3
Adicionando as Propriedades de Convexidade

Neste capítulo nós vamos refinar o processo do capítulo anterior para obter a propriedade da convexidade citada na introdução.

Fixemos $0 < \lambda < 1$ (λ deve ser próximo de 1, como será visto mais adiante).

Fixemos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e C^∞ tal que $\psi^{-1}(-1) = (-\infty, 0]$ e $\psi^{-1}(1) = [1, +\infty)$. Considere a curva descrita em coordenadas polares por

$$r = f(\theta) = \frac{1+\lambda}{2} + \frac{1-\lambda}{2}\psi(\cos(3\theta))$$

Lema 3.1 *Se λ é suficientemente próximo de 1 então a curvatura da curva $r = f(\theta)$ será afastada de zero.*

Prova. A fórmula da curvatura em coordenadas polares é

$$K = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}.$$

Note que K não se anula se $r'' < r$. Como

$$r''(\theta) = 9\frac{1-\lambda}{2}\left(\psi''(\cos(3\theta))\sin^2(3\theta) - \psi'(\cos(3\theta))\sin(3\theta)\cos(3\theta)\right),$$

$|r''| < 9(1-\lambda)\|\psi\|_2 = C(1-\lambda)$. Assim, visto que $r \geq \lambda$ é suficiente que

$$\begin{aligned} C(1-\lambda) < \lambda &\Leftrightarrow 1 < (1 + C^{-1})\lambda \\ &\Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{1 + C^{-1}} \end{aligned}$$

■

É fácil ver que os traços das curvas $r = f(\theta), r = 1$ e $r = \lambda$ ($\theta \in \mathbb{R}$) formam seis luas "rotacionadas". A Figura 3.1 mostra esta situação[1] entre os

[1]Na verdade, a Figura 3.1 é esquemática. Os plots com λ suficientemente grandes tornam as curvas próximas demais, e a figura deixa de ser esclarecedora.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

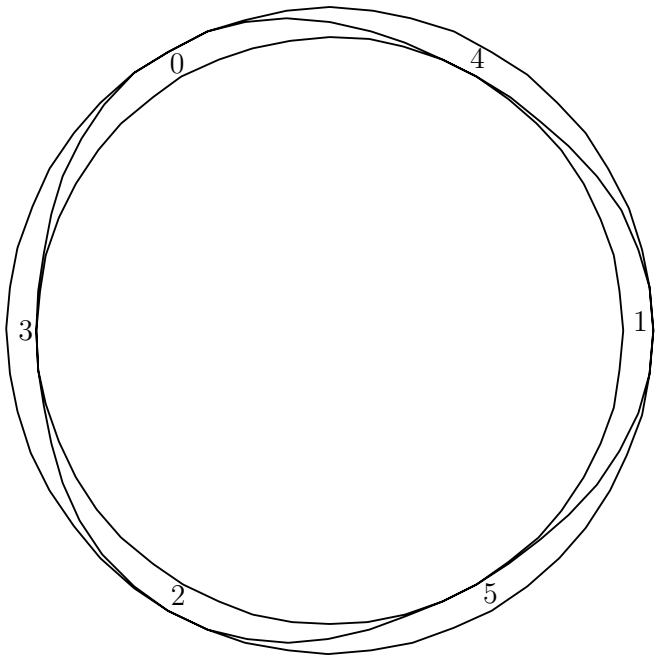

Figura 3.1: Figura esquemática mostrando os gráficos das três curvas $r = 1, r = \lambda, r = f(\theta)$

discos de raio 1 e λ. De fato, os outros casos são exatamente a mesma figura reduzida por um fator λ^n.

Naturalmente, em cada uma dessas luas podemos usar o processo do capítulo anterior, a menos de uma rotação, para obter a curva γ_i e o campo X_i que, satisfazem o enunciado da Proposição 2.3 na lua L_i, para cada $i = 0, 1, \ldots, 5$. Queremos definir uma curva γ e um campo X na coroa circular $\{r \leq 1\} \setminus \{r \leq \lambda\}$.

O campo X é definido simplesmente como $X|_{L_i} = X_i$. Essa definição certamente gera um campo contínuo, pois os campos X_i são tangentes às luas, que coincidem C^∞ nas suas fronteiras.

A tentativa de "juntar" as curvas uma após a outra funciona bem, porque em quase todos os casos γ_i termina exatamente onde γ_{i+1} começa. A única situação que exige atenção é a passagem da última lua interior, 2, para a primeira exterior, 3, em que se faz necessário que a curva volte pela lua 2 até chegar no início da 3.

Definimos primeiro as funções auxiliares $h_i(t) = 8 \cdot \frac{t-(\lambda+\frac{i}{8}(1-\lambda))}{(1-\lambda)}, i = 0 \ldots 7$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

e $\Theta(t) = \pi(1-t) + \frac{4\pi t}{3}$ (assumindo que, exatamente como no desenho, a lua 2 termina em $\theta = \pi$). Também vale a pena definir os intervalos $J_i = \left[\lambda + \frac{i}{8}(1-\lambda), \lambda + \frac{i+1}{8}(1-\lambda)\right], i = 0 \ldots 7$. Note que h_i leva J_i em $[0,1]$, enquanto Θ leva $[0,1]$ em $\left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$.

Seja então $\gamma : [\lambda, 1] \to \mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_i\left(h_i(t)\right), & 0 \leq i \leq 2 \text{ e } t \in J_i \\ \left(f\left(\Theta\left(h_3(t)\right)\right), \Theta\left(h_3(t)\right)\right), & t \in J_3 \\ \gamma_i\left(h_{i+1}(t)\right), & 2 < i \leq 5 \text{ e } t \in J_{i+1} \\ \left(1, \Theta\left(1 - h_7(t)\right)\right), & t \in J_7 \end{cases}$$

Note que a segunda e a quarta linhas estão em coordenadas polares. A quarta linha percorre o círculo maior de $4\pi/3$ (final da lua L_5) a π (início da lua L_0).

Com isso, nós obtivemos uma curva que preenche a coroa circular. Precisamos agora ver que $K_t := \gamma([\lambda, t]) \cup \{r \leq \lambda\}$ é convexo para todo $t \in [\lambda, 1]$. Por (C05, p.480, obs. 4), basta ver que a fronteira de K_t é uma curva convexa. Além disso, por (C05, p.478, Prop. 1), basta ver que a curvatura de $Fr(K_t)$ não muda de sinal.

Se $t \in J_0, \gamma([\lambda, t]) = \gamma_0([0, h_0(t)] \subset L_0$ e pelo Lema 2.16, coincide com $L^{ess}(f_{(0)}, F_{h_0(t)})$, em que $f_{(0)}$ é a menor função que forma L_0. Assim, a fronteira de K_t é o traço de $F_{h_0(t)}$ em L_0 e um segmento de círculo de raio λ em L_1 e L_2. Como tanto o círculo quanto $F_{h_0(t)}$ têm curvatura afastada de zero (ver Lemas 2.11 e 3.1), segue que K_t é um conjunto convexo.

Da mesma forma, se $t \in J_1$, temos que $\gamma[\lambda, t] = L_0^{ess} \cup \gamma_1([0, h_1(t)])$ e por um argumento completamente análogo, K_t é convexo. Mesmo vale para $t \in J_2$ e também $t \in J_3$, já que $\gamma(J_3) \subset \gamma(J_0 \cup J_1 \cup J_2)$.

Se $t \in J_4$, $\gamma([\lambda, t]) = L_0^{ess} \cup L_1^{ess} \cup L_2^{ess} \cup \gamma_3([0, h_4(t)])$. Nesse caso a fronteira de K_t é o traço de $F_{h_4(t)}$ em L_3 e um segmento da curva $r = f_0(\theta)$. Como a curva $r = f(\theta)$ tem curvatura afastada de zero, mais uma vez segue que K_t é convexo. Para J_5 e J_6 é completamente análogo, e $\gamma(J_7) \subset \gamma\left(\bigcup_{0 \leq i \leq 6} J_i\right)$ portanto obtivemos que γ tem a propriedade desejada.

Passemos então à coroa entre os círculos de raio λ e λ^2. Em $[\lambda^2, \lambda]$ defina $\gamma(t) = \lambda\gamma(t/\lambda)$. Note que esta contração não diminui a curvatura da fronteira de K_t. Além disso, $\gamma(\lambda)$ coincide com a definição anterior (graças à "correção" que é feita em J_7), logo definimos uma curva contínua satisfazendo, para todo $t \in [\lambda^2, 1]$, que $K_t = \gamma([\lambda^2, t]) \cup \{r \leq \lambda^2\}$ é um conjunto convexo.

Da mesma forma, podemos definir γ em $[\lambda^{n+1}, \lambda^n]$ fazendo $\gamma(t) = \lambda^n\gamma(t/\lambda^n)$ mantendo a propriedade de que $K_t = \gamma([\lambda^{n+1}, t]) \cup \{r \leq \lambda^{n+1}\}$ é convexo. Fazendo $\gamma(0) = (0,0)$, temos que γ é uma curva contínua que satisfaz

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

o enunciado do Teorema 1.1, o que conclui sua prova.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA