Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

**Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira**

# Curvas de Peano e Campos de Direções

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática da PUC–Rio

Orientador: Prof. Jairo da Silva Bochi

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2011

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

**Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira**

# Curvas de Peano e Campos de Direções

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós–graduação em Matemática Pura do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

**Prof. Jairo da Silva Bochi**
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

**Prof. Carlos Tomei**
Departamento de Matemática — PUC–Rio

**Prof. Martin Andersson**
Instituto de Matemática — UFF

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**
Departamento de Matemática — PUC–Rio

**Prof. Ricardo Sá Earp**
Departamento de Matemática — PUC–Rio

**Prof. José Eugênio Leal**
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 21 de Fevereiro de 2011

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

Todos os direitos reservados. Proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira**

Graduou-se em Matemática Pura na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em janeiro de 2009.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

Ficha Catalográfica

Pereira, Pedro Henrique Milet Pinheiro

Curvas de Peano e Campos de Direções / Pedro Henrique Milet Pinheiro Pereira; orientador: Jairo da Silva Bochi. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2011.

v., 39 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Curvas de Peano. 3. Campos de Direções. 4. Convexidade. I. Bochi, Jairo da Silva. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

# Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Jairo da Silva Bochi, por me apoiar e indicar os melhores caminhos para a realização deste trabalho.

Ao CNPq, à FAPERJ e à PUC–Rio, em particular o Departamento de Matemática, por me possibilitarem a concretização desta obra.

Aos meus pais, pelo apoio em todos os momentos.

Ao pessoal do Departamento de Matemática, em especial à Creuza, pela eficiência na solução de vários problemas.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

# Resumo

Pereira, Pedro Henrique Milet Pinheiro; Bochi, Jairo da Silva. **Curvas de Peano e Campos de Direções**. Rio de Janeiro, 2011. 39p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

M. Mihalik e A. Wieczorek perguntaram se é possível encontrar uma curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de Peano com a propriedade adicional de que $\gamma([a,b])$ é um subconjunto convexo do quadrado unitário para todo $0 \leq a \leq b \leq 1$. Esse problema se mostrou bastante complexo, mas outras perguntas semelhantes puderam ser respondidas. Esta dissertação mostra um processo de construção de uma curva de Peano $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ tal que os conjuntos $K_t = \gamma([0,t])$ são compactos convexos cujo bordo é $C^\infty$ e tangente a um campo de direções contínuo (exceto em $\gamma(0)$). Finalmente, discute-se se em algum sentido é possível dizer que a curva de Peano é tangente ao campo de direções.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

## Palavras–chave

Curvas de Peano. Campos de Direções. Convexidade.

## Abstract

Pereira, Pedro Henrique Milet Pinheiro; Bochi, Jairo da Silva (Advisor). **Peano Curves and Line Fields**. Rio de Janeiro, 2011. 39p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

M. Mihalik e A. Wieczorek asked if it is possible to find a Peano curve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ such that $\gamma([a,b])$ is a convex subset of the unit square for all $0 \leq a \leq b \leq 1$. The problem itself seems to be quite complex, but some similar problems could be solved. This dissertation shows a way of constructing a Peano curve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ such that the sets $K_t = \gamma([0,t])$ are convex, compact and their boundaries $\partial K_t$ are $C^\infty$ and tangent to a continuous line field (except in $\gamma(0)$). Lastly, we discuss whether one can say that the Peano curve itself is tangent to the line field.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA

## Keywords

Peano Curves. Line Fields. Convexity.

# Sumário


1 Introdução **8**

2 O Processo Básico de Construção **11**
2.1 Luas e suas partições 11
2.2 Definição da família de luas 14
2.3 Construção do conjunto de Cantor $K$ 17
2.4 Definição da família de funções-teto 17
2.5 Definição do campo de direções 19
2.6 Definição da sequência de curvas 20

3 Adicionando as Propriedades de Convexidade **25**

4 Discussões sobre Tangência **29**
4.1 A razão entre altura e largura 29
4.2 Uma espécie de derivada direcional da altura 31
4.3 Ângulos tendendo a zero 32
4.4 Limite uniforme de curvas $C^\infty$ tangentes a $X$ 33

5 Observações Finais e Perguntas **35**
5.1 Fazendo $K_t$ ser quase um disco 35
5.2 Refazendo a construção sem os gaps 35
5.3 Fazendo $\gamma$ ser Hölder 37
5.4 Outras ideias 37


PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912353/CA