

# 1

## Introdução

O presente trabalho resulta de distintos interesses de pesquisa cujo cruzamento foi ocasionado no contexto de formação do Grupo Conesul de Filosofia das Ciências Formais. Uma vez que a Filosofia e a História da Lógica, da Matemática e da Computação, as áreas para as quais convergem os referidos interesses, são em maior ou menor medida (e com maior ou menor acerto) tratados ao longo de toda a tese, não nos pareceu equivocado sublinhar, de início, os estreitos vínculos de nosso estudo com alguns trabalhos desenvolvidos por membros do Grupo nos últimos anos. Não apenas na determinação do tema e dos problemas a serem pesquisados, senão na escolha das perspectivas pelas quais a investigação efetivamente se desenvolveu – quando não subcrevendo a algumas delas, procurando em outras elementos a partir dos quais construir uma perspectiva própria – os encontros filosóficos que constituem as atividades do Grupo foram, por assim dizer, as condições de possibilidade desta pesquisa.

Assim, como indica nosso título, tratamos de construir uma leitura das controvérsias filosóficas erigidas em torno da solução de um clássico problema matemático, a prova do Teorema das Quatro Cores (T4C), desde uma perspectiva em filosofia da matemática à qual atribuímos a característica de ser wittgensteiniana. Desse modo, a título de defesa, um duplo esclarecimento é necessário. É preciso primeiro indicar as peculiaridades do caso selecionado como objeto de estudo, seus possíveis atrativos filosóficos. Em segundo lugar, traçar as linhas da perspectiva de Wittgenstein em filosofia da matemática que permitem reconhecer sua relevância para o tratamento filosófico do caso em questão. Indicar as vias desse esclarecimento ao mesmo tempo em que se apresenta a estrutura do trabalho, é, assim, o objetivo dessa apresentação.

No primeiro capítulo, o trabalho lida com a primeira parte da tarefa: a apresentação de informações históricas e conceituais acerca da formulação do Problema das Quatro Cores (P4C) e das principais tentativas de solucioná-lo. Mostramos que o problema formulado por F. Guthrie em 1852 – uma pergunta pela possibilidade de que qualquer mapa seja colorido somente com quatro cores sem que regiões vizinhas comportem a mesma cor – passou por uma série de transformações conceituais e metodológicas até que sua solução fosse

definitivamente estabelecida. Essas transformações consistem, por exemplo, na definição precisa do tipo de mapa em questão no enunciado do teorema, e não tanto na escolha da estratégia geral que mobiliza os conceitos centrais da prova, estratégia que, afinal, é a mesma desde a primeira tentativa de solução. Trata-se de uma redução ao absurdo que contém uma prova por casos na qual operam conceitos como os de conjunto inevitável de configurações e de redutibilidade de mapas ou configurações. Ademais, ocorreram transformações nos métodos específicos de construção da prova – principalmente nos métodos de redução de mapas. Até aí, poderia parecer, o processo de construção da solução do P4C, da prova do teorema, não difere fundamentalmente de outros processos de solução de problemas matemáticos cujos resultados são estabelecidos somente séculos após sua primeira e intuitiva formulação, pois dependem de diversos desenvolvimentos conceituais e metodológicos em distintas áreas da matemática, bem como da solução de problemas relacionados.

A principal razão pela qual a solução do P4C suscitou interesse, tanto na comunidade matemática quanto na filosófica, é a participação indispensável de computadores em sua construção – embora costume também figurar nos comentários a questão da simplicidade da formulação do problema associada à complexidade de sua solução. Quanto aos membros da comunidade matemática, como buscamos mostrar na terceira seção do primeiro capítulo, as respostas ao resultado apresentado por Appel e Haken em 1977 compartilham, por um lado, críticas quanto à aparente falta de estrutura (e mesmo de elegância) da prova – um aspecto relacionado à natureza combinatória da solução.

Por outro lado, entretanto, os matemáticos envolvidos mais diretamente com teoria dos grafos – um dos ramos da matemática mobilizado na solução do problema – e com o domínio da computação (programação) sustentaram, desde o aparecimento das primeiras críticas, que o tipo de complexidade calculatória ou computacional da prova não difere daquele presente em outras provas nesse domínio da matemática. Ao apresentar os pontos principais dessas primeiras disputas, lançamos mão pela primeira vez de uma ênfase nos aspectos pragmáticos (primeiramente denominados *retórico-dialéticos*) dos fenômenos matemáticos de prova.

Do ponto de vista filosófico a prova do T4C chegou a ser objeto de consideração por dois ilustres representantes da tradição de filósofos-lógicos-

matemáticos, antes de ter adquirido cidadania filosófica por intermédio do artigo de Thomas Tymoczko (1979). O primeiro capítulo encerra, assim, com uma breve apresentação das considerações de Georg Kreisel e Hao Wang sobre a prova (ambas formuladas ainda em 1977), ficando para o terceiro capítulo a tarefa de mostrar em maior detalhe o argumento central do artigo seminal de Tymoczko.

Antes, entretanto, de seguir a estratégia cronológica de apresentação das controvérsias em torno da prova do T4C, fornecemos no segundo capítulo da tese algumas distinções conceituais que nos pareceram importantes de dispor, não apenas com a finalidade de por assim dizer situar a prova do T4C no quadro do universo das práticas matemáticas, mas também para destacar alguns pontos específicos das controvérsias que nos interessava analisar.

A primeira distinção da qual trata o segundo capítulo é entre provas em geral ou *simpliciter*, provas formais e provas assistidas por computador. A apresentação da distinção é precedida por uma seção na qual tratamos sucintamente da concepção de prova de Oswald Chateaubriand, a partir da qual a distinção que fornecemos foi elaborada. É relevante reconhecer que nosso recorte da concepção de Chateaubriand não lhe faz justiça, por exemplo, no que diz respeito às conexões das discussões sobre prova matemática com o todo de *Logical Forms*. Talvez possamos dizer a nosso favor que dada justamente a riqueza temática e problemática da obra, um trabalho como o nosso não poderia, sem prejuízo à sua identidade, debruçar-se com o devido cuidado sobre ela.

A segunda distinção do segundo capítulo, por sua vez, originou-se da necessidade de complementar a primeira delas – entre, digamos, tipos gerais de provas – com uma distinção que pudesse dar conta da variedade de modos de conceber as provas matemáticas. A partir da sugestão contida em um trabalho de Göran Sundholm introduzimos, então, a distinção entre provas como atos, como objetos e como traços. Desde o primeiro ponto de vista, como atos, provas são atividades discursivas de manipulação regrada de símbolos e conceitos matemáticos. As provas como objetos, por sua vez, são as construções que resultam dos processos ou atos de prova. Já as provas como traços podem ser entendidas como conjuntos de instruções que regem a atividade de provar (daí nossa comparação do ato de provar com o de preparar um prato seguindo uma receita) ou, ainda, como mapas, na medida em que mapas podem servir aos mesmos propósitos prescritivos de uma receita. A introdução da imagem das

provas como mapas, entretanto, sugere certa ambiguidade: afinal mapas também são objetos – o que talvez apenas indique que a distinção é legítima em se tratando de dar conta das diversas dimensões das provas matemáticas.

Ainda na seção dedicada à distinção entre provas como atos, objetos e traços, realizamos outra série de breves considerações, dessa vez acerca da tradição do conhecimento simbólico. Com base na recente publicação sobre o tema, *Symbolic Knowledge from Leibniz to Husserl*, especialmente no texto de Oscar Miguel Esquisabel sobre o conceito de conhecimento simbólico em Leibniz, procuramos articular, talvez com pouco sucesso, os principais aspectos do pensamento simbólico, pensamento que depende do uso de fórmulas e diagramas, com os termos da distinção entre provas como atos, objetos e traços.

No terceiro capítulo do trabalho aprofundamos a descrição do panorama teórico no qual o artigo de Tymoczko veio à luz. Falo em aprofundar, o que pode parecer inadequado, em virtude do fato de que na seção do capítulo anterior na qual havíamos introduzimos a distinção entre provas *simpliciter*, formais e por computador (seção 2.3), realizamos, talvez de um modo excessivamente ensaístico, alguns comentários de teor histórico acerca das respostas dos assim chamados filósofos fundacionalistas à famigerada crise dos fundamentos da matemática, ocorrida no final do século XIX. Procuramos, então, traçar de modo bastante geral um quadro que, na seção introdutória do terceiro capítulo, como dizíamos, aprofundamos, na medida em que apontamos ali para as peculiares posições de Imre Lakatos e Hilary Putnam (associadas por Tymoczko ao rótulo de quase-empirismo) frente à referida crise dos fundamentos e às respostas fundacionalistas. Desse modo, assim esperamos, ficou minimamente delimitado o horizonte filosófico a partir do qual é preciso compreender aquele que denominamos de *argumento da introdução da experimentação na matemática via prova do T4C* (AIE).

Nossa reconstrução da argumentação de Tymoczko na forma do AIE nos conduziu a um comentário de cada uma das suas premissas e conclusões antes de analisar em algum detalhe o modo como o autor aciona a tradicional dicotomia entre as noções de *a priori* e *a posteriori*. Se falamos no plural sobre a conclusão do AIE, vale notar, trata-se unicamente do fato de que além da conclusão específica do argumento – a de que a prova do T4C é por assim dizer um híbrido de prova e experimento, de modo que somos forçados a uma “modificação do

conceito de prova” – o artigo de Tymoczko advoga por conclusões ainda mais gerais, acerca das tradicionais relações comparativas entre matemáticas e ciências naturais. Apesar de que as crenças que julga ameaçadas pelo caso do T4C sejam todas mencionadas nesse capítulo, apenas no quinto e último capítulo que encerramos nossa análise das conclusões do AIE.

Após um exame relativamente mais detido da primeira premissa do argumento de Tymoczko – que mobiliza, além da dicotomia *a priori* x empírico, os conceitos de convencimento, prova formalizável e prova inspecionável – apresentamos em uma subseção do capítulo a concepção funcional de *a priori* desenvolvida em meados da década de 1940 por Arthur Pap. Do amplo espectro que constitui a curta, porém prolífica, carreira acadêmica de Pap (onde se trata mormente, e de um maneira bastante original de temas de filosofia da lógica e da ciência), apelamos a dois textos de sua juventude: um artigo no qual apresenta uma distinção entre tipos de proposição (e de conhecimento) *a priori* e sua premiada tese de doutoramento, cujo objetivo principal é aplicar a concepção funcional do *a priori* aos princípios da física clássica. Nosso intuito com essa aproximação aos textos de Pap consistia basicamente na tentativa de fornecer de uma chave alternativa de (re)leitura da dicotomia *a priori versus* empírico tal como acionada no AIE de Tymoczko e, além disso, na sugestão de sua compatibilidade com a perspectiva wittgensteiniana que procuramos traçar nos dois capítulos finais.

O quarto capítulo do trabalho lida, então, com a disposição das controvérsias filosóficas que se seguiram ao artigo de Tymoczko – o que realizamos através de outra apropriação, dessa vez de uma estratégia utilizada por Dag Prawitz no trabalho relativamente recente que dedica ao duplo tema da verificação formal de programas e do uso de programas computacionais em provas matemáticas. Nosso “panorama à la Prawitz” apresenta, assim, os principais tópicos de três comentários filosóficos elaborados com o objetivo de responder ao AIE. Vale dizer que seguimos Prawitz somente no modo de dispor as disputas (o grupo dos que afirmam e o grupo dos que negam, por diferentes razões, um significado filosófico forte à prova do T4C) e no destaque da necessidade de melhor analisar o conceito de prova em jogo nessas disputas. Sua conclusão, a de que devemos conviver com o fato de que há fundamentos

parcialmente empíricos para a asserção do T4C, também é lida com as lentes da concepção de Pap.

É na tentativa de contribuir para a análise do conceito de prova que acrescentamos ao quadro de Prawitz (no qual figuram, além de Tymoczko, as posições de Paul Teller e de M. Detlefsen & M. Luker) a interpretação e o encaminhamento das controvérsias fornecidos por Stuart Shanker. Esse autor foi o responsável pela introdução explícita de temas wittgensteinianos de filosofia da matemática nas disputas sobre o T4C, na medida em que afirma que a alegada prova representa um desafio para “os argumentos de Wittgenstein” sobre provas.

Ora, o principal aspecto disso que Shanker denomina de argumentos wittgensteinianos sobre provas consiste na necessidade de que elas sejam, num sentido não-epistemológico (que não se relacione com questões acerca de nossas capacidades limitadas de apreensão de números ou cálculos muito extensos), dotadas da capacidade de *Übersicht*. Uma vez, entretanto, que a suposta exigência de *Übersichtlichkeit* por parte de Wittgenstein não é satisfeita no caso da prova do T4C – como teria mostrado Tymoczko – estaríamos diante de um problema para a concepção de prova do filósofo vienense. Para dar conta desse modo de pensar as discussões de Wittgenstein sobre provas matemáticas apresentamos, antes de introduzir o movimento interpretativo de Shanker, uma distinção entre dois tipos de *surveyability* – a expressão em língua inglesa que é preferencialmente utilizada pelos intérpretes para traduzir *Übersichtlichkeit*. Trata-se de uma *surveyability* local e outra global, termos que denominamos, respectivamente, como *inspeccionabilidade* e *sinopticidade*. Enquanto a primeira diz respeito ao acompanhar passo a passo todas as inferências em uma prova, a segunda concerne ao acompanhamento de seus passos, digamos, conceituais, suas relações internas.

Procuramos mostrar, então, de posse de mais essa distinção conceitual, que a premissa do AIE na qual figura a noção de *surveyability* desdobra-se em duas, de modo que tanto a leitura de Tymoczko como a de Shanker podem ser reescritas sem a força com a qual os autores redigem seus similares vereditos – o de Tymoczko, que sentencia a necessidade de modificação do conceito de prova afim de contemplar o caráter híbrido da prova do T4C, e o de Shanker, pelo qual se avalia a novidade de procedimento construído por Appel e Haken como sendo uma solução experimental *tout court*, e não uma solução matemática. Esse desdobramento permitido pela distinção entre inspeccionabilidade e sinopticidade,

assim nos parece, implica não na reavaliação dos argumentos de Tymoczko e Shanker sobre o estatuto lógico ou conceitual da solução de Appel e Haken. Do ponto de vista da filosofia da matemática de Wittgenstein, haveria ainda a necessidade de criticar o uso que Shanker faz de algumas ideias alinhavadas pelo filósofo de Viena no assim chamado período intermediário de seu pensamento.

A leitura de Shanker não respeita as peculiaridades dos textos de Wittgenstein aos quais recorre (do início da década de 1930, justamente o período de intensas reformulações, quando não de abandono, de teses tractarianas). O autor trata as observações do período intermediário (sobretudo a ideia de “apreensibilidade de leis” que geram séries numéricas) como equivalentes às de sua filosofia da matemática “de maturidade”, encarnada sobretudo nas *Remarks* e nas *Lectures on the foundations of mathematics* (RFM e LFM). Trata-se muito mais, nesse texto (especialmente a terceira parte) e nessas lições (conferidas por Wittgenstein no período da redação daquela terceira parte das RFM) de acentuar o caráter eminentemente normativo do uso da linguagem na matemática, cotejando-o constantemente com o caráter descritivo característico das ciências empíricas.

Após uma breve crítica ao modo como temas wittgensteinianos foram introduzidos nas disputas sobre a prova do T4C, continuamos nossa narrativa sobre as mesmas, no quinto e último capítulo, com o exame do trabalho de Shelley Stillwell sobre a distinção de Wittgenstein entre provas e experimentos. Esse trabalho compartilha alguns pressupostos com o de Shanker – como o de que é preciso evitar colocar as questões sobre a não-inspecionabilidade da prova do T4C em termos epistemológicos – embora seja mais adequado ao espírito da letra de Wittgenstein no que diz respeito a avaliação da função da noção de sinopticidade em suas observações sobre provas. Stillwell apresenta a sinopticidade como um dos critérios para a distinção prova *versus* experimento trabalhada por Wittgenstein tanto nas RFM quanto nas LFM (nas quais os diálogos com Alan Turing são uma constante, infelizmente não aproveitada pela autora).

Os demais critérios distintivos de ambos os tipos de processo – como a repetibilidade concomitante do processo (ato) e do produto (objeto) no caso das provas e a possibilidade de que a repetição de experimentos não resulte nos mesmos “produtos”; a independência de condições materiais no caso das provas e a inversa dependência no caso de experimentos; a possibilidade de erros em

experimentos cotejada com a impossibilidade no caso de provas; e mesmo a criatividade conceitual envolvida no caso das provas e não necessariamente no caso dos experimentos – dizem respeito, cada um a seu modo, ao pertencimento de cada um dos processos, provas e experimentos, a distintos domínios da linguagem: o normativo no caso das provas e o descritivo no caso dos experimentos. Um dos traços centrais da perspectiva wittgensteiniana em filosofia da matemática, que quase não sofreu modificações ao longo do desenvolvimento de seu pensamento, é a separação fulcral entre os domínios normativo e descritivo da linguagem.

O destino dado por Stillwell a esse tópico central para Wittgenstein com relação à prova do T4C, como buscamos mostrar, não é muito preciso. A autora defende que Wittgenstein tinha um “duplo” ponto de vista de sobre provas: por um lado elas seriam como tipos ou padrões e, por outro, como instâncias, eventos temporalmente desenvolvidos, condicionados por circunstâncias particulares, etc. Ela infelizmente não retoma ao final de seu texto, desde um tal ponto de vista, as questões implicadas nas respostas ao artigo de Tymoczko – onde havia diagnosticado, mais ou menos como Shanker, um “ataque ao apriorismo de Wittgenstein” com relação à matemática.

Desse modo, buscamos complementar, ainda que parcialmente, sua ativação de temas wittgensteinianos nos embates sobre o T4C apontando para similaridades entre a concepção funcional de *a priori* de Pap e ao menos algumas observações de Wittgenstein sobre os usos das provas. Nesse sentido, tentamos argumentar em favor da ideia de que diante do caso da prova do T4C Wittgenstein dificilmente aceitaria os diagnósticos de Tymoczko e de Shanker e que, no caso da abordagem de Stillwell, a proposta de um duplo ponto de vista sobre provas não é de todo adequada.

Com relação ao primeiro (Tymoczko), que afirma a hibridização dos processos de prova, parece que Wittgenstein não estaria de acordo porque essa tese nada mais seria do que um erro categorial, uma confusão gramatical. Mesmo que para Wittgenstein *prova* seja um conceito determinado por semelhança de família, pode-se sempre diferenciar quando uma determinada construção é ou prova ou experimento, perguntando-se pelo modo como ela é utilizada. Contam, nesse sentido, a favor de nossa leitura algumas passagens das LFM nas quais Wittgenstein discute com seus alunos sobre o caso dos experimentos didáticos



que, em realidade funcionam como provas. Quando o resultado de um experimento didático não é o esperado estamos autorizados a dizer que não podia ter sido assim, que cometemos algum erro, exatamente do mesmo modo como fazemos quando alguém nos fornece o resultado de  $25 \times 25$  como sendo 652 ao invés de 625. Quisemos assim destacar mais uma vez o papel de norma ou padrão que ambos os procedimentos, de provas e de experimentos didáticos, possuem com relação às repetições do ato – algo que já havíamos notado quando da distinção entre provas como atos, objetos e traços: são os usos das provas o que determina o modo pelo qual podem ser consideradas.

Quanto ao diagnóstico de Shanker, de que a solução de Appel e Haken não é matemática mas experimental, acreditamos que Wittgenstein não concordaria devido justamente ao caráter fortemente anti-revisionista de sua filosofia. Em última instância, como está dito claramente nas *Investigações*, não cabe ao filósofo legislar sobre os usos da linguagem, apenas descrevê-los. Ao filósofo da matemática, portanto, ao debruçar-se sobre um caso de prática matemática, como a construção da prova do T4C, competiria nada sentenciar. O resultado de Appel e Haken apela, como a uma condição constitutiva, a um poderoso e peculiar instrumento de cálculo que possui uma dimensão física, muitas vezes sublinhada em nome do destaque a uma suposta possibilidade de erro matemático causado, por exemplo, pelo superaquecimento do equipamento.

Algo que buscamos mostrar ao longo do trabalho é justamente que o papel das dimensões físicas da máquina *no caso dos cálculos envolvidos na prova do T4C*, não é relevante (no sentido de não poder interferir no proceder do cálculo) na medida em que o conjunto de instruções que constitui o programa desenhado para levar a cabo os cálculos foi escrito numa linguagem de baixo nível. Isso quer dizer que *a descrição do programa conta como instrução* para a execução das operações, ou seja, caso uma pessoa quisesse levar a cabo os cálculos (quem sabe dividindo o trabalho com outros?), poderia perfeitamente realizar o trabalho da *máquina-como-símbolo*, para usar uma das diversas expressões de Wittgenstein de que nos apropriamos aqui para esboçar uma leitura própria das disputas que nos incubimos analisar.