortes adicionais" (cada n ganha seu próprio desenho, e γ_n vai ser uma curva nesse desenho). A imagem de γ_n está contida em $\bigcup_{|\omega|=n} Fr(L_\omega)$, e fica progressivamente mais densa em L.

Para facilitar a construção, escrevemos $S_{L_\omega} = (a(\omega), b(\omega))$. Assim, no eixo-$x$ da Figura 2.4 há quatro pontos importantes:

$$a = a(0) = a(2) = a(4), b = b(1) = b(3) = b(5),$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

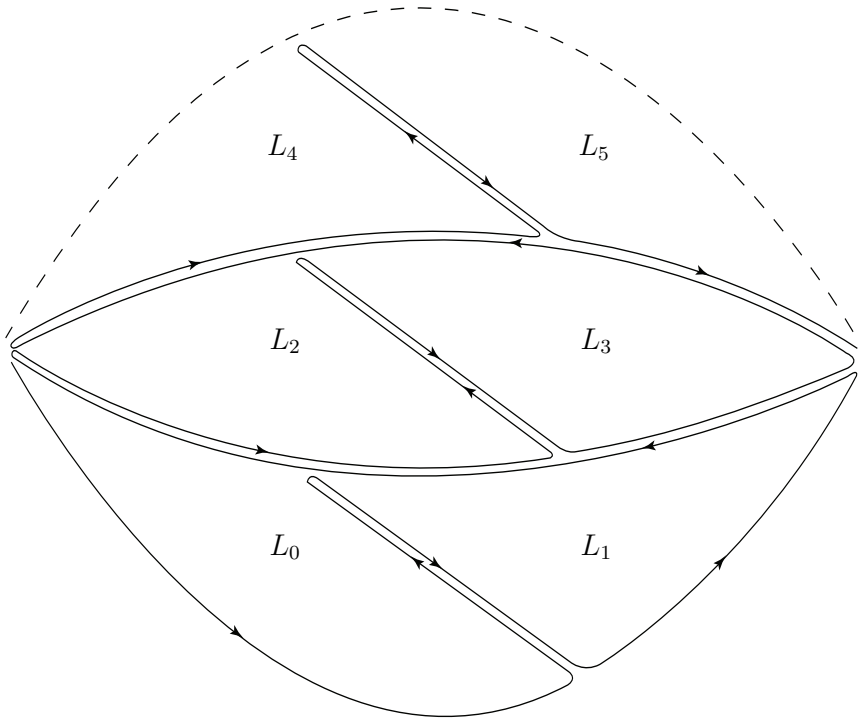


Figura 2.4: Ilustração esquemática da curva γ_1.

$$a(1) = a(3) = a(5) = \frac{2a+b}{3}, b(0) = b(2) = b(4) = \frac{a+2b}{3},$$

e de fato isso é um caso geral (novos pontos de suporte só são gerados na bipartição, então esse vai ser o esquema sempre que uma lua L_ω for fatiada e em seguida bipartida).

Para a construção da curva, precisaremos de uma função auxiliar. Dado um intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$ e $a \neq b$ seja $\psi_I(\cdot, a, b) : I \to \mathbb{R}$ monótona, C^∞ tal que se $I = [\alpha, \beta]$:

1. $\psi_I(\cdot, a, b)$ tem derivada de todas as ordens igual a 0 em α e β.

2. $\psi_I(\alpha, a, b) = a, \qquad \psi_I(\beta, a, b) = b.$

Além disso, dada uma função qualquer $h : I \to \mathbb{R}$ definimos $\hat{h} : I \to \mathbb{R}^2 : t \to (t, h(t))$.

Definimos para $i = 0, \ldots, m_1 - 1$:

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \hat{f}_i\left(\psi_{J_i}(t, a(i), b(i))\right), & t \in J_i \\ \hat{g}_i\left(\psi_{G_i}(t, b(i), a(i+1))\right), & t \in G_i, i < m_1 - 1 \end{cases}$$

A expressão acima percorre a lua na maneira indicada pela Figura 2.4.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

E indutivamente, dada γ_{n-1} construímos γ_n fazendo $\gamma_n = \gamma_{n-1}$ em $\bigcup_{\omega\in\Omega^*,|\omega|<n} G_\omega$ e definindo para cada ω de comprimento n:

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} \hat{f}_\omega\left(\psi_{J_\omega,a(\omega),b(\omega)}(t)\right), & t \in J_\omega \\ \hat{g}_\omega\left(\psi_{G_\omega,b(\omega),a(\omega^+)}(t)\right), & t \in G_\omega, \omega \in \Omega^* \end{cases}$$

Para $t \notin K$, é claro que $\gamma_n(t) \to \gamma(t)$, já que fica constante a partir de um certo ponto. Para $t \in K$, vamos precisar de um lema.

Definição 2.14 *Seja $L = L(f,g)$ uma lua aberta. A* <u>lua essencial</u> *de L é $L^{ess} = \overline{int(L)}$, o fecho do interior de L. Alternativamente, podemos usar a notação $L^{ess}(f,g)$ para indicar a lua essencial da lua formada por f e g.*

Lema 2.15 *Seja $L = L(f,g)$ uma lua aberta com suporte $S_L = (a,b), |S_L| = b-a$. Então o diâmetro D de L^{ess} satisfaz $D^2 \leq |S_L|^2 + (\|L\|_0 + |S_L| \cdot \|f\|_1)^2$.*

Prova. Sejam $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in L^{ess}$, e suponha $y_1 \leq y_2$. Então $a \leq x_2 \leq b$ e $f(x_1) \leq y_1 \leq y_2 \leq g(x_2)$ Assim,

$$\begin{aligned} dist((x_1,y_1),(x_2,y_2))^2 &= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 \\ &\leq (b-a)^2 + (g(x_2)-f(x_1))^2 \\ &\leq |S_L|^2 + (g(x_2)-f(x_2)+f(x_2)-f(x_1))^2 \\ &\leq |S_L|^2 + \left(\|L\|_0 + \int_a^b |f'(t)|dt\right)^2 \\ &\leq |S_L|^2 + (\|L\|_0 + |S_L| \cdot \|f\|_1)^2 \end{aligned}$$

■

Dado $t \in K$, seja $\omega_n = i_1 \ldots i_n$ a sequência de palavras satisfazendo $t \in J_{\omega_n} \forall n, w_{n+1} = w_n i_{n+1}$. Por construção, $\gamma_n(t) \in L^{ess}_{\omega_n}$, cujo diâmetro D_{ω_n} satisfaz

$$(D_{\omega_n})^2 \leq |S_{L_{\omega_n}}|^2 + (\|L_{\omega_n}\|_0 + |S_{L_{\omega_n}}| \cdot \|f_\omega\|_1)^2$$

Como $t \mapsto F_t \in C^1$ é contínua, $\sup_t \|F_t\|_1 = M < \infty$ e portanto

$$(D_{\omega_n})^2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \left(\epsilon_{n+1} + M\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^2 \to 0.$$

Logo $\gamma_n(t) \in L^{ess}_{\omega_n}$ é sequência em compacto com diâmetros tendendo a zero, logo converge ao único ponto $\gamma(t) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^{ess}_{\omega_n}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

De fato, com a argumentação acima fica fácil ver que a convergência é uniforme: seja $\varepsilon > 0$ e n tal que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \left(\epsilon_{n+1} + M\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)^{2} < \varepsilon^2$$

Se $t \in \bigcup_{\omega\in\Omega^*,|\omega|\leq n} G_\omega$, então $\gamma_m(t) = \gamma(t)$ para todo $m \geq n$.

Se $t \in J_\omega$ para algum ω com $|\omega| = n$, temos que $\gamma_m(t), \gamma(t) \in L^{ess}_\omega$ para todo $m \geq n$, então

$$dist(\gamma_m(t), \gamma(t)) \leq D_\omega \leq \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \left(\epsilon_{n+1} + M\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)^{2}} < \varepsilon,$$

portanto a convergência é uniforme.

Note também que $\gamma = \lim \gamma_n$ satisfaz $\gamma([0,1]) = L$. Isso prova a Proposição 2.3.

Lema 2.16 *Vale* $\gamma([0,t]) = L^{ess}(f, F_t), \forall t \in [0,1]$.

Prova. Primeiramente observamos que $\gamma(J_\omega) = L^{ess}_\omega$. De fato $\gamma(J_\omega) \subseteq L^{ess}_\omega$ por construção; para a outra direção considere $(x,y) \in L^{ess}_\omega$ e uma sequência $L^{ess}_{\omega_n}$ tal que $(x,y) \in L^{ess}_{\omega_n}, |\omega_n| = n$ (claro que essa sequência existe, pois a união das luas essenciais da divisão seguinte é a própria lua essencial que foi dividida). Considere os intervalos J_{ω_n} relacionados às luas $L^{ess}_{\omega_n}$. São intervalos fechados encaixados com comprimento convergindo a zero, logo $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_{\omega_n} = \{s\}$, para algum $s \in K$. Assim,

$$\gamma(s) \subseteq \gamma\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_{\omega_n}\right) \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^{ess}_{\omega_n} = \{(x,y)\},$$

e $\gamma(s) = (x,y)$.

Agora mostremos que o lema vale para t da forma $t = \beta_\omega$, em que $J_\omega = [\alpha_\omega, \beta_\omega]$. Para isso, seja $\leq$ a "ordem lexicográfica" em Ω. Assim, vale para t da forma acima a igualdade

$$L^{ess}(f, F_t) = \bigcup_{w^*\leq\omega;|\omega^*|=|\omega|} L^{ess}_{\omega^*}, \tag{2-2}$$

notando ainda que $F_t = F_{\beta_\omega} = g_\omega$. Para ver a igualdade basta observar que os conjuntos $\{(x,y) : f(x) < F_t(x) = g_\omega(x), y \in [f(x), F_t(x)]\}$ e $\{(x,y)$: ao menos uma das desigualdades $f_{00\ldots0}(x) \leq f_{00\ldots1}(x) \leq \ldots \leq f_\omega(x) \leq g_\omega(x)$ é estrita e $y \in [f_{\omega^*}(x), g_{\omega^*}(x)]$, intervalo não-degenerado$\}$ são iguais. Passando aos fechos dos conjuntos acima, temos a igualdade 2-2.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

Como $\bigcup_{w^* \leq \omega; |\omega^*| = |\omega|} J_{\omega^*} \subset [0,t]$, o exposto acima prova que $L^{ess}(f, F_t) \subseteq \gamma([0,t])$. Para a outra direção, se $\omega^* < \omega$ vemos na construção explícita que $\gamma(G_{\omega^*})$ anda por $\hat{g}_{\omega^*}$ (e $g_{\omega^*} \leq g_\omega$) e que se iguala a $\hat{f}$ em no máximo um ponto. Portanto $\gamma(G_{\omega^*}) \subset L^{ess}(f, F_t)$ e vale o lema para $t = \beta_\omega$.

Para $t \notin K$, seja $t* = \max\{s \in K : s < t\} = \beta_\omega$. Então $t \in G_\omega$ e $F_t = F_{t*}$. Já vimos que $\gamma([0, t*]) = L^{ess}(f, F_{t*}) = L^{ess}(f, F_t)$. Já $\gamma((t*, t]) \subset \gamma(G_\omega) \subset L^{ess}(f, F_t)$, pelo mesmo argumento do parágrafo anterior.

Finalmente, dado $t \in K$, existem $\beta_{\omega_n} \searrow t$. Sabemos que vale $\gamma([0, \beta_{\omega_n}] = L^{ess}(f, F_{\beta_{\omega_n}})$, e por continuidade temos que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \gamma([0, \beta_{\omega_n}] = \gamma([0,t]).$$

Falta mostrar que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^{ess}(f, F_{\beta_{\omega_n}}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^{ess}(f, g_{\omega_n}) = L^{ess}(f, F_t)$.

Note que o comprimento do intervalo em que $g_{\omega_n} \neq F_t$ é menor que $|S_{L_{\omega_n}}| \leq (2/3)^n$. Se $(x,y) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^{ess}(f, g_{\omega_n})$, então existem (x_n, y_n) tais que $f(x_n) < g_{\omega_n}(x_n), f(x_n) \leq y_n \leq g_{\omega_n}(x_n)$ e $(x_n, y_n) \to (x,y)$.

Se $F_t(x) > f(x)$, temos que $(x,y) \in L^{ess}(f, F_t)$. Caso $F_t(x) = f(x)$ então para cada ϵ existe $x_\epsilon \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ tal que para n suficientemente grande $g_{\omega_n}(x_\epsilon) = F_t(x_\epsilon) > f(x_\epsilon)$. Escolhendo $y_\epsilon = f(x_\epsilon)$ (por exemplo), obtemos que (x,y) é limite de pontos de $L^{ess}(f, F_t)$, o que prova que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} L^{ess}(f, g_{\omega_n}) \subseteq L^{ess}(f, F_t)$.

Para a outra direção, o conjunto $\{(x,y) : f(x) < F_t(x), f(x) \leq y \leq F_t(x)\}$ está contido em $\{(x,y) : f(x) < g_{\omega_n}(x), f(x) \leq y \leq g_{\omega_n}(x)\}$ para todo n, pois $g_{\omega_n} \geq F_t$. Passando aos fechos, a prova está concluída.

■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA