3
Interlúdio: de Distintas Formas de Conceber Provas Matemáticas

O que eu invento são novas *comparações*.
Ludwig Wittgenstein
Cultura e Valor

3.1
Introdução

As controvérsias filosóficas acerca da prova do T4C, que serão abordadas a partir do capítulo seguinte, podem ser consideradas como apenas mais um capítulo na história das antigas e prolíficas relações entre filosofia e matemática. Apesar de terem enfocado em uma determinada concepção de prova matemática, a essas discussões parece faltar alguns cuidados, digamos, metodológicos. Por cuidado metodológico entendemos a busca por algumas distinções conceituais capazes de orientar a tarefa de esclarecimento daquele conceito central, o de prova matemática, de tal modo a evitar algumas das confusões engendradas no seio das disputas, em razão das quais nem o conceito fica bem esclarecido nem os problemas genuínos têm a chance de se formular.

Acreditamos, nesse sentido, que o apela a uma das contribuições de O. Chateaubriand para a filosofia da lógica e da matemática – sua análise do conceito de prova – nos pode auxiliar a encaminhar algumas das referidas distinções. Ela foi apresentada nos capítulos finais do segundo volume de *Logical Forms* e discutida em pelo menos cinco dos artigos constantes no volume especial da Revista *Manuscrito* dedicado ao livro.[37]

A análise de Chateaubriand mostra-se primeiramente sob um aspecto de crítica negativa à concepção puramente formalista ou sintática de prova, tal como ilustrada nas abordagens de H. Enderton e A. Church (para quem os principais critérios de identificação de provas são, além da geração de convicção final, a finitude e a verificabilidade algorítmica)[38]. Não obstante, essa dimensão negativa

---

[37] As análises podem ser encontradas nos artigos de O. Bueno, J. J. Da Silva, A. Lassalle Casanave e J. Seoane. Indiretamente, porém, questões sobre sua concepção de prova podem ser encontradas em diversos outros artigos do volume.

[38] Boa parte de sua crítica dirige-se às concepções de prova encontradas em *A Mathematical Introduction to Logic*, de Enderton e *Introduction to Mathematical Logic* de Church, fortemente apoiadas na noção sintática de consequência. Pode-se acrescentar à sua lista os *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, de A. Curry (1951), especialmente os capítulos X e XI.

é interpolada com a construção de uma concepção pragmática de prova[39], que será esboçada na seção 2.2. A partir de nossa apresentação panorâmica do exame de Chateaubriand esboçaremos duas distinção fundamentais para a sequência do trabalho: a primeira, entre provas *simpliciter*, provas formais e provas assistidas por computador, será tratada na seção 2.3, enquanto a segunda, entre provas compreendidas como atos, como objetos e como traços, é assunto da seção 2.4.

Na medida em que tais distinções servirão como uma espécie de expediente de organização dos tópicos apresentados no capítulo anterior, bem como da sequência de nosso trabalho, o presente capítulo pretende servir como intermediação, digamos, metodológica entre a descrição histórico-conceitual realizada no primeiro capítulo e a introdução do debate propriamente filosófico acerca do resultado matemático alcançado pela equipe de Appel e Haken.

3.2
Breves notas sobre a concepção de prova de Oswaldo Chateaubriand

De modo injustamente simplificado, pode-se afirmar que dois dos principais traços do tratamento filosófico que Chateaubriand confere às provas consistem:

(π) a distinção entre:

(π_1) *proofs* – as representações formais idealizadas das provas tais como trabalhadas em teoria da prova;

(π_2) *provings* – os fenômenos efetivos de prova, tal como observados nas práticas matemáticas correntes: uma parte importante daquilo que os matemáticos fazem quando fazem seu trabalho, publicam suas obras e ensinam a seus estudantes.

(φ) a quadrúplice caracterização dos quesitos fundamentais de (π_2):

(φ_1) possuir uma certa estrutura dedutiva de concatenação de ideias (condição *lógica*);

(φ_2) capacidade de gerar convicção (condição *psicológica*);

[39] A qualificação é do próprio autor (Cf. Chateaubriand, 2008a, p. 21). Utilizaremos eventualmente a expressão pragmático como equivalente para “retórico-dialético”, embora progressivamente acrescentem-se outros aspectos à essa designação.

(φ_3) ser relativa a um grupo (condição *social*);

(φ_4) ser preservadora de verdade (condição *ontológica*, que subordina todas as demais).

É claro que uma análise mais detida de (π) e (φ) ultrapassaria demasiado as pretensões dessas notas. Destacamos, entretanto, que para Chateaubriand a apresentação algoritmicamente verificável de sequências finitas de passos inferenciais não pode ser um “ideal regulativo”[40] de identificação das provas, pois “provas algoritmicamente verificáveis são procedimentos mecânicos que substituem compreensão por verificabilidade.” (Chateaubriand, 2005, p. 291) O reducionismo desse procedimento não daria conta de explicar os objetivos capitais das provas de acordo com Chateaubriand, a saber, “compreensão e explicação por referência ao que já é compreendido.” (*loc. cit.*) Para Chateaubriand, provas não são meros jogos psicológicos, sociais ou formais. Elas são produzidas não apenas para alcançar a verdade, “mas alcançá-la com *compreensão*. Oráculos e revelações podem nos dar a verdade, mas não compreensão. Todas as exigências das provas são subordinadas a esses fins.” (Chateaubriand, 2005, p. 340)[41] Ora, essa determinação dos fins das provas implica no reconhecimento de que em uma prova matemática se manipula diversas informações, para além daquelas envolvidas na enunciação do teorema provado. Como nota Chateaubriand, ocorre frequentemente que as provas envolvem resultados adicionais e acabam servindo de modelo para outras provas, além do fato de que elas explicitam certas informações sinteticamente enunciadas no teorema.

Em conexão com o último ponto, Chateaubriand destaca, em contexto distinto,[42] que as provas possuem outros aspectos lógica e epistemologicamente

[40] O emprego da expressão kantiana no contexto dessa discussão encontra-se no referido texto de Da Silva, (2008, p. 190).

[41] Lassalle Casanave argumenta, num texto sobre uma disussão sobre noção de prova de Chateaubriand anterior a *Logical Forms*, que a noção de compreensão em jogo em sua crítica não era de todo explicitada – o que permitiria que se interpretasse a mesma como em alguma medida compatível com a noção hilbertiana de prova (afinal a fonte da concepção sintática ou linguística de prova criticada por Chateaubriand, como veremos adiante). Para a proposta interpretativa em questão cf. (Lassalle Casanave, 1999).

[42] Na resposta ao artigo de Da Silva (Cf. Chateaubriand, 2008b, p. 199), mas também no capítulo final de *Logical Forms*, “Lógica e conhecimento”, publicado na revista *Analytica* (cf. Chateaubriand, 2007).

relevantes, como a potencialidade para clarificações conceituais, a construção de conexões e o encaminhamento de novas descobertas matemáticas.[43]

Independentemente de uma defesa irrestrita da relação essencial que Chateaubriand estabelece entre provas, compreensão e explicações – o que nos conduziria a tratar da longa incursão acerca das provas em processos judiciais norte-americanos, bem como de sua noção de conhecimento – é preciso reconhecer que sua concepção de provas efetivas é a fonte do que denominamos, na seção seguinte, de provas *simpliciter*, em contraposição às provas formais. Isso porque a noção de prova *simpliciter* pretende ser ampla o suficiente como para dar conta da capacidade de adequação a diferentes contextos de enunciação/realização, ou aos diferentes auditórios diante dos quais/com os quais as provas são realizadas nas práticas matemáticas – capacidade que confere à abordagem de Chateaubriand seu aspecto pragmático (e talvez pudéssemos dizer de um certo perspectivismo?). Acreditamos que esse desenvolvimento da noção de prova efetiva de Chateaubriand pode ser justificado como uma espécie de costura de ideias contidas em passagens como as seguintes:

> O caminho mais acertado é ser rigoroso e detalhado tanto quanto a ocasião ou o propósito exigem. (Chateaubriand, 2005, p. 230)
>
> O que é uma prova para um matemático profissional pode não ser uma prova para um aluno de graduação, e o que é uma prova para um aluno de graduação pode não ser uma prova para alguém que apenas pode comparar cadeias de símbolos. Não se segue, entretanto, que apenas provas que satisfaçam *em princípio* o último [alguém que apenas pode comparar cadeias de símbolos] sejam provas. De fato, do ponto de vista do aluno de graduação, ou do profissional, tais coisas podem ser apenas bla bla bla [*gibberish*] ininteligível, que somente pode ser reconhecido como tendo algo a ver com prova [*proving*] relacionando-as de modo inteligível com provas "reais". (*Idem*, *ibidem*, p. 312)

Quanto a (π_1), trata-se de reconhecer que as representações formais de provas que encontramos em lógica matemática ou na teoria da prova não são meras descrições das práticas matemáticas efetivas, mas "extrapolações idealizadas de

---

[43] Sobre "provas exploratórias", afirma, por exemplo que "não são compostas de passos simples elementares verificáveis, mas sim de passos complexos já reconhecidos como corretos, de analogias, de *insights*, de figuras etc. Uma vez que não se pode estar certo de não se ter bobeado em algum lugar, o que se faz é elaborar os detalhes de tal modo a satisfazer a si e aos seus pares. É claro que alguém pode ser influenciado pelas concepções correntes sobre como uma prova deve ser, ou por preconceitos filosóficos, mas verificabilidade algorítmica raramente entra na elaboração." (Chateaubriand, 2005, p. 434)

provas comuns.” (Chateaubriand, 2005, p. 304) Não se pode ignorar, é verdade, uma certa retroatividade entre a concepção idealizada de prova e algumas provas efetivas, e Chateaubriand evidentemente não o faz (cf. Chateaubriand, 2005, p. 307). Essa ausência denotaria desconhecimento, por exemplo, das prolíficas conexões entre alguns desenvolvimentos em teoria da prova, teoria da calculabilidade, da construtividade e a ciência da computação em diversas de suas ramificações.[44]

A partir dessas conexões foram desenvolvidas no interior da matemática noções para as quais determinados processos de formalização coincidem com sua precisa determinação, de modo que a formalização pode mesmo servir para a clarificação dessas noções[45], além de possibilitar a inclusão significativa de computadores na solução de alguns problemas matemáticos.

Ainda assim, também é verdade que em suas vidas cotidianas a matemática – suas manifestações em livros (especializados, didáticos, de divulgação), artigos, cursos, palestras, conversações – não respeitaram de modo relevante as restrições (de verificabilidade algorítmica, por exemplo) impostas por aquelas concepções idealizadas de provas, nem parecem ter estado de fato concernidas com as questões fundacionais historicamente relacionadas com a formulação daquelas restrições. Apesar das análises dos matemáticos-filósofos interessados em questões fundacionais, e de sua influência nos manuais de lógica matemática referidos por Chateaubriand, a matemática da virada do século passado, temporalmente mais próxima da forja daquelas concepções idealizadas de prova, não parece ter acatado em suas demonstrações cotidianas todos os requisitos estipulados pelas diferentes “escolas” nas quais geralmente dividimos as posições fundacionalistas, sobretudo aquelas determinadas na e pela influente escola de Hilbert. Aliás, sobre as consequências da famosa crise dos fundamentos da matemática, nos parece que se pode identificar uma forte afinidade entre a posição de Chateaubriand e a do matemático francês Jean Dieudonnée, quando o último afirma, em “Les Grandes lignes de l’évolution des mathématiques”:

[44] Exemplos da retroavitidade a que nos referimos aqui podem ser encontrados nos procedimentos de transformação (*unwiding*) de provas sugeridos por Kreisel, dos quais falamos na nota 34 acima.

[45] Estamos pensando especificamente nos exemplos constantes no frutífero artigo de Wang “On formalization”: as noções de completude, decidibilidade e computabilidade efetiva, dentre outras. (Cf. Wang, 1955, p. 229).

> O que se deve finalmente pensar daquilo que se tem denominado "crise" na história da matemática? Se queremos dizer com isso uma refundação completa dos modos de pensar, como aquela produzida por exemplo na Física com a Relatividade ou a Mecânica quântica, podemos afirmar que jamais houve algo similar na matemática, salvo talvez a virada que se seguiu da descoberta dos irracionais na matemática grega e sobre a qual, infelizmente, somos muito mal ensinados. Desde então, o que ocorreu duas ou três vezes foi uma organização de teorias ou métodos insuficientemente precisos como o Cálculo infinitesimal ou a Geometria algébrica dos quais falei acima. Mas a "crise" da qual alguns adoram falar é aquela que se tem nomeado de "crise dos fundamentos", que foi desencadeada mais ou menos a partir de 1895 a propósito das antinomias na teoria ingênua de conjuntos desenvolvida por Cantor. (Dieudonnée, 1980, p. 11)

Talvez seja interessante trazer à baila o contexto dessas observações de Dieudonnée, pois a intervenção da qual elas formam parte pretende suplantar a impressão, causada por "aqueles que adoram falar da crise", de que os debates fundacionais ilustram uma necessidade de fundamentação empírica para a matemática,[46] ao invés de um direcionamento para o que de fato ocorre em suas práticas. Não analisaremos em detalhe as disputas em torno do que se

[46] Com a expressão destacada entre aspas Dieudonnée refere-se precisamente a Imre Lakatos. Dieudonnée afirma que o sucesso de seus textos quase-empiristas (ou falibilistas) é um fenômeno "curioso" para um matemático como ele. Pode-se determinar as origens da tentativa lakatosiana de aplicar o falibilismo de Popper às matemáticas num congresso realizado em 1965 em Londres. Mais precisamente, Lakatos inicia sua empreitada durante o debate que se seguiu à palestra de Lasló Kalmár, na qual este afirmara: "que a pesquisa em Fundamentos da Matemática se deu a partir da suposição de que a matemática é uma ciência puramente dedutiva e da esperança de que podemos mostrar que ela é uma ciência dedutiva pura *firmemente fundada*. Em segundo lugar, uma tal esperança nunca foi, de fato, realizada e, como assinalei acima, os axiomas de qualquer ramo interessante da matemática foram originalmente abstraídos mais ou menos diretamente de fatos empíricos, e as regras de inferência utilizadas neles manifestaram originalmente sua validade universal nas nossas práticas efetivas de pensamento. Em terceiro lugar, a consistência da maioria de nossos sistemas formais é um fato empírico; mesmo quando ela é provada, a aceitabilidade dos métodos metamatemáticos utilizados na prova (e.g. indução transfinita até algum ordinal construtivo) é ainda um fato empírico. Mesmo se continuarmos tentando reduzir a matemática à evidência intuitivamente lógica ou outros princípios, não admitindo que o que consideramos como intuitivamente evidente é em última instância um produto de testes práticos na experiência, devemos admitir que é um fato empírico o de podermos confiar em princípios evidentes." (Kalmár, 1967, p. 192) No trecho final de seu discurso, feito em tom de clamor por direitos civis a alguns problemas, Kálmar observa que "Considerar a matemática como uma ciência que necessita de fundamentação empírica dará origem a novos problemas em Fundamentos Empíricos da Matemática. [...] Por exemplo, o que são 'observáveis' na matemática empírica, i.e. que tipo de proposição matemática pode ser testada diretamente na prática? Obviamente, proposições puramente numéricas são desse tipo; [...] Outro problema é: como podemos testar indiretamente proposições que não podem ser diretamente testadas? Ou como podemos classificar proposições matemáticas segundo o grau até o qual foram testadas? Ou em que medida [*to what use*] podemos inserir computadores em matemática empírica (ou experimental) para além da acumulação de vastas quantidades de evidência empírica fundamentando algumas proposições matemáticas?" (*op. cit.* p. 194) O debate que daí se seguiu, registrado nas atas do encontro (editadas por Lakatos e publicadas em 1967) foi bastante acalorado, tendo Lakatos assumido a posição de ferrenho defensor das teses de seu conterrâneo húngaro.

convencionou chamar de quase-empirismo em filosofia da matemática, nas quais o texto de Dieudonnée participa de um modo peculiar, pois isso nos afastaria do objetivo por assim dizer metodológico do presente capítulo. Deve-se notar, entretanto, que em grande medida é com relação a questões em causa nas referidas disputas que gravitam as principais teses defendidas por Tymoczko no artigo inaugural do debate sobre a prova do T4C, que analisaremos no capítulo seguinte.

O ponto pode ser formulado com maior justiça afirmando que é no clima do "renascimento do empirismo em filosofia da matemática" – suscitado (durante o período de mais ou menos uma década a contar desde 1965 até meados da década de 1970) de maneira relativamente distinta em autores como Lakatos, criticado por Dieudonnée, e Hilary Putnam – que encontraremos o "estado de espírito teórico" (anti-fundacionalista) no qual a abordagem de Tymoczko se desenvolve. Nesse sentido, parece que o tipo de crítica compartilhada por Chateaubriand e Dieudonnée com relação às alegadas consequências da crise dos fundamentos da matemática para a compreensão filosófica das provas em suas vidas comuns auxiliaria no esclarecimento de algumas deficiências do gênero anti-fundacionalista de abordagem em filosofia da matemática.

Abaixo uma representação gráfica de nossa apresentação esquemática da concepção de prova de Chateaubriand:

Figura 12: Uma representação gráfica de nossa apresentação esquemática da concepção de prova de Chateaubriand

3.3
Provas *simpliciter*, provas formais e provas assistidas por computador

Introduzimos ainda no capítulo anterior a ideia de que ao responder às primeiras críticas recebidas pela prova do T4C Appel, Haken e Swart elaboraram argumentos de ordem retórico-dialética, compreendidos os dois termos em sua acepção aristotélica ao defender a prova das acusações de falta de relevância ou mesmo confiabilidade. Isso quer dizer que ao reconhecer que apenas um pequeno grupo de *experts* é capaz de *verificar* a prova – embora *em princípio* qualquer pessoa que possuísse familiaridade com os conceitos e métodos acionados nela e dispusesse de equipamentos similares aos que foram utilizados nos cálculos em questão (além de conhecimentos mínimos em programação) pudesse *reproduzí-la* – aqueles argumentos assumem um pressuposto dialético. Tal pressuposto consiste na existência de um auditório especializado, diante do qual não haveria necessidade de formulação de qualquer prosa com objetivo de familiarização da audiência com os conceitos, métodos e instrumentos envolvidos na prova, uma vez que nesse contexto tais elementos funcionariam como entimemas – no sentido "das coisas que são sabidas por todos".[47] Por outro lado, uma vez que distintas *apresentações* da prova dependem do *grau de familiaridade da audiência* diante da qual se realiza com os métodos de prova em teoria dos grafos e, além disso, com métodos computacionais, estaria preservado também o caráter retórico implicado na transmissão do conhecimento do T4C, pois a adaptabilidade da argumentação a distintos auditórios constitui num dos pilares do discurso retórico.

Ora, adaptabilidade da apresentação das provas a distintos auditórios só é possível na medida em que o sentido estrito de prova como prova formal não seja o ideal regulativo das *provings* de Chateaubriand, das provas em suas vidas comuns – que denominaremos de provas *simpliciter*. Se "formal" for pensado não como a preservação de uma certa estrutura ou ordem lógica, mas no estrito sentido da explicitação de todos os passos dedutivos e regras de inferência que os produzem, não haveria porque conceder que se trata de um traço essencial das

[47] Para uma abordagem relativamente sucinta das provas (em um sentido que não corresponde de todo ao "nosso" conceito contemporâneo de prova) como núcleo racional da retórica aristotélica e suas relações com a dialética cf. o primeiro capítulo de *Relações de força: história, retórica, prova*, de C. Ginzburg (2002). Sobre a noção de entimema cf. "Enthymeme: Aristotle on the Rationality of Rhetoric" (Burnyeat, 1996).

provas *simpliciter*, uma vez que diante de auditórios não-familiarizados com esses tais procedimentos de explicitação, a formalização poderia não apenas ser irrelevante, mas mesmo atrapalhar a compreensão geral (conceitual) das provas.

Como é de amplo conhecimento, a noção de prova formal – como sequência finita de inferências dedutivas explícitas (e mecanizáveis) entre fórmulas entendidas como cadeias de signos desde pontos de partida fixados – surge em direta conexão com algumas exigências típicas do ambiente fundacionalista característico da virada do século XIX para o XX. Essa noção de prova acabou fazendo escola, influenciando a noção de prova tal como podemos encontrar nos célebres manuais de lógica matemática a partir dos quais Chateaubriand tece sua análise crítica[48]. Esses, por sua vez, exerceram grande ingerência no modo como se ensina lógica, bem como nos modos de conceber as provas em filosofia da lógica, da matemática e, por que não dizer, também na filosofia da ciência. A mesma noção de prova formal, por outro lado, está intimamente relacionada com a ideia de mecanização do raciocínio, do cálculo, e da verificação de provas, tal como podemos encontrar nos famosos resultados acerca da impossibilidade de se encontrar um procedimento único de decisão para todo e qualquer problema matemático (o conhecido *Entscheidungsproblem*, problema da decisão), bem como no desenvolvimento da ciência da computação.

A aposta hilbertiana no potencial resolutivo do aperfeiçoamento das investigações axiomáticas formais (no sentido *fin du XIX*$^{\grave{e}me}$) fundava-se na convicção de sua importância para a revelação dos nexos lógicos entre os conceitos e princípios fundamentais da teoria que se pretende axiomatizar formalmente[49]. Essa convicção, como se sabe, sofreu um abalo significativo com a publicação do artigo no qual Kurt Gödel[50] apresentou seus Teoremas de Incompletude – pois dentre aqueles almejados nexos lógicos a serem explicitados pela teoria da prova, além da consistência e da independência dos axiomas, estava

---

[48] Embora seja importante (mas talvez repetitivo) destacar que "O conceito de prova sempre foi formal, no sentido de que a meta de uma prova não é só alcançar a verdade, mas alcançá-la através de uma estrutura cujo valor seja independente de se alcançar aquela verdade particular." (Chateaubriand, 2007, p. 39)

[49] Especificamente a geometria euclidiana, axiomatizada por Hilbert (Cf. Vaz, 2010, p. 136: "é por meio de uma investigação em termos axiomáticos que se pode determinar os limites dos métodos, e revelar as conexões lógicas entre os conceitos de uma teoria."). Para uma excelente visão de conjunto do Programa de Hilbert cf. Sieg, 1999.

[50] "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I" (1931).

o da prova da completude do sistema formal subjecente à aritmética de Peano. Uma vez que os Teoremas de Gödel provam, respectivamente, que em qualquer sistema axiomático suficientemente amplo para expressar tal aritmética há proposições indecidíveis (exprimíveis mas não demonstráveis no sistema), e que a consistência desse sistema não pode ser demonstrada no interior do mesmo (uma vez que *a* proposição indecidível a que se refere o primeiro resultado é justamente a que exprime a consistência do sistema)[51], estava arremetido o grande objetivo do projeto de Hilbert.

Por outro lado, como dissemos, as remodelações daquele projeto ocasionaram o desenvolvimento de pesquisas cujas consequências estão diretamente relacionadas à elaboração da teoria da calculabilidade e da ciência da computação. Esses desdobramentos são tema de capital interesse para nós na medida em que o famigerado instrumento introduzido na matemática com a prova do T4C, o computador eletrônico, é fruto desse gênero de investigação. Como Sieg aponta:

> [A] expansão da teoria da prova é apenas um dos efeitos da ampla visão de Hilbert acerca de problemas fundacionais e das suas questões tão finamente articuladas. Outro efeito é claramente visível nas ricas e variadas contribuições dadas por Hilbert, Bernays, e outros membros da Escola de Hilbert (Ackermann, von Neumann, Gentzen, Schütte); finalmente, precisamos considerar também os estímulos de sua abordagem e as questões colocadas aos contemporâneos de fora da escola (Herbrand, Gödel, Church, Turing e, muito antes ainda, Zermelo). De fato, não há empreitada fundacional com mais profundo efeito na emergência e desenvolvimento da moderna lógica matemática; ela poderia ainda, se nos importássemos em estar abertos, ter um efeito similar nas reflexões filosóficas concernidas com a experiência matemática, auxiliando-nos a ter uma perspectiva que inclua preocupações filosóficas tradicionais, mas que, de modo ainda mais importante, nos permita formular questões que transcendem os limites tradicionais. (Sieg, 1999, p. 34)

O que nos importa destacar desse prolífico contexto de temas e discussões é a exigência hilbertiana de que os procedimentos de prova pelos quais se demonstraria a consistência e a completude da aritmética fossem “completamente inspecionáveis” (Hilbert, citado em Sieg, 1999, p. 23), bem como a de que as

---

[51] Embora seja preciso observar que esse segundo resultado não estava explicitado no artigo de Gödel. Para uma visão geral e mais detalhada acerca do desenvolvimento da teoria da prova pós-hilbertiana (via trabalhos de Gentzen, Dag Prawitz e outros) cf. o verbete “The Development of Proof Theory” da *Stanford Encyclopedia of Philosphy*, (Jan von Plato, 2008).

construções matemáticas fossem conectadas "ao que pode ser concretamente exibido", e que se interpretasse "os métodos matemáticos inferenciais de modo tal que estejam sempre no domínio do que pode ser verificado." (*idem*, *ibidem*, p. 24) Vale lembrar que se trata do que é importante para uma prova *do ponto de vista da metamatemática*, e não de algum tipo de condição imposta por Hilbert às práticas matemáticas "cotidianas" de prova, nas quais as restrições de ordem finitista e formalista de sua teoria da prova não deveriam em nada interferir. Lembremos que *a ideia fundamental da teoria da prova* é a de que:

> Tudo o que previamente constituiu a matemática é rigorosamente formalizado, de modo que a matemática ela mesma ou a matemática no sentido estrito se torna um estoque de fórmulas. Tais fórmulas são distintas das fórmulas comuns da matemática apenas pelo fato de que elas contém signos lógicos – em particular os signos lógicos para 'implica' ($\rightarrow$) e para 'não' ($\overline{\quad}$). Algumas fórmulas que servem com base para o edifício formal da matemática são denominadas axiomas. *Uma prova é uma figura que deve aparecer para nós intuitivamente [anschaulich] como tal; ela consiste em inferências utilizando o esquema inferencial*
>
> $$\frac{\begin{array}{c}\Theta \\ \Theta \rightarrow \Omega\end{array}}{\Omega}$$
>
> *no qual em toda ocorrência das premissas – isso é, as fórmulas Θ e $\Theta \rightarrow \Omega$ – ou elas são axiomas ou resultam diretamente dos axiomas por substituição, ou concordam com a fórmula final Ω de uma inferência que apareceu antes na prova, ou resulta de uma tal fórmula final por substituição.* Uma fórmula deve ser dita provável se é ou um axioma ou resulta de um axioma por susbstituição, ou se é a fórmula final de uma prova". (Hilbert 1923a, pp. 1137, grifos nossos)

Eis a caracterização de prova que se tornou padrão entre os representantes do formalismo em filosofia da matemática. Dela sublinhamos a ideia de que *uma prova é uma figura que precisa ser vista como tal*. Além disso, importa-nos a conexão das exigências em jogo aqui com o problema geral acerca da possibilidade de decidir questões matemáticas de modo mecânico, o já referido *Entscheindungsproblem*. Trata-se da questão relativa à existência de um procedimento efetivo de decisão acerca da verdade de uma sentença matemática qualquer, ou seja, à busca de um algoritmo cujo dado de entrada fosse qualquer expressão matemática e a saída seria uma "decisão" sobre se ela é ou não verdadeira. Em outras palavras, um resultado acerca da *demonstrabilidade* ou *provabilidade* da expressão no sistema do qual ela é integrante. Assim como com o problema da completude, as tentativas de solução para o problema da decisão também foram fortemente impactadas por resultados negativos, obtidos independentemente por Alonzo Church e Alan Turing – que acabaram provando que não existe um tal algoritmo para a lógica de primeira ordem, fundamental à aritmética e, portanto, para a fundamentação de toda a matemática.

Para obter a prova de que não existe um algoritmo capaz de calcular a provabilidade de uma sentença matemática dentro da linguagem mesma na qual a sentença é formulada eram necessárias definições precisas de *algoritmo* e de *função calculável*. É sabido que ao longo dos anos trinta diversas definições desses termos, mais tarde provadas equivalentes entre si, foram oferecidas por diferentes matemáticos: trata-se, além dos mesmos Turing e Church – que os definiram, respectivamente, com base em suas ideias de *máquinas de Turing* e do *cálculo-lamba* – de Jacques Herbrand, Gödel e Stephen Kleene. Ora as provas da impossibilidade da existência de um procedimento de decisão único para toda a matemática estão diretamente relacionadas com a origem da moderna ciência da computação naquilo que ela deve à ideia de formalização ou mecanização do cálculo, uma vez que computadores digitais operam apenas com dados formais – quer dizer, informações discretas sobre todos os passos de uma operação de manipulação simbólica. Ou, dito de outro modo, um conjunto explícito de instruções sobre informações codificadas.

Como nota Wang, pode-se falar em diferentes graus de formalização na "evolução" sofrida pelos sistemas axiomáticos desde o modelo euclidiano até a emergência de um "critério preciso de formalização relativo a [*in terms of*] de aspectos notacionais de termos e fórmulas, e não do significado dos conceitos." (Wang, 1963, p. 4) Embora um pouco longa, a passagem seguinte merece nossa atenção como uma espécie de súmula do tópico sobre o vínculo entre formalização e mecanização de procedimentos de cálculo:

> Em uma dada disciplina matemática há um corpo de proposições asseridas e não asseridas. Dentre as proposições asseridas, escolhemos alguns axiomas dos quais outros podem ser reduzidos. Para que os axiomas sejam adequados eles devem expressar todas as propriedades relevantes dos termos técnicos não definidos de modo que seja possível realizar as deduções mesmo se tratarmos os termos técnicos como palavras ou signos sem significado. *Damos atenção* então *às partículas lógicas* ou palavras não técnicas e explicitamos *os*

> *princípios que determinam seus significados* ou, em outras palavras, *governam seu uso.* Como resultado, *deveríamos poder reconhecer, simplesmente olhando para o padrão notacional*, axiomas e provas.
> De agora em diante falaremos de *sistemas formais ou axiomáticos* apenas quando satisfizerem o seguinte critério: *há um procedimento mecânico para determinar se um dado padrão notacional é um símbolo que ocorre no sistema, se uma combinação desses símbolos é uma fórmula bem formada (sentença com sentido) ou um axioma ou uma prova no sistema*. Assim, *as regras de formação*, i. e., regras para a especificação de fórmulas bem formadas *são inteiramente explícitas no sentido de que uma máquina pode ser teoricamente construídas para escolher todas as fórmulas bem formadas do sistema se utilizarmos representações simbólicas adequadas dos símbolos básicos*. Os axiomas e regras de inferência também são inteiramente explícitos. Toda prova em cada um desses sistemas, quando completamente escrita, consiste numa sequência finita de linhas tal que cada linha é ou um axioma ou resulta de linhas prévias da sequência por uma regra de inferência definida. Então, dada qualquer pretensa prova, apresentada em conformidade com as exigências formais para provas nesses sistemas, podemos *verificar mecanicamente* sua correção. (*loc.cit*)

O final da passagem anterior nos apresenta uma versão daquela concepção padrão de prova a que nos estamos referindo, testemunhada na passagem de Hilbert acima citada.

Antes de completar o quadro sobre o qual desenharemos nossa tríplice distinção do domínio das provas matemáticas não se pode deixar de observar, ainda que rapidamente, que a concepção de prova da qual estamos localizando as origens na obra de Hilbert vincula-se por estreitos laços à linhagem do projeto de fundamentação da matemática na lógica de Gottlob Frege. É de suma importância para Frege a ideia de que a linguagem lógica forjada para levar a cabo a desejada fundamentação não deveria ser apenas uma mera "linguagem de fórmulas" – como julgava ser o sistema lógico de Boole, incapaz de expressar senão a parte formal de nosso pensamento, como um mero *cálculo raciocinador* – mas deveria ser capaz de "expressar conteúdos através de signos escritos de modo mais preciso e de maneira mais perspícua [*übersichtlicherer*]."[52] (Frege, 1971, p. 71) Isso

[52] Na tradução francesa de Claude Imbert, que utilizamos, a frase toda vai assim: "J'ai n'a pas voulu donner en formules une logique abstraite, mais donner l'expression d'un contenu au moyen des signes écrits, et *d'une manière plus précise et plus claire au regard* que cela n'est possible au moyen de mots." (grifos nossos) Nossa tradução: "Não quis fornecer em fórmulas uma lógica abstrata mas a expressão de um conteúdo por meio de signos escritos, e de uma maneira mais precisa e mais clara/perspícua ao olhar do que é possível através de palavras."

considerado, de acordo com Frege a abordagem booleana seria “incompleta”.[53] Como não podemos nos estender nas considerações acerca do papel do conhecimento simbólico na origem da lógica matemática, encarnadas tipicamente nas críticas de Frege aos booleanos,[54] observaremos apenas que a concepção padrão de prova instanciada a partir das investigações de Hilbert preserva aspectos herdados desse ambiente de discussão. Isso é o caso na medida em que as provas da metamatemática de Hilbert são sequências discretas de passos inspecionáveis, *ergo* mecanizáveis (pois sem lacunas calculatórias), ao mesmo tempo em que devem ser *uma imagem (intuitiva) dos nexos lógicos* entre os conceitos que as compunham.

Como dissemos, dentre as consequências positivas dos desenvolvimentos da metamatemática hilbertiana inclui-se a criação das modernas máquinas de computar que, por sua vez, acabaram sendo utilizadas não apenas na formalização para fins de *verificação* de provas já existentes em diferentes domínios da matemática (como, por exemplo, um dos três programas escritos por Wang em fins da década de 1960, que gerava um procedimento de decisão para o cálculo proposicional)[55], mas também na *descoberta* de provas de novos teoremas. Assim, chegamos ao tópico “provas por computador”.

Lembremos que no acima referido artigo de Kreisel[56] encontramos não uma bipartição (como em Wang) mas uma tripartição dos usos que computadores podem ter na lida com provas matemáticas. Encontra-se também ali uma descrição de experiências passadas (lembremos que se trata de 1977) com computadores nas quais seu uso massivo, seja em matemática pura ou aplicada, diz respeito a “meras computações”. Quer dizer: trata-se da implementação de

---

[53] No sexto capítulo de *The semantic tradition from Kant do Carnap*, J. Alberto Coffa mostra que Russell expressa o mesmo tipo de concernimento de Frege sobre a relação entre sentenças da língua perfeita e seu sentido, que não pode ser incompleta: “Uma sentença é transparente ou *perspícua* quando sua estrutura gramatical representa acuradamente a estrutura da proposição que expressa, de modo que a cada unidade gramatical na sentença corresponde uma entidade (seu ‘sentido’) na proposição. Assim, se é claro que um símbolo é incompleto, a sentença na qual ocorre não é perspícua, e portanto semanticamente enganosa. Se o que buscamos é uma linguagem que reflita perspicuamente o que queremos dizer, uma linguagem perfeita, devemos detectar e eliminar toda expressão incompleta.” (Coffa, 1991, p. 111-12)

[54] Para uma boa visão de conjunto detalhada dessas disputas cf. “Between Calculus and semantic Analysys: Symbolic Knowledge in the origins of Mathematical Logic” (Legris, 2012).

[55] “Estabeleceu-se que a lista total dos quase 200 teoremas dos primeiros cinco capítulos de *Principia Mathematica* são provados em cerca de 37 minutos, sendo que 12/13 do tempo é utilizado para leitura e impressão, de modo que o tempo efetivo de prova para quase 200 teoremas foi de menos de 3 minutos. (...) Em particular ✱2.45 foi provado em cerca de 3 segundos e ✱2.31 em cerca de 6 segundos.” (Wang, 1960, p. 196)

[56] Kreisel, 1977 (referido ao final do capítulo I).

procedimentos de decisão já conhecidos – o que corresponderia à verificação de provas que já existem, uma vez que “dado o resultado, o computador realiza um novo começo.” (Kreisel, 1977, p. 65)

O mesmo não se pode dizer com relação “à matemática ilustrada [*highbrow mathematics*]”, onde dificilmente a verificação ou a descoberta de provas é realizada através de regras mecânicas – sobretudo se elas relacionam diferentes ramos da matemática. Nesses casos “a mais eficiente verificação é feita por comparação ou confrontação de passos intermediários com o que já é sabido.” (*loc. cit*) Assim, segue Kreisel, “a questão da formalização parece bastante improvável no que diz respeito aos raciocínios matemáticos mencionados” (*loc. cit*) – ou seja, raciocínios da “matemática ilustrada” para os quais não existem regras mecânicas de decisão. É nesse sentido que Kreisel pode falar que a prova do T4C era, então, de uma *exceção ocasional* ao uso de computadores em provas matemáticas.

Vale notar ainda que tanto Kreisel quanto Wang defendem a relevância da formalização em termos de mecanização de provas para a matemática, apontando para o fato de que existem casos de fronteira diante dos quais não se pode delimitar precisamente a diferença entre formalizar e descobrir uma prova matemática. Isso talvez reforçasse a tese kreiseliana da exceção ocasional que a prova auxiliada por computador do T4C representa, uma vez que:

> Há muitos casos nos quais rascunhos essencialmente incompletos, às vezes mesmo contendo erros, são expandidos e transformados em provas mais exatas. *Às vezes, não é senão quando temos uma prova trabalhada do começo ao fim que começamos a perceber uma conexão entre ela e outro rascunho ou palpite.* Às vezes é difícil decidir se consideramos como descobridor da prova aquele que desenhou o rascunho ou aquele que a formalizou. (Wang, 1955, p. 230, grifos nossos)

> Seja como for, é bastante claro que as “reduções” envolvem transformações de provas: $\pi \rightarrow \pi_e$. E mesmo se não há dúvidas sobre (a validade de) π ou menos dúvidas sobre π que sobre π_e (por exemplo, porque π_e é mais complicada que π, e portanto tem mais chance de conter erros de cópia), permanece a possibilidade de que π_e *nos diga algo que queremos saber mas π não diz.* (Kreisel, 1977, p. 64)

Lembremos, então, que a exposição que realizamos no capítulo precedente mencionou provas formais ao tratar das críticas formuladas contra a prova apresentada por Appel e Haken, de que os programas computacionais utilizados nela não foram formalmente verificados. O tópico da verificação formal de programas, quer dizer, o uso de provas matemáticas para mostrar a confiabilidade dos mesmos (uma vez que uma prova formal mostraria a impossibilidade de erros na execução dos programas), será abordado em maior detalhe nos próximos capítulos. Por ora, basta deixar claro que uma coisa é a verificação da correção de programas computacionais (ou mesmo de *design* de *hardware*, com todas as diferenças entre eles) *através* de provas dedutivas e outra é o uso de computadores como instrumento, seja de descoberta ou de justificação, em provas de teoremas matemáticos – o caso que nos interessa mais imediatamente por ser similar ao caso da prova do T4C, descoberta com o auxílio de instrumentos computacionais.

Parte da nossa distinção, entre as noções de prova *simpliciter* e prova formal, pode ser esboçada, então, como segue: a noção de prova *simpliciter* é de algum modo extraída das práticas efetivas dos matemáticos, que aos filósofos da prática matemática cabe descrever. Essas práticas podem ser consideradas como procedimentos dedutivos utilizados para mostrar que uma proposição matemática se segue de outras – e podem ser levadas a cabo, com diversos objetivos (didáticos, epistemológicos, estéticos), das mais variadas formas (por escrito, com o auxílio de diagramas e figuras, combinando discurso verbal com notação simbólica),[57] pelos mais variados métodos (diretas, por indução matemática, por redução ao absurdo, por construção, por exaustão, por transposição).

Consideradas como argumentos dedutivos válidos as provas *simpliciter* possuem a característica de preservar a verdade das proposições ao longo do processo de inferência. Isso, insistimos, não é o mesmo que dizer que qualquer ocorrência de prova matemática tenha que necessariamente ser formal no sentido da explicitação de todos os passos lógicos implícitos na dedução – tal como era importante do ponto de vista da metamatemática hilbertiana. Não consta que a prática de provar teoremas, seja entre matemáticos em geral seja em classes escolares de matemática, desde suas origens até o momento atual, dependa

[57] O caso de combinação de elementos discursivos e significativamente diagramáticos numa prova (onde "significativamente" está para a função de veiculação de informações não-proposicionais através dos diagramas, de modo que eles sejam indispensáveis à prova) configura aquilo que se tem denominado de prova heterogênea – e para a qual exemplos precípuos são as provas da geometria de Euclides. Para uma abordagem das provas heterogêneas cf. "Demonstraciones *catholicas* y *echteticas*" (Lassalle Casanave, 2012b)

essencialmente desse tipo de rigorização – muito embora seja verdade que em alguns casos formalizar seja sinônimo de rigorizar[58].

O que se poderia objetar quanto a esse ponto, é que não se trata de exigir que toda ocorrência de prova seja formal, mas sim formalizável. Nos termos da perspectiva retórico-dialética acima introduzida, entretanto, poder-se-ia responder que a exigência de que as provas sejam algoritmicamente verificáveis (ou *localmente* inspecionáveis) pressupõe, contrariamente ao que sugere nossa leitura da concepção de Chateaubriand, um *auditório universal*.[59] Pareceria que exigência desconsidera o fato de que é o grau de detalhe na *apresentação* de uma prova varia de auditório para auditório – embora sua *verificação* dependa, ela sim, da existência de um auditório específico, a saber, um auditório de *experts*.[60] Pode-se pensar que a prova do T4C ilustra a necessidade de uma tal distinção (entre apresentações e verificação de provas), uma vez que sua parte formal, que consiste justamente nos cálculos executados pelos programas computacionais, não é *localmente* verificável ou inspecionável[61] e, portanto, não seria compreensível nem sequer pelo auditório de *experts*.

Essa alegação parece-nos, entretanto, contra-intuitiva. Como sugere Chateaubriand, a afirmação de que a inspecionabildiade algorítmica implica, em

[58] Cf. Wang 1960, 230, onde se lê: "Em um sentido, formalizar é rigorizar. Houve o ataque de Berkeley aos matemáticos de seu tempo, intitulado: 'Onde se examina se os objetos, os princípios e as inferências da análise moderna são mais distintamente concebidos ou mais evidentemente deduzidos do que os mistérios e assuntos de fé'. Há a longa história de Lagrange, Cauchy, Weierstrass e outros que se empenharam em formalizar exatamente as noções básicas de limite, continuidade, derivadas, etc, fornecendo desse modo fundamentos rigorosos (embora não necessariamente confiáveis) para a análise matemática". Para uma abordagem formalista ao problema do rigor cf. "Some aspects of the problem of mathematical rigour", de Haskell B. Curry (1941).

[59] Para a noção de auditório universal cf. os parágrafos iniciais da primeira parte do *Tratado da argumentação: a nova retórica* de C. Perelman e E. Olbrechts-Tyteca (2005).

[60] Sobre a diferença entre o auditório universal e os auditórios de experts, os autores referidos na nota aicma afirmam: "Certos auditórios especializados constumam ser assimilados ao auditório universal, tal como o auditório do cientista dirigindo-se aos seus pares. O cientista dirige-se a certos homens particularmente competentes, que admitiem os dados de um sistema bem definido, constituído pela ciência em que são especialistas. Contudo, esse auditório tão limitado é geralmente considerado pelo cientista não como um auditório particular, mas como sendo realmente o auditório universal: ele supõe que todos os homens, com o mesmo treinamento, a mesma competência e a mesma informação, adotariam as mesmas conclusões [...] são auditórios concretos particulares que podem impor uma concepção do auditório universal que lhes é própria; mas, em contrapartida, é o auditório universal não definido que é invocado para julgar da concepção do auditório uinversal própria de determinado auditório concreto, para examinar, a um só tempo, o modo como é composto, quais os indivíduos que, conforme o critério adotado, o integram e qual a legitimidade desse critério. Pode-se dizer que os auditórios julgam-se uns aos outros." (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005, pp. 38-9)

[61] A distinção entre inspecionabilidade local e global aqui utilizada está sugerida em "The Surveyability of Mathematical Proof: A Historical Perspective" (Bassler, 2006), e será trabalhada em maior detalhe no quarto capítulo.

algum sentido relevante, na compreensão (ou compreensibilidade por um auditório universal) da prova é problemática, uma vez que tal exigência constitui mais propriamente o domínio das provas idealizadas, formais, do que o das provas *simpliciter*. Afinal, como poderíamos exemplificar com a prova do T4C, nem os diversos textos de divulgação da prova, nem o texto que apresenta a prova ela mesma contém na íntegra todos os *outputs* dos cálculos realizados mecanicamente – e mesmo assim não parece legítimo afirmar que essa ausência implica que não se compreenda a prova *como um todo*, ou seja, os principais conceitos que aciona, seu modo de se relacionar (os exemplos mais óbvios: o método das cadeias de Kempe e sua versão algorítmica – o algoritmo de descarga desenvolvido por Heesch para a construção do conjunto inevitável de configurações redutíveis). Mesmo não sendo possível para um só indivíduo no tempo de uma vida humana inspecionar todas as execuções e resultados dos cálculos mecanicamente realizados, podemos ler e compreender o programa (entendido grosso modo como conjunto de instruções, o algoritmo para a realização dos cálculos) executado para alcançar os resultados desejados – e o podem, com ainda mais propriedade, os especialistas que verificaram a prova. Já vimos ao final do capítulo precedente como os autores respondem às críticas de deselegância de seus procedimentos, bem como o modo através do qual consideram que sua prova é “facilmente replicável”, desde que se disponha não apenas da maquinaria mas também da paciência e do tempo requeridos para sua reprodução.

Pareceria razoável sustentar que os diferentes *graus de detalhamento* na apresentação da prova dependem estritamente do *grau de familiaridade* do público com os conceitos e métodos matemáticos em questão, variando também, de acordo com o mesmo índice, o *grau de compreensão* da mesma. Teríamos, assim, destacado o aspecto retórico da contexto-dependência das práticas matemáticas de prova, conservado mesmo em uma prova como a do T4C – na medida em que detalhes acerca da assistência computacional podem não ser relevantes dependendo da ocasião de sua apresentação. O aspecto dialético, por sua vez, permanece na existência de um auditório de especialistas familiarizados com todos os procedimentos em questão, o que justamente os capacita a inspecionar o processo do modo mais detalhado possível – verificando a execução dos programas em máquinas distintas das utilizadas pela equipe de Appel e Haken.

Há, aliás, um ponto que merece destaque como reforço de nossa leitura da prova do T4C a partir de considerações de ordem retórico-dialética. Em entrevista a MacKenzie, por exemplo, Haken afirmam acerca do processo de verificação da prova:

> Queríamos que [o artigo] fosse revisado pelos melhores especialistas possíveis. Então conseguimos com o editor [que] o *referee* da inevitabilidade, fosse Jean Mayer, que era o melhor homem do mundo para isso naquela época, e Ken[neth Appel] estava passando seu ano sabático lá[62]... e estava presente para responder qualquer questão... Do mesmo modo com o outro [*referee*], o melhor homem para programas computacionais era Frank Allaire. Ele tinha, à época, programas melhores do que os de Heesch, e muito melhor ainda do que os nossos. Ele foi o *referee* da reducibilidade. (MacKenzie, 2001, p. 135)

A existência de poucos especialistas capazes de verificar algumas seções de uma prova matemática, deve-se observar, não pode ser considerada exclusividade do nosso estudo de caso. MacKenzie lembra, logo na sequência da citação da entrevista com Haken, que o mesmo tipo de situação – o contato constante com os *referees* da prova – ocorreu com Andrew Wiles durante os dois anos que se seguiram ao seu anúncio da prova do Último Teorema de Fermat e a publicacão definitiva da mesma, em 1995. Outro exemplo que poderia ser invocado aqui é o do acima referido Teorema da classificação dos grupos finitos simples.[63]

Uma possível objeção é a seguinte: ainda que a *apresentação* das provas seja contexto-dependente e sua *verificação* exija aquele auditório universalizável, deve ainda assim haver pelo menos um traço compartilhado por todas as provas, que lhe sirva como critério de identificação. A isso, entretanto, por ora somente podemos contrapor a observação de que a quadrúplice caracterização de Chateaubriand (os quesitos lógico, psicológico, social e ontológico para provas) nos parece sugerir um caminho para a construção do critério de "unicidade" exigido na objeção. Isso porque, ao mesmo tempo em que possibilita a compreensão dos fenômenos de prova como eventos cuja realização (apresentação) depende em boa medida do contexto nos quais ocorrem, ela também permite contemplar o inegável

---

[62] O dêitico refere-se à França: Jean Mayer foi citado acima (cf. nota 11) por ser o autor do artigo sobre as anotações do poeta francês Paul Valéry acerca do T4C. Apesar de ser um *outsider*, professor de literatura na Université Paul Valéry (Montpellier), Mayer chegou a colaborar com Appel e Haken no desenvolvimento de procedimentos de descarga (cf. Fritsch & Fritsch, 1998, p. 32).

[63] Para a verificação das duzentas páginas da prova de Wiles o editor de *Inventiones Mathematicae* escolheu seis (os invés dos tradicionais três) *referees*. O contato entre Wiles e o examinadores durou cerca de dois anos por causa de um erro na prova da conjectura de Taniyama e Shimura, absolutamente essencial à prova. Para detalhes sobre esse processo de verificação e correção cf. os sexto e sétimo capítulos do livro de Simon Singh, *O último teorema de Fermat*, traduzido para o português em 2008. Sobre o teorema da classificação de grupos cf. seção 1.2.7 acima.

fato de que, em outra medida, provas são dotadas de uma objetividade que independe dos diferentes contextos nos quais são realizadas.[64]

Gostaríamos de observar que nosso apoio na concepção de Chateaubriand não implica necessariamente a defesa de alguma forma de platonismo, no sentido de postulação de um domínio de entidades ou formas abstratas às quais as verdades matemáticas se refeririam. Em termos wittgensteineanos poderíamos dizer que a objetividade das provas, bem como o sentido que conferem aos teoremas, é independente de qualquer realidade extra sistemática (onde *sistema* deve ser compreendido como a área ou a correlação de áreas da matemática no interior da qual a prova é realizada). Seriam, nesse sentido, as *relações internas* entre conceitos e métodos em questão em uma prova o que confere a seus resultados, os teoremas, o estatuto objetivo de *normas* ou *critérios* de atividades matemáticas (e extra-matemáticas) – e não a referência à alguma realidade exterior ao sistema simbólico dentro do qual fazem sentido/são verdadeiras.

Para completar o esboço de nossa primeira distinção deve-se notar que num certo sentido o domínio das provas assistidas por computador é, ainda hoje, menos extenso do que o das provas formais, embora venha crescendo de modo significativo. Além disso, as assistências computacionais podem assumir diferentes níveis, como observavam Kreisel e Wang ainda na época do artigo de Tymoczko. Lembremos: Wang distingue entre a *verificação* de provas já existentes e a *descoberta* de provas com o auxílio de programas, enquanto Kreisel realiza uma tripartição, incluindo na lista de Wang o que ele denomina *transformação* de provas. Uma atualização dessa tipologia de usos de computadores em provas pode ser encontrada no recente artigo "Experimental mathematics, computers and the a priori" (McEvoy, 2011), no qual são listados três tipos de apelo a computadores em provas matemáticas:

[64] Como Lassalle Casanave & Panza sugerem (manuscrito em preparação), entretanto, mesmo a inexistência de auditório universal (diante do qual todos os detalhes da prova seriam apresentados) não elimina a ideia de um auditório universalizável, tampouco a possibilidade de sucessivas reinterpretações das provas auditório para auditório, adaptando-se assim o grau de especificidade da apresentação das provas conforme seu contexto (seus objetivos, formas, conceitos, métodos e auditório) de enunciação/realização. Teremos a oportunidade de analisar e explorar essa ideia nos capítulos seguintes, sobretudo no que se refere à sua associação com o emprego da noção de *surveyability* de provas (no quarto capítulo).

(a) “number crunching” – seus exemplos: a busca pelo maior primo de Mersenne e a prova de que a conjectura de Goldbach vale para todos os números pares menores do que 2×10^{10};

(b) “verificações” de hipóteses que, em realidade oferecem um forte suporte para a verdade das conjecturas, mesmo na ausência de uma prova – um de seus exemplos é o “Teste de Montecarlo” para a primalidade de um número, mas poderia, a nosso ver, incluir também os procedimentos heurísticos de Appel e Haken na descoberta do algoritmo preciso para a prova do lema chave de redutibilidade;

(c) provas que envolvem uma enorme quantidade de cálculos, humanamente irrealizáveis – uso em questão na construção do conjunto inevitável de configurações redutíveis da prova do T4C (Cf. McEvoy, 2011, pp. 2-3)

Em resumo, o domínio das provas matemáticas *simpliciter* é enormemente maior e mais diverso do que o das provas formais. Exemplos das primeiras são a prova da irracionalidade da raiz quadrada de dois, as diversas variações da prova do Teorema de Pitágoras, ou os exemplos discutidos por Chateaubriand.[65] Exemplos do segundo tipo encontram-se em Wiedijk, (2008, p. 1408): as três versões da prova do primeiro Teorema da Incompletude de Gödel (de N. Shankar, R. O’Connor e J. Harrison) e a versão de G. Gonthier para a prova do T4C.

As provas assistidas por computador, por sua vez – cujo exemplo mais famoso é sem dúvida o da prova do T4C – constituem um domínio ainda menor do que o das provas formais, mas não menos interessante enquanto matéria de investigação filosófica, sobretudo se estamos lidando com um exemplo concreto de como elas engendraram disputas cujos pontos centrais ainda hoje merecem esclarecimentos – seja pela reativação de temas e problemas tradicionais da filosofia da matemática e do conhecimento, mas também por possibilitar a compreensão e a elaboração de problemas de filosofia da informática, tão recentes quanto a invenção mesma da disciplina. Seria preciso acrescentar, ainda com relação aos exemplos de provas assistidas por computador apresentados por McEvoy, a diferença entre provas, como a do T4C, nas quais os programas

[65] Trata-se da prova, usual em classes de lógica elementar, de que um domínio R é infinito a partir de algumas hipóteses e a prova, por indução matemática, de que $1+2+...+n = n^2 + n/2$. (Cf. Chateaubriand, 2005, p. 285 e *ssq*, bem como Lassalle Casanave, 2008)

utilizados são construídos tendo-se em vista apenas a prova em questão (um programa *ad hoc*), e os assim chamados assistentes de prova [*proofs assistants*], como HOL, HOL Light, Isabelle e Coq – sistemas formais capazes de construir provas[66] de teoremas dos mais diversos ramos da matemática.

Parece propício apresentar uma possível organização diagramática das relações que estamos estabelecendo entre distintos "domínios" do universo das provas matemáticas no interior do universo das práticas matemáticas, bem como o "lugar" no qual podemos, ainda que provisoriamente, alocar a prova do T4C.

A título de complementação classificatória seria preciso ainda alocar em nosso desenho da distinção o uso de provas na verificação de propriedades matemáticas de sistemas computacionais, ou seja: considerar também provas (não necessariamente provas formais, mas no sentido mesmo de raciocínio rigoroso que acompanha as provas *simpliciter*) *sobre* computadores, o que aqui faremos com a segunda das figuras abaixo.[67]

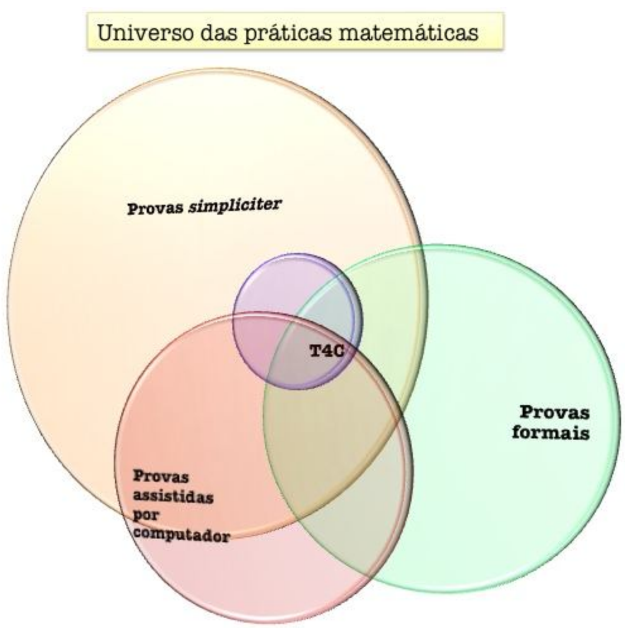

Figura 13: Uma possível diagramação das relações entre distintos tipos ou domínios de provas, e o lugar da prova do T4C.

[66] Pode-se com proveito obter informações sobre um desses "sistema de gerenciamento de provas formais" na página do INRIA, o instituto francês de pesquisas em informática e *sciences du numérique*, onde se apresenta Coq, o sistema no qual Gonthier formalizou a prova do T4C referida no primeiro capítulo, nota 29: http://coq.inria.fr/faq?som=5#htoc31

[67] Uma abordagem sobre as diferentes "culturas de prova" pode ser encontrada em "Computing and the cultures of proving" (MacKenzie, 2005). Apresentaremos um diagrama incluindo esse tipo de prova sobre computadores no início no capítulo IV.

3.4
Uma distinção distinta: provas como atos, como objetos e como traços

Qualquer investigação filosófica acerca das práticas matemáticas de prova que aceite a distinção acima fornecida não pode deixar de levar em conta que a diversidade das provas *simpliciter* com relação a objetivos, contextos e métodos implica em numa espécie de *sobredeterminação* da noção de prova, mais ou menos nos moldes do que sugere G. Sundholm em “Questions of proofs” (Sundholm, 1993).[68] Para Sundholm as provas podem ser consideradas sob os seguinte diferentes aspectos:

(θ) como *atos* (num sentido relativamente próximo às *provings* de Chateaubriand);

(σ) como *objetos* (mais próximo ao sentido das *proofs*, as provas formais, embora também se refira com a expressão ao resultado do ato ou processo: o teorema ele mesmo);

(ι) como *traços* (podendo, nesse caso, ser interpretadas como vestígios do ato de prova e, ao mesmo tempo, como *instruções* para a realização do mesma).

Uma das vantagens dessa distinção consiste em escapar à tradicional distinção processo-produto à qual se poderia recorrer para dispor os diferentes aspectos das provas matemáticas. Isso ocorre justamente através da introdução de elementos que explicitam a passagem de um (o ato ou processo de provar) ao outro (a prova como objeto resultante do ato), ou seja, os traços ou instruções que, seguidas ou executadas, regulam processos de prova. Além do mais ela parece permitir uma visão suficientemente mais clara daquela sobredeterminação do conceito de prova que, de algum modo, já estava contemplada na concepção de Chateaubriand.

---

[68] É verdade que os objetivos da análise de Sundholm estão mais diretamente relacionados ao contexto de discussões em torno da semântica de teoria da prova. O modo como sua distinção será acionada aqui, e as possíveis incongruências desse acionamento com a abordagem original de Sundholm, são de nossa exclusiva responsabilidade.

Nossa estratégia de apresentação da distinção consiste basicamente em colocá-la em operação através de uma comparação acaso extravagante entre práticas matemáticas de prova e práticas culinárias. Antes de fazê-lo, vale observar que a comparação é explorada, ainda que de modo relativamente distinto do nosso, pelo próprio Sundholm – a partir da sugestão de Per Martin-Löf de que a distinção entre ato, objeto e traço poderia ser ilustrada considerando o caso de uma corrida de esqui realizada por um esportista. O ato consistiria em perfazer a corrida, enquanto o objeto seria a chegada ao final do trajeto. Sundholm explica do seguinte modo a ideia de Martin-Löf:

> O traço, ou rastro, deixado pelo ato de esquiar é, nesse caso particular e devido a natureza da atividade, nada além de um par de rastros, talvez complementado com bandeiras e sinais. Esse *traço do ato* de esquiar possui a propriedade de *habilitar outros esportistas a levar a cabo o ato que produzirá o mesmo resultado*, ou seja, a chegada, simplesmente seguindo o par de rastros e e prestando atenção às bandeiras e outros sinais. O ato de esquiar pode deixar ainda outro traço na forma de um registro escrito ou descrição do caminho tomado. Essa forma de traço, igualmente, pode servir para habilitar alguém a levar a cabo o ato de esquiar que vai completar o mesmo trajeto que o original. De fato esse parece ser o exato caso dos guias de viagem (contanto que eles não tenham sido escritos com base em "viagens de cadeira", quer dizer, na cópia de outros guias. (Sundholm, 1993, p. 62)

A partir da imagem sugerida por Martin-Löf Sundholm propõe outros dois exemplos de atividades guiadas por "traços" – jogar xadrez e cozinhar. Exploraremos a comparação entre provar e cozinhar esperando que com ela seja possível destacar os aspectos mais elementares da distinção entre provas como atos, objetos e traços.

Consideremos, então, o caso da preparação de um macarrão ao molho pesto. Primeiramente, devemos dispor de todos os ingredientes – água, macarrão e azeite (para a base do prato), manjericão fresco, alho, pinoli, óleo de oliva, sal e queijo parmesão (para o molho) – não esquecendo da disposição dos instrumentos: faca, panela, escorredor, pilão e fogão. Pode-se ir aquecendo lentamente a água para o macarrão enquanto se prepara o molho – o que se faz assim: após descascado, tritura-se o alho (de preferência com um pilão manual) e, aos poucos, maceram-se as folhas de manjericão. Acrescentam-se em seguida o pinoli, o queijo e o azeite, adequando-se por fim a quantidade de sal (e talvez de pimenta), a gosto. A água para o macarrão já deve, a essa altura, estar fervendo.

Basta, então, proceder como de costume e cozinhá-lo durante o tempo indicado na embalagem (ou não, isso depende, como o sal, do gosto de cada um: há quem prefira um cozimento *al dente*, outros um cozimento mais tenro). Por fim, e após escorrer o macarrão, adiciona-se o molho ao macarrão e *voilà*.

A partir dessa receita e com base na comparação de Martin-Löf, podemos agora reforçar a ilustração da distinção entre provas como atos, objetos e traços, começando por notar que, de acordo com Sundholm, o objeto do ato em questão em nosso exemplo é o prato finalizado: macarrão ao molho pesto. A comparação nos daria, do lado das provas, o teorema como resultado ou objeto do ato de prova.

Os traços do ato podem, por sua vez, ser considerados sob duplo aspecto: como *os resquícios* deixados na cozinha – índices da preparação do prato (o pilão utilizado, a garrafa de óleo de oliva, as cascas de alho, os talos do manjericão, o escorredor de macarrão, etc) – e como *a receita*, com todos os seus elementos, a saber, listagem de ingredientes, instrumentos e algumas instruções para sua manipulação. O que está em jogo nessa subdivisão dos traços pode ser expresso do seguinte modo: somente alguém dotado de considerável *expertise* culinária seria capaz de reproduzir satisfatoriamente a preparação do prato (ato e objeto, portanto) apenas com os indícios do ato, sem o auxílio da receita. A subdivisão não é tão premente no exemplo de Martin-Löf uma vez que os resquícios de uma corrida de esqui são, num certo sentido, muito mais evidentes (trata-se de seguir um caminho ou rastro *visível*) do que os resquícios da preparação de um prato (sobretudo porque o modo como os indícios culinários são deixados vai depender do quão organizado é o cozinheiro).

Nesse sentido pode-se afirmar que a receita efetivamente cumpre aquilo que os resquícios dificilmente conseguem, a saber, a função de capacitar alguém (talvez se pudesse dizer: qualquer membro do auditório universal) a cozinhar o mesmo prato. Sundholm observa ainda outra sugestão de Martin-Löf, fornecida em comunicação pessoal, de que uma boa maneira de compreender a prova como receita é considerá-la como símile de um *programa*, enquanto os ingredientes seriam os *inputs* a ele associados:

> A execução do programa/procedimento/receita tem o prato preparado como resultado. A receita juntamente com o *mise en place* dos ingredientes é, assim, o análogo de um objeto de prova não-canônico. O prato acabado obtido através da execução da receita, por outro lado, está em forma canônica. (Sundholm, 1993, p. 63) [69]

Por fim, o ato de preparação consiste, como se deve supor, na sequência ordenada de procedimentos ou operações realizados com o objetivo final de preparar o prato.

É claro que a comparação do caso culinário de fazer ou executar uma receita com o caso matemático de provar um teorema apenas pode ser relevante como analogia no sentido de analogia estrutural. Isso quer dizer que não estamos comprometidos com qualquer paralelo das práticas matemáticas e culinárias em termos das "subtâncias" que manipulam, os "objetos" nelas envolvidos.[70] Se o ato de preparar o macarrão resulta no (objeto) prato preparado, o ato de realizar uma prova resulta no (objeto) teorema provado. Embora não sejam procedimentos de manipulação mais ou menos regrada de objetos físicos – como o são mais ou menos regrados conforme a receita e os fins de sua execução os procedimentos culinários – em certo sentido qualquer procedimento matemático de prova envolve um tipo de manipulação, a saber, a manipulação regrada de símbolos matemáticos (e, em medida variável, palavras da linguagem natural). Apenas nessa medida é que apostamos na autenticidade da analogia estrutural aqui proposta.

Vale destacar, por outro lado, a diferença crucial entre o caso da manipulação dos ingredientes e instrumentos envolvidos na receita – que pode, como dissemos, ser mais ou menos regrada "a gosto" (a quantidade de sal e o ponto de cozimento do macarrão, por exemplo) – e a manipulação regrada que constitui parcialmente o ato de provar. No último não há qualquer tipo de variação

[69] Vê-se, assim, o comprometimento de Sundholm com as questões de semântica de teoria da prova, uma vez que nesse contexto de investigação as noções de prova canônica e demonstração, sugeridas por Michael Dummett, são bastante relevantes. Uma prova canônica é, para Dummett, uma prova "propriamente dita", na qual não ocorrem desvios, "normalizada" (na versão em dedução natural) ou na qual todos os cortes (na versão do cálculo de sequentes) são eliminados. Vale notar que para Dummett uma demonstração que forneça os *meios efetivos* para que uma prova canônica seja encontrada é tão cogente quanto essa última, "mas é em termos da noção de prova canônica que os significados das constantes lógicas são dados." (Dummett, 1978, p. 240)

[70] Estamos seguindo aqui as distinções entre tipos de analogia oferecida no pouco ortodoxo *Dicionário de filosofia* de Mário Bunge.

conforme a algo subjetivo como o gosto.[71] Ainda assim, como viemos até aqui sugerindo, há, com relação a apresentação das provas, uma variação no grau de detalhamento de seus elementos, sua complexidade e compreensibilidade, conforme a familiaridade do público com conceitos e procedimentos nelas envolvidos. Um *chef* experimentado não precisa nem de receitas, nem tão pouco de instruções técnicas sobre como preparar um marinado, por exemplo, para a realização de seu trabalho (criar e reproduzir pratos com alguma originalidade) – do mesmo modo que matemáticos[72] não precisam de instruções técnicas acerca de como realizar operações básicas envolvidas na prova de algum teorema, para realizar o seu trabalho (criar e reproduzir conhecimentos matemáticos com alguma originalidade).

É claro ainda que nem todo cozinheiro é um *chef* de alta estirpe, e que nem todo matemático é um *expert* em matemática avançada. Mas em ambos os domínios deparamo-nos com uma certa adaptabilidade do grau de instrução e informação explícitas que ocorrem nas suas práticas – relatividade que diz respeito, no caso das práticas culinárias, ao conhecimento do cozinheiro ao contexto em que cozinha e aos seus objetivos (se, por exemplo, o *chef* está dando um curso de culinária para *chefs* iniciados ele vai ter de explicitar suas técnicas muito menos do que se aparecer na televisão para dar uma receita ou se escrever um livro para leigos. E certamente terá de escolher a receita que vai cozinhar com base no mesmo tipo de consideração quanto ao nível de conhecimento do público).

No caso das práticas matemáticas de prova, por sua vez, a “relatividade” à qual nos referimos diz respeito aos detalhamentos e explicitações de pressupostos na orientação para a realização ou as apresentações das provas, que variam de acordo com a perspectiva do conhecimento prévio do público diante do qual ela se

[71] Embora não seja de hoje o concernimento de matemáticos e filósofos da matemática com distinções entre *estilos* de provar e mesmo pensamento matemático – de acordo com P. Mancosu, esse tipo de consideração remonta pelo menos ao ambiente intelectual europeu do século XVII. Para mais informações sobre o tópico cf. o verbete “Mathematical Style” da *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. http://plato.stanford.edu/archives/spr2010/entries/mathematical-style/, 2010. A fonte mais elaborada no que se refere a essa discussão (estendida ao domínio das ciências em geral) é o livro de Gilles-Gaston Granger, *Filosofia do estilo*. Trad. Scarlett Marton. São Paulo: Perspectiva & Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[72] “Aqueles capazes não só de compreender as teorias matemáticas mas também de procurar novas”, como os caracteriza Hadamard antes de apresentar sua discordância com relação à distinção de Poincaré entre “lógicos” e “intuitivos”, “analistas” e “geômetras” (Hadamard, 2009, p. 127).

reproduz ou realiza, bem como dos objetivos aos quais a prova está sujeita. Se tais objetivos são didáticos – exercitar os alunos em determinadas técnicas de prova, por exemplo – ou se se trata de divulgar uma prova inédita de um teorema diante de especialistas capazes de verificá-la passo a passo, as diferenças de auditório são relevantes.[73]

Essas considerações comparativas estão tecidas mormente da perspectiva das provas enquanto traço *como receita*, ou seja, *como conjunto de instruções* – embora seja possível pensar que uma receita é também um *objeto* analisável em si mesmo e, inclusive, comparado com outras receitas para que disso se extraiam algumas conclusões, digamos, "metaculinárias" (algo como uma classificação dos tipos de receitas, ou destacamento de propriedades mínimas que todas receita deve conter para cumprir seu papel de receita, etc). Do mesmo modo, provas matemáticas podem ser analisadas como objetos, para que disso se extraiam conclusões metamatemáticas.[74] Como vimos anteriormente, é no contexto de surgimento das investigações metamatemáticas que se pode situar a emergência daquela concepção padrão de prova, como sequência encadeada de axiomas ou de proposições derivadas dos axiomas através de regras de inferência – que, como vimos, ao menos para Hilbert e Wang deveria preservar a capacidade de ser inspecionável como uma figura intutiva, passível de reconhecimento através do padrão notacional nela utilizado, ao mesmo tempo em que pode ser discretamente acompanhada passo a passo.

3.4.1
Breves notas sobre conhecimento simbólico

A última observação é ensejo para a continuação de um brevíssimo comentário elaborado acima sobre o papel do conhecimento simbólico na aquisição de conhecimento matemático e, especialmente, na produção de provas desde a perspectiva do fundacionalismo. Apontamos anteriormente para o

---

[73] Sobre o tópico específico dos objetivos e da classificação de provas em contextos didáticos cf. "Some pedagogical aspects of proof" (Hanna, 1990) e "Beyond Proving and Explaining: Proofs That Justify the Use of Definitions and Axiomatic Structures and Proofs That Illustrate Technique" (Weber, 2002). Para uma abordagem de fôlego sobre a diferença entre explicação, argumentação e demonstração na didática da matemática cf. os *Elementos de didática matemática* (Bruno D'amore, 2007), especialmente cap. 11.

[74] Para uma visão geral sobre os diferentes ramos de investigações metamatemáticas de provas cf. "Some facts from the theory of proofs and some fictions from general proof theory" (Kreisel, 1979).

contexto da obra de Frege como cenário contemporâneo de engendramento da ideia de que uma linguagem lógica perfeita deve preservar *clareza/perspicuidade/transparência* (*Übersichtlichkeit* no alemão de Frege; *perspicuity* no inglês de Russell)[75] e, ademais, que ao elaborar uma defesa de sua lógica Frege posicionou-se em oposição a Boole e sua "lógica de fórmulas". Ora, para sermos mais precisos devemos observar que as disputas entre Frege e os booleanos (também chamados de "algebristas": além de Boole especialmente Schröder) são parte verdadeiramente pertinente de uma tradição que remonta ao menos até Leibniz, e que se tem justamente convencionado denominar de tradição do conhecimento simbólico.[76]

Em um texto recentemente publicado sobre o conhecimento simbólico em Leibniz, Oscar Miguel Esquisabel formula em seis pontos os aspectos principais do *pensamento simbólico* – dependente do uso de fórmulas e diagramas – através do qual o tipo simbólico de conhecimento é alcançado:

[1] O pensamento simbólico exige estruturas simbólicas como *sistemas de objetos físicos sujeitos à operações de construção e transformação de acordo com regras* – o que o conecta com a ideia de que o pensamento é um tipo de cálculo ou computação e, por conseguinte, ao projeto de construção de sistemas simbólicos nos quais as inferências são reduzidas a transformações simbólicas regradas, concordando, portanto, com o modelo de uma máquina: "Obteríamos, assim, o *filum mechanicum meditandi*." (Esquisabel, 2012, p. 22)[77]

[2] Cumpre uma *função subrogatória*, na medida em que é compreendido como um *sucedâneo do conhecimento intuitivo*, ou seja, ao invés de se considerar as ideias "diretamente" o que se manipula nesse pensamento são os seus substitutos, as expressões simbólicas mesmas: "a estrutura do objeto é projetada na sintaxe da expressão simbólica." (*loc. cit.*)

---

[75] Cf. nota 51 acima: para Frege e Russell essa propriedade necessária da linguagem lógica perfeita diz mais respeito à falta de lacunas calculatórias (que mais tarde associaremos à ideia de *inspecionabilidade*) do que propriamente a capacidade de ter uma *visão sinóptica* dos encadeamentos calculatórios.

[76] Sobre as fontes das investigações de Leibniz cf. *A chave universal: artes da memorização e lógica combinatória desde Lúlio até Leibniz*, (Rossi, 2004), especialmente o último capítulo.

[77] Esquisabel observa, entretanto, que a atitude de Leibniz com relação à concepção de pensamento como cálculo varia de acordo com sua compreensão do conceito de cálculo. (Esquisabel, 2012, p. 44)

[3] O pensamento simbólico cumpre importante *função cognitiva*, dada a possibilidade de captar *na sintaxe* de um sistema simbólico específico *as estruturas formais* que determinam o domínio objetivo por elas representado (onde o conceito de expressão ou representação simbólica pode ser compreendido em termos de um morfismo entre sistema simbólico e domínio objetivo);

[4] O traço distintivo do pensamento simbólico diz respeito ao fato de que *as expressões simbólicas podem ser separadas de seu sentido* quando as operações inferencias são levadas a cabo, sua *função calculatória*: "O raciocínio torna-se, assim, um tipo de computação. Por meio da mesma abstração de sentido pode-se obter ainda conhecimento sintático e estrutural." (*op. cit.* p. 45)

[5] Há uma *função instrumental* de nosso pensamento exercida por sistemas de signos que satisfazem as condições do pensamento simbólico: eles fornecem meios perceptivos para nossas inferências de modo que se pode testar diretamente a corretude dos passos inferenciais *na composição dos símbolos*. Em outras palavras o pensamento simbólico possibilita o teste *ante oculos* das articulações que apresenta, de modo que "a verdade é determinada metaforicamente falando por meio de um tipo empírico de evidência" – o que por sua vez asseguraria "o mais alto nível de certeza que o intelecto humano pode alcançar" (*loc. cit.)*.

[6] Por fim, ao simplificar operações cognitivas (especialmente a liberação da memória) cumpre o conhecimento simbólico uma *função psicotécnica* ou abreviativa, que envolve estruturas relacionando-se, desse modo, diretamente com [3].

Esse breve excurso sobre alguns tópicos da concepção leibniziana de conhecimento simbólico cumpre em nossa exposição o papel de vincular nossa comparação entre provar e cozinhar como *atos orientados por regras ou instruções*. Mas não apenas isso. Dissemos acima que as provas como traços estão bem compreendidas se lhes reconhecemos a função de instruir alguém a orientar-se num determinado espaço. No caso das receitas (e das instruções técnicas culinárias), orientar-se no espaço culinário com vistas à feitura de um prato. No caso das provas matemáticas, num espaço que evidentemente em muito difere do culinário, pois se trata de um *espaço simbólico*.

Nesse sentido as provas *como traços/mapas* poderiam muito bem ser comparadas com mapas "temáticos" – daqueles aos quais se recorre quando, por exemplo, estamos para conhecer uma nova cidade. A escolha do mapa depende do meio de transporte que estamos dispostos a utilizar (metrô, ônibus, bicicleta, carro, ou mesmo nenhum deles: podemos andar a pé – para o que um mapa das ruas ou uma ferramenta como o *Google StreetView* valem muito mais do que os outros), dos lugares aos quais queremos chegar e, ainda, da finalidade do translado (se quero simplesmente sair flanando pela cidade, não preciso de meios mecânicos de trasporte, e nem sequer de mapas; se quero chegar rapidamente ao aeroporto preciso de um transporte rápido, um táxi com GPS que indique o caminho mais rápido; se quero simplesmente ir até a universidade, posso pegar um ônibus para dele ver a cidade, ou um trem que me leve mais rapidamente, e assim por diante). Mas o que a concepção de pensamento de Leibniz tem a ver com isso?

Ora, pode-se a partir dela pensar, de um modo talvez um pouco selvagem, que justamente *as provas como mapas* (objetos) cumprem as funções cognitiva e ectética do pensamento simbólico ([3] e [5] acima) ou seja: um mapa do tipo que estamos imaginando não somente mostra as *relações internas* entre, por exemplo, as estações das linhas de metrô, mas "fornece à metáfora do *filum cogitandi* uma qualidade que não está completamente expressa na ideia de uma computação mecânica." (Esquisabel, 2012, p. 23)

Queremos com isso destacar que se por um lado o pensamento simbólico é caracterizado como uma série de procedimentos de transformação de signos em outros por regras explícitas (os itens [1] e [4] acima), conduzindo assim à ideia de mecanização dos atos de cálculo, (o *filum mechanicum meditandi* de que nos fala Esquisabel), por outro lado ele contempla alguma ideia de compreensão (algo visual) envolvida em suas operações: "Essa compreensão está baseada na forma visual do arranjo simbólico de modo que a operação nele não é explicitamente governada por regras explícitas." (*loc. cit*) Entre compreender uma receita e compreender um mapa, de todo modo, a capacidade de realizar ou reproduzir a receita ou o percurso, parece envolver a habilidade de "captar" certas relações internas entre símbolos dispostos em uma determinada ordem – embora possam ser atividades em parte mecanicamente auxiliadas.

3.5
Como conclusão

Muitas questões podem ser elaboradas diante das conexões que estamos tentando estabelecer aqui. Caberia por exemplo articular melhor as noções de prova *como traço/mapa* e prova *como traço/programa/receita*. Grosso modo tendemos a considerar que o mais importante, apesar da ambiguidade *traço/objeto* que pode surgir no caso de se pensarem provas como mapas (que, afinal, também são objetos!), é destacar uma das funções que as provas possuem: de orientar-nos num espaço simbólico. Por outro lado, provas são também os atos de orientação (como o ato de cozinhar é um orientar-se na cozinha), que podem ser auxiliados por instrumentos de cálculo, como o computador no caso da prova do T4C. A pergunta relativa ao tipo de compreensão que, assim auxiliada, essas provas podem gerar, será uma das questões para as quais nosso trabalho pretende contribuir com o esclarecimento.

Parece importante destacar a necessidade de distinguir a noção de compreensão que se pode extrair da análise de Chateaubriand, que tem a ver com compreender as ideias centrais de uma prova *simpliciter*, saber ler as informações que a prova explicita, etc, da noção de compreensão que estamos ligeiramente associando a processos de cálculo. Tal necessidade impõe-se na medida em que de um ponto de vista mais próximo ao de Chateaubriand poderíamos dizer que o que compreendemos quando compreendemos uma prova é o seu sentido, determinado pelas relações lógicas que engendra (daí, talvez, seu vínculo com a ideia de explicatividade de provas) enquanto que de um ponto de vista mais próximo da tradição do conhecimento simbólico a compreensão seria algo relacionado com a capacidade de reconhecer no simbolismo determinadas estruturas formais, reconhecimento que ao mesmo tempo capacita a realizar um ato de acordo com regras ou instruções: calcular.

As breves observações sobre a tradição do conhecimento simbólico acima elaboradas, juntamente com as distinções que esse capítulo apresentou, e com relação às quais foram introduzidas, servirão não somente como ferramenta de organização da leitura do argumento central de Tymoczko (no capítulo seguinte) como também de algumas das disputas filosóficas que dele se seguiram (capítulos finais).

Finalizamos com um desenho da distinção entre provas como atos, objetos e traços, que se aplica mormente às *simpliciter*, numerando as funções do conhecimento simbólico apresentadas às quais, acreditamos, cada uma das perspectivas sobre provas pode ser associada.

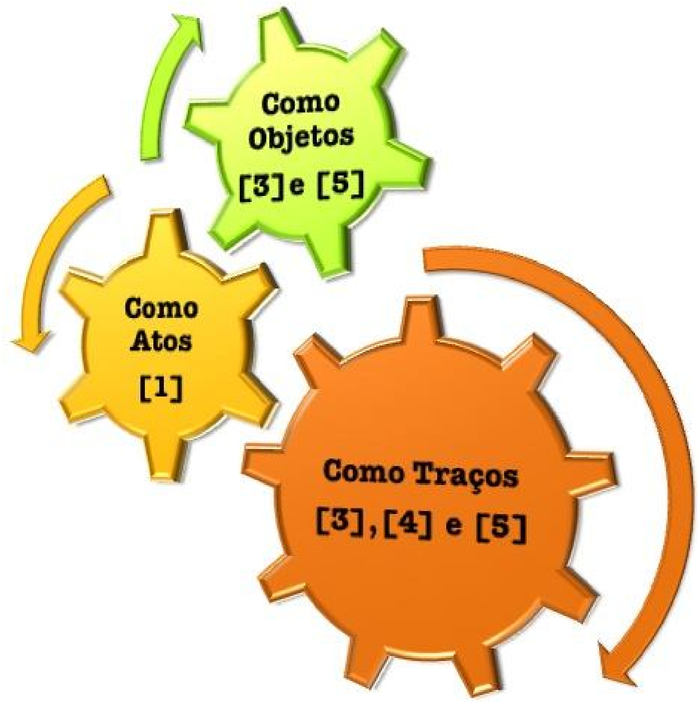

Figura 14: A distinção entre provas como atos, objetos e traços: uma ferramenta de análise de provas *simpliciter* associada às funções do conhecimento simbólico.