3
Curvas Implícitas no $\mathbb{R}^4$ e Curvaturas

Nesse capítulo continuaremos tratando dos conceitos básicos de geometria diferencial, mas agora, referentes a curvas implícitas no $\mathbb{R}^4$. Esse estudo é baseado no recente trabalho de O. Aléssio em (1).

3.1
Hipersuperfícies Implícitas

Considere uma função $f : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. O *vetor gradiente* de f, denotado por ∇f, é uma aplicação diferenciável definida por $\nabla f : U \to \mathbb{R}^4$, que leva $\mathbf{p}$ em $\nabla f(\mathbf{p}) = (f_x(\mathbf{p}), f_y(\mathbf{p}), f_z(\mathbf{p}), f_w(\mathbf{p}))$, onde f_x, f_y, f_z e f_w são as derivadas parciais de f com relação a x, y, z e w, respectivamente.

Seja c um número real pertencente ao conjunto imagem de f. O *conjunto de nível* c de f é definido como $f^{-1}(c) = \{(x, y, z, w) \in D; f(x, y, z, w) = c\}$. Dessa forma, $f^{-1}(c)$ é o conjunto de todas as soluções em D da equação $f(x, y, z, w) = c$. O nível c é dito ser um *valor regular* de f se ∇f em $f^{-1}(c)$ nunca se anula.

Teorema 3.1 *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ função de classe $\mathcal{C}^1$ e $c \in f(U)$ é um valor regular de f, então $f^{-1}(c)$ é uma variedade de dimensão 3 no $\mathbb{R}^4$.*

Daqui por diante, chamaremos as variedades de dimensão 3 que correspondem ao conjunto de nível de um valor regular c de uma função $f : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de *hipersuperfícies implícitas*.

Para cada ponto $\mathbf{p} \in f^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^4$, o vetor $\nabla f(\mathbf{p})$ é normal à hipersuperfície $f^{-1}(c)$. Denotaremos o vetor normal unitário à hipersuperfície $f^{-1}(c)$ no ponto $\mathbf{p}$ por $\mathbf{N}^f(\mathbf{p}) = \frac{\nabla f(\mathbf{p})}{\|\nabla f(\mathbf{p})\|}$.

No $\mathbb{R}^4$, o hiperplano que passa por um ponto $\mathbf{p}_0$ pertencente a uma hipersuperfície $f^{-1}(c)$ e que ainda é perpendicular ao vetor $\nabla f(\mathbf{p}_0)$ denomina-se hiperplano tangente à hipersuperfície $f^{-1}(c)$, cuja equação pode ser escrita como $\nabla f(\mathbf{p}_0) \cdot [\mathbf{p} - \mathbf{p}_0] = 0$.

3.2
Curvas Implícitas e o Teorema da Função Implícita

Seja c um valor regular para as funções $f : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e $h : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbf{R}$. Dizemos que as três hipersuperfícies implícitas $S_f = f^{-1}(c)$, $S_g = g^{-1}(c)$, $S_h = h^{-1}(c)$ se *interceptam transversalmente* se, para todo

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912372/CA

ponto $\mathbf{p} \in S_f \cap S_g \cap S_h$, temos que $\nabla f(\mathbf{p})$, $\nabla g(\mathbf{p})$ e $\nabla h(\mathbf{p})$ são linearmente independentes.

Quando as superfícies implícitas $S_f = f^{-1}(c)$, $S_g = g^{-1}(c)$ e $S_h = h^{-1}(c)$ se interceptam transversalmente, então dizemos que o conjunto de pontos $C^c_{fgh} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4 | f(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p}) = h(\mathbf{p}) = c\}$ é uma *curva implícita* no $\mathbb{R}^4$.

O Teorema da Função Implícita fala que uma curva implícita é localmente parametrizável por uma das quatro coordenadas.

Teorema 3.2 ***(Teorema da Função Implícita)*** *Sejam $f, g, h : U \times V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ três funções de classe $\mathcal{C}^k, k \geq 1$ e $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0) \in U \times V$ um ponto. Se $f(\mathbf{p}_0) = g(\mathbf{p}_0) = h(\mathbf{p}_0) = 0$ e*

$$\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(y,z,w)}(\mathbf{p}_0) := \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}_0) & \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{p}_0) & \frac{\partial f}{\partial w}(\mathbf{p}_0) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{p}_0) & \frac{\partial g}{\partial z}(\mathbf{p}_0) & \frac{\partial g}{\partial w}(\mathbf{p}_0) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(\mathbf{p}_0) & \frac{\partial h}{\partial z}(\mathbf{p}_0) & \frac{\partial h}{\partial w}(\mathbf{p}_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

então existe uma vizinhança U_0 em torno do ponto x_0 em U, existe uma vizinhança V_0 em torno do ponto (y_0, z_0, w_0) em V, e uma única aplicação $\varphi : U_0 \to V_0$ tal que $\varphi(x) = (y(x), z(x), w(x))$ com

$$\begin{cases} f(x, y(x), z(x), w(x)) = 0 \\ g(x, y(x), z(x), w(x)) = 0 \\ h(x, y(x), z(x), w(x)) = 0 \end{cases}$$

para todo $x \in U_0$. Além disso, a aplicação φ é de classe $\mathcal{C}^k$.

Neste trabalho, vamos calcular todas as propriedades geométricas diferenciais de uma curva no $\mathbb{R}^4$ obtida pela interseção de três hipersuperfícies implícitas.

3.3 Curvas em uma Hipersuperfície

Dizemos que uma curva paramétrica $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ está sobre a hipersuperfície implícita de nível 0 de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, se para qualquer $t \in I$ temos que $f \circ \mathbf{r}(t) = 0$.

Considere que $\mathbf{r}$ é uma curva parametrica de classe $\mathcal{C}^4$ sobre uma hipersuperfície implícita $f^{-1}(0)$, onde f também é de classe $\mathcal{C}^4$.

Derivando ambos os lados da equação $f \circ \mathbf{r}(t) = 0$, podemos escrever que:

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = 0$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912372/CA

Derivando mais três vezes a equação anterior, obtemos:

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) = -(\dot{\mathbf{r}}(t))^T Hf(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t),$$

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(t) = -(\dot{\mathbf{r}}(t))^T \frac{d}{dt}(Hf(\mathbf{r}(t)))\dot{\mathbf{r}}(t) - 3(\dot{\mathbf{h}}(t))^T Hf(\mathbf{r}(t))\ddot{\mathbf{r}}(t),$$

$$\nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \ddddot{\mathbf{r}}(t) = -(\dot{\mathbf{r}}(t))^T \frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}(Hf(\mathbf{r}(t))))\dot{\mathbf{r}}(t) - 5(\dot{\mathbf{r}}(t))^T \frac{d}{dt}(Hf(\mathbf{r}(t)))\ddot{\mathbf{r}}(t)$$
$$-3(\ddot{\mathbf{r}}(t))^T Hf(\mathbf{r}(t))\ddot{\mathbf{r}}(t) - 4(\dot{\mathbf{r}}(t))^T Hf(\mathbf{r}(t))\dddot{\mathbf{r}}(t).$$

onde $Hf(x,y,z,w)$ denota a matriz Hessiana de $f(x,y,z,w)$:

$$Hf(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y,z,w) & f_{xy}(x,y,z,w) & f_{xz}(x,y,z,w) & f_{xw}(x,y,z,w) \\ f_{yx}(x,y,z,w) & f_{yy}(x,y,z,w) & f_{yz}(x,y,z,w) & f_{yw}(x,y,z,w) \\ f_{zx}(x,y,z,w) & f_{zy}(x,y,z,w) & f_{zz}(x,y,z,w) & f_{zw}(x,y,z,w) \\ f_{wx}(x,y,z,w) & f_{wy}(x,y,z,w) & f_{wz}(x,y,z,w) & f_{ww}(x,y,z,w) \end{pmatrix}.$$

3.4
Curvas com Parametrização Especial em uma Hipersuperfície

Nosso objetivo nesta seção é particularizar o conjunto de equações obtidas na seção anterior para uma curva com uma parametrização especial em uma hipersuperfície implícita. Essa parametrização que proporemos seria uma equivalente à parametrização local proposta no Teorema da Função Implícita.

Seja $\mathbf{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ uma curva paramétrica de classe $\mathcal{C}^4$ tal que $\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x), w(x))$. Suponha que $\mathbf{r}$ esteja sobre uma hipersuperfície implícita $f^{-1}(0)$, onde $f : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ seja também de classe $\mathcal{C}^4$. Como $f(\mathbf{r}(x)) = 0$, temos que:

$$\nabla f(\mathbf{r}(x)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(x) = 0, \tag{3-1}$$

$$\nabla f(\mathbf{r}(x)) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(x) = -(\dot{\mathbf{r}}(x))^T Hf(\mathbf{r}(x))\dot{\mathbf{r}}(x), \tag{3-2}$$

$$\nabla f(\mathbf{r}(x)) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(x) = -(\dot{\mathbf{r}}(x))^T \frac{d}{dx}(Hf(\mathbf{r}(x)))\dot{\mathbf{r}}(x) - 3(\dot{\mathbf{r}}(x))^T Hf(\mathbf{r}(x))\ddot{\mathbf{r}}(x),$$
$$\nabla f(\mathbf{r}(x)) \cdot \ddddot{\mathbf{r}}(x) = -(\dot{\mathbf{r}}(x))^T \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(Hf(\mathbf{r}(x))))\dot{\mathbf{r}}(x) - 5(\dot{\mathbf{r}}(x))^T \frac{d}{dx}(Hf(\mathbf{r}(x)))\ddot{\mathbf{r}}(x) \tag{3-3}$$

$$-3(\ddot{\mathbf{r}}(x))^T Hf(\mathbf{r}(x))\ddot{\mathbf{r}}(x) - 4(\dot{\mathbf{r}}(x))^T Hf(\mathbf{r}(x))\dddot{\mathbf{r}}(x). \tag{3-4}$$

Na próxima seção, trataremos de forma mais direta dos cálculos das propriedades geométricas diferenciais para um ponto pertencente a uma curva de interseção de três hipersuperfícies implícitas no $\mathbb{R}^4$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912372/CA

3.5
Propriedades Geométricas de uma Curva Implícita no $\mathbb{R}^4$

Considere que as funções $f : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $g : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e $h : U \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbf{R}$ possuem 0 como valor regular e que as superfícies implícitas $f^{-1}(0)$, $g^{-1}(0)$ e $h^{-1}(0)$ se interceptam transversalmente. Seja $C^0_{fgh} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4 | f(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p}) = h(\mathbf{p}) = 0\}$ a curva implícita no $\mathbb{R}^4$ dada pela interseção dessas hipersuperfícies.

Como as hipersuperfícies se interceptam transversalmente, então pelo menos um dos determinantes $\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(y,z,w)}, \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,z,w)}, \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,w)}, \frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}$ deve ser diferente de zero num ponto $\mathbf{p}_0$ pertencente a curva C^0_{fgh}.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(y,z,w)}(\mathbf{p}_0) \neq 0$ num ponto $\mathbf{p}_0 \in C^0_{fgh}$. Então, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma curva $\mathbf{r}(x) = (x, y(x), z(x), w(x))$ que parametriza localmente a curva implícita C^0_{fgh} numa vizinhança em torno de $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0)$.

Queremos agora calcular os vetores tangente, normal, binormal e trinormal da curva $\mathbf{r}$ no ponto $\mathbf{p}_0 \in C^0_{fgh}$, assim como as curvaturas generalizadas da curva nesse mesmo ponto.

3.5.1
Cálculo do Vetor $\dot{\mathbf{r}}(x_0)$

O vetor $\dot{\mathbf{r}}(x_0)$ é calculado resolvendo um sistema de 3 equações lineares com três incógnitas, a saber: $\dot{y}(x_0), \dot{z}(x_0)$ e $\dot{w}(x_0)$ (já que $\dot{\mathbf{r}}(x) = (1, \dot{y}(x_0), \dot{z}(x_0), \dot{w}(x_0))$). Usamos a equação 3-1 para montar esse sistema, que fica da seguinte forma:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{p}_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(x_0) = 0 \\ \nabla g(\mathbf{p}_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(x_0) = 0 \\ \nabla h(\mathbf{p}_0) \cdot \dot{\mathbf{r}}(x_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} f_y(\mathbf{p}_0) & f_z(\mathbf{p}_0) & f_w(\mathbf{p}_0) \\ g_y(\mathbf{p}_0) & g_z(\mathbf{p}_0) & g_w(\mathbf{p}_0) \\ h_y(\mathbf{p}_0) & h_z(\mathbf{p}_0) & h_w(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}(x_0) \\ \dot{z}(x_0) \\ \dot{w}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x(\mathbf{p}_0) \\ -g_x(\mathbf{p}_0) \\ -h_x(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix}.$$

3.5.2
Cálculo do Vetor $\ddot{\mathbf{r}}(x_0)$

O vetor $\ddot{\mathbf{r}}(x_0) = (0, \ddot{y}(x_0), \ddot{z}(x_0), \ddot{w}(x_0))$ é calculado de forma semelhante, mas agora utilizamos a equação 3-2 para montar um novo sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{p}_0) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(x_0) = -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hf(\mathbf{p}_0)\dot{\mathbf{r}}(x_0) \\ \nabla g(\mathbf{p}_0) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(x_0) = -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hg(\mathbf{p}_0)\dot{\mathbf{r}}(x_0) \\ \nabla h(\mathbf{p}_0) \cdot \ddot{\mathbf{r}}(x_0) = -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hh(\mathbf{p}_0)\dot{\mathbf{r}}(x_0) \end{cases}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912372/CA

que na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} f_y(\mathbf{p}_0) & f_z(\mathbf{p}_0) & f_w(\mathbf{p}_0) \\ g_y(\mathbf{p}_0) & g_z(\mathbf{p}_0) & g_w(\mathbf{p}_0) \\ h_y(\mathbf{p}_0) & h_z(\mathbf{p}_0) & h_w(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{y}(x_0)) \\ \ddot{z}(x_0) \\ \ddot{w}(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hf(\mathbf{p}_0)\,\dot{\mathbf{r}}(x_0) \\ -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hg(\mathbf{p}_0)\,\dot{\mathbf{r}}(x_0) \\ -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hh(\mathbf{p}_0)\,\dot{\mathbf{r}}(x_0) \end{bmatrix},$$

onde $\dot{\mathbf{r}}(x_0)$ foi obtido resolvendo o primeiro sistema.

3.5.3
Cálculo do Vetor $\dddot{\mathbf{r}}(x_0)$

O vetor $\dddot{\mathbf{r}}(x_0) = (0, \dddot{y}(x_0), \dddot{z}(x_0), \dddot{w}(x_0))$ é também calculado de forma análoga. Montamos um novo sistema de equações lineares utilizando a equação 3-3:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{p}_0) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(x_0) = -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hf(\mathbf{p}_0))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 3(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hf(p_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ \nabla g(\mathbf{p}_0) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(x_0) = -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hg(\mathbf{p}_0))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 3(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hg(p_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ \nabla h(\mathbf{p}_0) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(x_0) = -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hh(\mathbf{p}_0))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 3(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hh(p_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) \end{cases}$$

que na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} f_y(\mathbf{p}_0) & f_z(\mathbf{p}_0) & f_w(\mathbf{p}_0) \\ g_y(\mathbf{p}_0) & g_z(\mathbf{p}_0) & g_w(\mathbf{p}_0) \\ h_y(\mathbf{p}_0) & h_z(\mathbf{p}_0) & h_w(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dddot{y}(x_0) \\ \dddot{z}(x_0) \\ \dddot{w}(x_0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hf((\mathbf{p}_0)))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 3(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hf(\mathbf{p}_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hg((\mathbf{p}_0)))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 3(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hg(\mathbf{p}_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hh((\mathbf{p}_0)))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 3(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hh(\mathbf{p}_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) \end{bmatrix}$$

3.5.4
Cálculo do Vetor $\ddddot{\mathbf{r}}(x_0)$

Finalmente, o vetor $\ddddot{\mathbf{r}}(x_0) = (0, \ddddot{y}(x_0), \ddddot{z}(x_0), \ddddot{w}(x_0))$ é calculado resolvendo o seguinte sistema de equações lineares dado pelo uso da equação 3-4:

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{p}_0) \cdot \ddddot{\mathbf{r}}(x_0) = -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(Hf(p_0)))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 5(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hf(\mathbf{p}_0))\ddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ \qquad -3(\ddot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hf(\mathbf{p}_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) - 4(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hf(\mathbf{p}_0)\dddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ \nabla g(\mathbf{p}_0) \cdot \ddddot{\mathbf{r}}(x_0) = -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(Hh(p_0)))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 5(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hh(\mathbf{p}_0))\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ \qquad -3(\mathbf{h}''(x_0))^T Hh(\mathbf{p}_0)\,\mathbf{h}''(x_0) - 4(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hh(\mathbf{p}_0)\dddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ \nabla h(\mathbf{p}_0) \cdot \ddddot{\mathbf{r}}(x_0) = -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(Hg(p_0)))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 5(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hg(\mathbf{p}_0))\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ \qquad -3(\ddot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hg(\mathbf{p}_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) - 4(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hg(\mathbf{p}_0)\dddot{\mathbf{r}}(x_0) \end{cases}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912372/CA

que na forma matricial fica:

$$\begin{bmatrix} f_y(\mathbf{p}_0) & f_z(\mathbf{p}_0) & f_w(\mathbf{p}_0) \\ g_y(\mathbf{p}_0) & g_z(\mathbf{p}_0) & g_w(\mathbf{p}_0) \\ h_y(\mathbf{p}_0) & h_z(\mathbf{p}_0) & h_w(\mathbf{p}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dddot{y}(x_0) \\ \dddot{z}(x_0) \\ \dddot{w}(x_0) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(Hf(p_0)))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 5(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hf(\mathbf{p}_0))\ddot{\mathbf{r}}(x_0) - \\ 3(\ddot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hf(\mathbf{p}_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) - 4(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hf(\mathbf{p}_0)\dddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(Hh(p_0)))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 5(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hh(\mathbf{p}_0))\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) - \\ 3(\mathbf{h}''(x_0))^T Hh(\mathbf{p}_0)\,\mathbf{h}''(x_0) - 4(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hh(\mathbf{p}_0)\dddot{\mathbf{r}}(x_0) \\ -(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(Hg(p_0)))\dot{\mathbf{r}}(x_0) - 5(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T \frac{d}{dx}(Hg(\mathbf{p}_0))\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) - \\ 3(\ddot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hg(\mathbf{p}_0)\,\ddot{\mathbf{r}}(x_0) - 4(\dot{\mathbf{r}}(x_0))^T Hg(\mathbf{p}_0)\dddot{\mathbf{r}}(x_0) \end{bmatrix}$$

3.5.5
Obtendo as propriedades geométricas

Encontradas as expressões das derivadas de $\mathbf{r}$ até a 4ª ordem na vizinhança de um ponto $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}(x_0)$, aplicamos o Teorema 2.2 para determinar as propriedades geométricas diferenciais que desejamos nesse ponto. É importante lembrar a ordem em que são feitos os cálculos até a obtenção das três curvaturas k_1, k_2 e k_3:

$$\mathbf{t}(x_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(x_0)}{\|\dot{\mathbf{r}}(x_0)\|}$$

$$\mathbf{b}_2(x_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(x_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(x_0) \times \dddot{\mathbf{r}}(x_0)}{\|\dot{\mathbf{r}}(x_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(x_0) \times \dddot{\mathbf{r}}(x_0)\|},$$

$$\mathbf{b}_1(x_0) = \frac{\mathbf{b}_2(x_0) \times \dot{\mathbf{r}}(x_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(x_0)}{\|\mathbf{b}_2(x_0) \times \dot{\mathbf{r}}(x_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(x_0)\|},$$

$$\mathbf{n}(x_0) = \frac{\mathbf{b}_1(x_0) \times \mathbf{b}_2(x_0) \times \dot{\mathbf{r}}(x_0)}{\|\mathbf{b}_1(x_0) \times \mathbf{b}_2(x_0) \times \dot{\mathbf{r}}(x_0)\|},$$

$$k_1(x_0) = \frac{<\mathbf{n}(x_0), \ddot{\mathbf{r}}(x_0)>}{\|\dot{\mathbf{r}}(x_0)\|^2},$$

$$k_2(x_0) = \frac{<\mathbf{b}_1(x_0), \dddot{\mathbf{r}}(x_0)>}{\|\dot{\mathbf{r}}(x_0)\|^3\, k_1(x_0)},$$

$$k_3(x_0) = \frac{<\mathbf{b}_2(x_0), \ddddot{\mathbf{r}}(x_0)>}{\|\dot{\mathbf{r}}(x_0)\|^4\, k_1(x_0)\, k_2(x_0)}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0912372/CA