4
Discussões sobre Tangência

Surge, nesse ponto, uma pergunta natural: será que em algum sentido a curva γ pode ser dita tangente ao campo X? Existiria uma definição satisfatória do conceito de tangência que torna isso possível?

Mais precisamente, gostaríamos de encontrar um conceito de tangência de uma curva contínua a um campo contínuo de direções com as seguintes propriedades:

1. O conceito deve ser "natural"; em particular, deve coincidir com o conceito usual para curvas diferenciáveis.

2. O conceito deve ser satisfeito no caso da nossa curva, ou pelo menos no de uma curva com propriedades análogas.

3. Suponha que um campo X é unicamente integrável no sentido usual, isto é, para todo p existe uma única (módulo reparametrizações) curva α_p diferenciável com velocidade não-nula tangente a X passando por p. Então o campo deve permanecer unicamente integrável com a nova definição, isto é, fixo p, qualquer curva tangente (no novo conceito) a X passando por p tem seu traço contido no traço de α_p.

Analisamos abaixo quatro conceitos "naturais". Porém, cada um deles falha ou no item 2 (forte demais) ou no item 3 (fraco demais).

4.1
A razão entre altura e largura

Primeiramente, dada uma curva γ no plano e um campo de direções contínuo X, defina

$$h_X(t,s) = \frac{|\left\langle \gamma(s) - \gamma(t), X^{\perp}(\gamma(t)) \right\rangle|}{\|X^{\perp}(\gamma(t))\|^2}.$$

Uma primeira ideia de "tangência" poderia ser tentar a seguinte definição:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

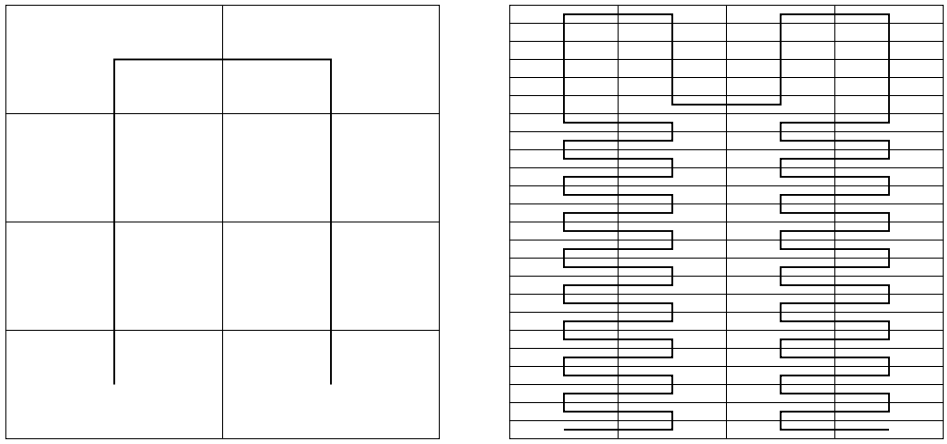

Figura 4.1: Os dois primeiros passos da construção da curva na prova da Proposição 4.2, com $n_1 = 4$ e $n_2 = 6$. São mostradas γ_1 e γ_2.

Definição 4.1 *Uma curva γ é dita R-tangente a um campo de direções X se para todo t,*

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{M_X(t,\delta)}{M_{X^\perp}(t,\delta)} = 0,$$

em que $M_X(t,\delta) = \sup\{h_X(t,s); |s-t| < \delta\}$.

No entanto, esse conceito se mostrou fraco demais, pois verificamos que podíamos ter curvas de Peano R-tangentes a um campo horizontal.

Proposição 4.2 *Existe uma curva de Peano definida no quadrado unitário que é R-tangente a $X = (1,0)$.*

Prova. Seja $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ uma sequência estritamente crescente de números pares. Considere o procedimento usual de Hilbert para encontrar uma curva de Peano; mas em vez de dividirmos o quadrado em quatro quadrados menores, vamos dividi-lo em $2n_1$ retângulos de tamanho $1/n_1 \times 1/2$ traçando uma reta vertical e n_1 retas horizontais. A cada passo dividimos cada um dos retângulos em $2n_k$ retângulos menores, como mostra a figura 4.1.

Depois, construímos uma sequência $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ tal que cada γ_k percorre os retângulos de ordem k, respeitando a ordem que γ_{k-1} percorre os retângulos de ordem $k-1$; veja novamente a figura 4.1.

Esta sequência converge a uma curva de Peano γ tal que $\gamma\left([\frac{i}{2^k n_1 \ldots n_k}, \frac{i+1}{2^k n_1 \ldots n_k}]\right)$ é o i-ésimo retângulo da k-ésima divisão.

Vamos mostrar que essa curva γ é R-tangente ao campo horizontal $X = (1,0)$. Fixe $t \in [0,1]$. Para cada $\delta > 0$ existe k tal que $\frac{1}{2^k n_1 \ldots n_k} < \delta \leq \frac{1}{2^{k-1} n_1 \ldots n_{k-1}}$. Tome i tal que $t \in [\frac{i}{2^k n_1 \ldots n_k}, \frac{i+1}{2^k n_1 \ldots n_k}]$. Note que existe s neste

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

mesmo intervalo tal que

$$h_{X^\perp}(t,s) \geq \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Como $(t-\delta, t+\delta) \supset [\frac{i}{2^k n_1 \ldots n_k}, \frac{i+1}{2^k n_1 \ldots n_k}]$, concluímos que $M_{X^\perp}(t,\delta) \geq \frac{1}{2^{k+1}}$. Além disso $M_X(t,\delta) \leq \frac{1}{n_1 \ldots n_{k-1}}$. Dessa forma,

$$\frac{M_X(t,\delta)}{M_{X^\perp}(t,\delta)} \leq \frac{2^{k+1}}{n_1 \ldots n_{k-1}},$$

que tende a 0 quando $k \to \infty$, isto é, quando $\delta \to 0$.

■

É possível mostrar que a curva γ do Teorema 1.1 é R-tangente ao campo X do mesmo teorema.

4.2
Uma espécie de derivada direcional da altura

Outra idéia foi pensar numa espécie de derivada direcional da componente altura, definida como no item anterior:

Definição 4.3 *Uma curva γ é dita D-tangente a um campo contínuo X se para todo t*

$$\lim_{s \to t} \frac{h_X(t,s)}{s-t} = 0$$

Ou seja, a derivada direcional na componente altura é zero em todo ponto.

A boa notícia é que a "fraqueza" do item anterior não acontece mais:

Proposição 4.4 *Se γ é D-tangente a $X = (1,0)$ então γ é horizontal e, em particular, não é curva de Peano.*

Prova. Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ então $h_X(t,s) = y(s) - y(t)$, de modo que

$$\lim_{s \to t} \frac{h_X(t,s)}{s-t} = y'(t).$$

Assim, $y' \equiv 0$, o que implica que $y \equiv$ constante.

■

No entanto, o conceito se mostrou forte demais, pois se γ é D-tangente a um campo contínuo, então $\gamma([0,1])$ tem área zero, e em particular não pode ser curva de Peano.

Proposição 4.5 *Se γ é D-tangente a um campo contínuo X, então $\gamma([0,1])$ tem área zero.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

Prova. Fixe $\epsilon > 0$. Para cada t, existe intervalo I_t contendo t tal que

$$s \in I_t \setminus \{t\} \Rightarrow \left| \frac{h_X(t,s)}{s-t} \right| < \epsilon$$

Além disso, I_t pode ser escolhido suficientemente pequeno para que $h_{X^\perp}(t,s) \leq 1$ para todo $s \in I_t$ (continuidade de γ).

Portanto $\gamma(I_t)$ está contido num retângulo de altura $\epsilon|I_t|$ e largura 1 (com os lados na direção de $X(\gamma(t))$ e $X^\perp(\gamma(t))$), de modo que área$(\gamma(I_t)) \leq \epsilon|I_t|$.

Naturalmente a união dos I_t's cobre $[0,1]$, então considere uma subcobertura finita $I_{t_1}, \ldots, I_{t_k}$ de modo que nenhum ponto em $[0,1]$ pertença a mais de dois intervalos (se necessário for, podemos reduzir o tamanho de alguns I_{t_j}'s sem perda). Assim,

$$\begin{aligned} \text{área}(\gamma([0,1])) &\leq \sum_{j=1}^{k} \text{área}(\gamma(I_{t_j})) \\ &\leq \epsilon \sum_{j=1}^{k} |I_{t_j}| \\ &\leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

o que completa a prova.

■

4.3
Ângulos tendendo a zero

Seja $0 \leq \angle(X,Y) \leq \pi/2$ o ângulo entre duas direções representadas pelos vetores não-nulos X e Y de $\mathbb{R}^2$.

Definição 4.6 *Uma curva γ é dita A-tangente a um campo contínuo X se para todo t,*

$$\lim_{s \to t} \angle(\gamma(s) - \gamma(t), X(\gamma(t))) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{s \to t} \frac{h_X(t,s)}{h_{X^\perp}(t,s)} = 0,$$

onde os limites acima são tomados apenas nos s em que $\gamma(s) \neq \gamma(t)$.

Esta definição também se mostrou forte demais, devido ao seguinte resultado:

Proposição 4.7 *Seja γ uma curva A-tangente a um campo contínuo X. Se Σ é um segmento de curva sem auto-interseção e transversal ao campo X, então $\gamma([0,1]) \cap \Sigma$ é enumerável. Em particular, γ não é curva de Peano.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

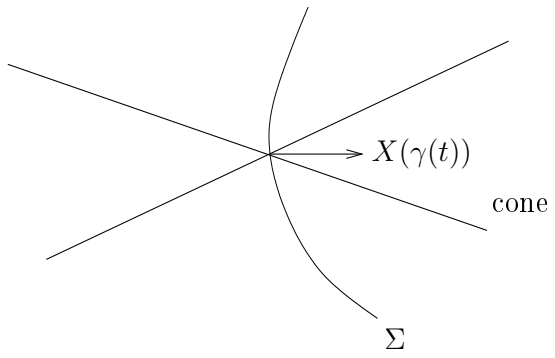

Figura 4.2: Prova da Proposição 4.7.

Prova. Seja $\gamma(t) \in \gamma([0,1]) \cap \Sigma$. Como Σ é transversal a X, segue que existe $\delta > 0$ tal que se $I_t = (t-\delta, t+\delta), \gamma(I_t) \cap \sigma = \emptyset$. Isso é verdade pois podemos fazer δ suficientemente pequeno para que para todo $s \in I_t$ valha $\angle(\gamma(s)-\gamma(t), X(\gamma(t))) \leq \epsilon$, portanto $\gamma(I_t)$ está num certo "cone" (como mostra a figura 4.2) e, assim, para δ suficientemente pequeno $\gamma(I_t)$ está afastado de Σ.

Assim, os pontos de $\gamma([0,1]) \cap \Sigma$ estão isolados, logo é enumerável.

■

4.4 Limite uniforme de curvas C^∞ tangentes a X

Este conceito de tangência é satisfeito para a curva do Teorema 1.1 por construção, mas ele se mostrou fraco demais.

Definição 4.8 *Uma curva γ é dita S-tangente a um campo contínuo X se é limite uniforme de curvas C^∞ que são tangentes (no sentido usual) a X.*

Proposição 4.9 *Seja X o campo e γ a curva construídos na prova da Proposição 2.3. Então qualquer curva contínua σ cuja imagem está contida na imagem de γ é S-tangente ao campo X.*

Daremos aqui um esboço da prova.

Prova. Para cada n natural, considere a família de luas L_ω com $|\omega| = n$, definida no Capítulo 2. Seja G_n a união das fronteiras destas luas. Podemos munir o conjunto G_n de uma estrutura de grafo óbvia, onde os vértices são pontos iniciais ou finais das luas essenciais. Uma aresta ligando dois vértices é uma curva que faz parte da fronteira de uma das luas L_ω.

Observamos as seguintes propriedades da família de grafos: Dado qualquer $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

1. O conjunto dos vértices de G_n é $(\delta/3)$-denso na lua $L = \gamma([0,1])$.

2. Se v, w são vértices de G_n com distância euclidiana menor que δ então existe um caminho de arestas ligando v a w que está completamente contido em $B(v,\epsilon)$, a bola euclidiana de centro v e raio ϵ.

Note que $\delta < \epsilon$.

Agora, considere uma curva contínua $\sigma : [0,1] \to L$. Fixe também $\epsilon > 0$. Vamos encontrar uma curva C^∞ tangente a X que é 2ϵ-próxima de σ, seguindo os seguintes passos:

Primeiro, sejam δ e $n \in \mathbb{N}$ como acima. Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j = 0, 1, \ldots, m-1$, existe um vértice v_j do grafo G_n tal que $\sigma([j/m, (j+1)/m]) \subset B(v_j, \delta/2)$ Em particular, a distância entre v_j e v_{j+1} é menor que δ. Portanto existe uma caminho de arestas ligando v_j a v_{j+1} contido em $B(v_j, \epsilon)$. Justapondo estes caminhos, obtemos uma curva C^∞ por pedaços tangente ao campo X, que é $(\epsilon + \delta/2)$-próxima a σ.

Como $\epsilon + \delta/2 < 2\epsilon$, podemos reparametrizar esta curva de modo a obter uma curva C^∞ que tem velocidade zero nos vértices $v_0, \ldots, v_m$, e é 2ϵ-próxima de σ. ■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA