4
Do quase-empirismo a outros destinos filosóficos

J'ai dit plu haut les difficultés rencontrées pour dégager certaines notions nouvelles;
Dans quelques cas, cette lente matturation s'est accompagnée des tâtonnements et d'incertitudes,
qui ne correspond guère à l'image d'Épinal
d'une mathématique dispensatrice de vérités parfaites et immuables.[78]
Jean Dieudonnée
"Les Grandes lignes de l'évolution des mathématiques" (1980).

4.1
Introdução: o quase empirismo como pano de fundo

Escrutinar os desdobramentos de disputas filosóficas que processam uma vez mais noções, problemas e distinções filosoficamente tão fulcrais como aquelas em jogo no que se seguiu ao advento de provas auxiliadas por computadores é tarefa que buscamos realizar quase ao modo de Janus. Fato é que apenas o faríamos por completo se concebêssemos os aspectos retrospectivos das disputas, relativos às condições conceituais de seu início, do mesmo modo que os prospectivos, aqueles desdobramentos para os quais efetivamente dirigiremos nossa atenção a partir do presente capítulo.

Assim, sobre os aspectos retrospectivos das controvérsias nos restringiremos a dizer que embora o argumento que originou as disputas filosóficas que nos interessam encontre-se em um artigo publicado no final da década de setenta (Tymoczko, 1979) autentica-se seu registro de filiação teórica no volume no qual foi reeditado: *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, uma coletânea de textos cujo traço comum pretende ser a defesa do *anti-fundacionalismo* em filosofia da matemática. Na introdução da coletânea, organizada por ele mesmo, Tymoczko afirma a relevância das provas informais dentre algumas práticas matemáticas ignoradas pelos filósofos fundacionalistas (platonistas, intuicionistas, logicistas e formalistas). Além desse gênero de provas, que poderia figurar na classificação oferecida no capítulo anterior como conjunto parcialmente intersectado com as provas *simpliciter*, o autor menciona ainda

[78] Nossa tradução: "Já disse acima das dificuldades encontradas para desenvolver certas noções novas. Em todo caso, essa lenta maturação é acompanhada de tateios e incertezas que em nada correspondem à Imagem d'Epinal de uma matemática fornecedora de verdades perfeitas e imutáveis."

outros aspectos das práticas matemáticas como "desenvolvimento histórico, possibilidade de erro matemático, explicação matemática (em contraste com provas), comunicação entre os matemáticos, o uso de computadores na matemática moderna, e muitas outras." (Tymoczko, 1998, p. *xvi*)

A partir disso a empreitada do volume é qualificada como um desenvolvimento do que se denomina *quase-empirismo* em filosofia da matemática, uma terminologia emprestada das abordagens de Imre Lakatos e Hilary Putnam. Tymoczko considera o quase-empirismo a melhor alternativa para a falta de apelo que o fundacionalismo sofria então.[79] Ocorre que os referidos representantes dessa pretendida nova abordagem em filosofia da matemática jamais se referem um ao outro e que os textos de Lakatos e Putnam citados por Tymoczko não têm muito mais do que o uso de algum termo ou expressão em comum. Sendo assim, pode-se afirmar que o texto de Tymoczko incorpora-se a um difuso conjunto de teses que "constituem" o quase-empirismo. De acordo com sua leitura dessas teses o processo de construção do conhecimento matemático é fundamentalmente dependente de suporte empírico, *e portanto falível*, embora não resulte em proposições propriamente empíricas (talvez daí o "quase" que as qualifica, bem como às abordagens filosóficas que pretendem sustentar a legitimidade desse vocabulário).

Ora, como dissemos, quando Tymoczko publica seu artigo a tese de que a matemática é uma ciência quase-empírica, que em geral corresponde à ideia contra-hegemônica de que ela é constitutivamente falível, havia sido sustentada por Lakatos – primeiro em sua tese de doutoramento (1961) e mais tarde (1965) na intervenção realizada num congresso em Londres[80] – bem como por Putnam em um artigo constante na coletânea *Mathematics, Matter and Method*.[81] Vale destacar que na versão lakatosiana o quase-empirismo em filosofia da matemática constitui-se predominantemente da tentativa nada trivial de aplicar o falsificacionismo de Karl Popper aos processos de construção de conhecimento

---

[79] Seja por conta das limitações de suas diferentes vertentes, porque algumas pressuposições que pareciam óbvias aos proponentes originais parecem implausíveis hoje em dia, ou mesmo pela perda de frescor e capacidade de estimular bons debates. Essas considerações aparecem na reedição do texto, cf. Tymoczko, 1998, p. *xv*.

[80] A tese de Lakatos foi defendida em 1961 e publicada originalmente em quatro partes, entre 1963 e 1964, no *British Journal for Philosophy of Science*. Já as atas do encontro foram publicados em 1967, como informamos na nota 45 acima.

[81] Trata-se de "What is mathematical truth?" (Putnam, 1975, pp. 60-78), originalmente publicado em 1967, e mais tarde reeditado também na coletânea de Tymoczko.

matemático.[82] Já na versão de Putnam, trata-se da ênfase na destituição do *a priori* como nota característica da matemática, e mesmo da lógica – o que por sua vez remonta às prolíficas relações entre as obras de Russell, Carnap e Quine[83] (isso sem contar a importância da versão peirceana do falibilismo) naquilo que elas influenciam sua compreensão da temática do *a priori* para a determinação do lugar da matemática dentre as demais ciências. Delinear, ainda que com traços muito amplos, o quadro no qual se insere o artigo de Tymoczko, assim nos parece, pode apurar a compreensão de alguns tópicos de seus argumentos.

No artigo, intitulado "The four-color problem and its philosophical significance", Tymoczko pretende colocar em questão o estatuto de teorema concedido ao resultado apresentado como prova do T4C, visando "elucidar o conceito de prova e não tentando uma avaliação do trabalho de Appel e Haken." (Tymoczko, 1979, p. 57) De acordo com o autor, a resposta ao questionamento específico quanto ao caráter de prova do procedimento levado a cabo por Appel e Haken acaba se transformando numa consideração mais geral acerca do papel dos computadores na matemática. Mais do que isso, afirma Tymoczko, essa consideração conduz a sérios problemas filosóficos: mesmo de acordo com "a abordagem mais natural" o uso de computadores na matemática, tal como levado a cabo da prova do T4C, "introduz experimentos empíricos" nas mesmas (*loc. cit.*). Essa introdução, por sua vez, possibilitaria, por um lado, afirmar que "o T4C é a primeira proposição matemática conhecida a posteriori" (*loc. cit.*) – o que reativaria a antiga questão da relação da matemática com as demais ciências – e, por outro (embora mais indiretamente) relacionaria *o uso de computadores* com a questão da *possibilidade de erro* em procedimentos matemáticos (duas das supracitadas características das práticas matemáticas que são, da perspectiva

[82] Sobre a vinculação do falibilismo lakatosiano em filosofia da matemática com o "programa popperiano" cf. Glass 2001a e 2001b. Há também o artigo de S. Feferman cuja leitura ilumina a relação de herança (e radicalização da mesma) de Lakatos para com as investigações sobre raciocínio plausível de G. Pólya "The logic of mathematical discovey vs. the logic structure of mathematics" (Feferman, 1998, pp. 77-104).

[83] Nossa leitura dessas relações se deu através de Wang (1986) e, especificamente naquilo que elas são determinantes para Putnam, apoiamo-nos na recente tese de doutoramento *Hilary Putnam on Meaning and Necessity* (defendida na Universidade de Uppsala) de Anders Öberg (2011). Os textos de Putnam aos quais Tymoczko se refere dizem respeito ao que se convencionou chamar de período do "realismo interno" (ou pragmático) de sua filosofia (intermediário entre a primeira fase, a do "realismo científico" na qual, sob a influência de Quine, Putnam desafia o positivismo ou empirismo lógico então dominante em círculos filosóficos norte-americanos – cujas figuras predominantes eram Carnap e Reinchenbach) e a fase do "realismo do senso comum", provocada pela leitura dos novos wittgensteinianos (em particular Cora Diamond e James Conant).

quase-empirista de Tymoczko, ignoradas pelos fundacionalistas). Uma vez que todas essas consequências da prova do T4C estão vinculadas diretamente ao que denominamos *argumento da introdução da experimentação na matemática via T4C* (a partir de agora AIE), a análise do mesmo será o eixo principal do presente capítulo.

Após a apresentação geral de alguns dos principais conceitos e teses pressupostos do AIE (seção 3.2), procuraremos mostrar como problemas filosóficos clássicos – especialmente envolvidos na distinção entre o domínio do *a priori* x o domínio do *a posteriori* – reaparecem no artigo de Tymoczko e em alguns dos textos que o debatem (seções 3.2.1 e 3.2.2 e respectivas subseções). Quanto aos novos problemas que surgem com a prova do T4C – que em boa parte são constitutivos do nascente campo que se tem chamado de filosofia da informática[84], remeteremos a discussão para o capítulo final da tese. Na seção de conclusão do capítulo apresenta-se um apanhado sinóptico do capítulo que tenta aplicar as distinções introduzidas no capítulo precedente na organização de tópicos das disputas filosóficas iniciadas com o AIE de Tymoczko.

4.2
O argumento da introdução da experimentação na matemática: problemas revisitados

Como dissemos, Tymoczko defende a pretensão de colocar em questão o estatuto de teorema do resultado apresentado por Appel e Haken. Já no primeiro parágrafo, anuncia de modo um tanto vago que a solução “parece” existir:

> O antigo problema das quatro cores foi um problema matemático por quase um século. Os matemáticos parecem tê-lo resolvido satisfatoriamente [for their satisfaction] mas sua solução coloca um problema para a filosofia, que podemos denominar de *novo problema das quatro cores*. (Tymoczko, 1979, p. 57)

Uma queixa poderia, imediatamente, ser dirigida a Tymoczko: ele estaria acionando aquele revisionista *princípio de primeiro-a-filosofia* [*philosophy-first*

[84] Em língua inglesa fala-se em “filosofia da ciência da computação” – como se observa em *The Blackwell Guide to the Philosophy of Computing and Information* (Floridi, 2004) e no verbete da *Stanford Encyclopedia of Philosphy*, intitulado “The Philosophy of Computer Science” (Turner & Eden, 2009). A expressão “filosofia da informática” é mais usual na língua francesa – como se verifica nos títulos dos seminários organizados por Jean-Baptiste Joinet na École Normale Supérieure de Paris (durante ano universitário 2011-12).

principle] aventado por Shapiro.[85] Uma possível defesa quanto ao reclame apontaria para o fato de que seu "novo problema das quatro cores" é filosófico, e não matemático (o que de fato não o defenderia da acusação de revisionismo, uma vez que se trata justamente de uma postura "filosófica"). Nosso autor, entretanto, alega no parágrafo imediatamente seguinte que "a prova foi aceita pela maioria dos matemáticos e o antigo problema das quatro cores deu lugar *na matemática* ao novo teorema das quatro cores." (*loc. cit.*, itálicos nossos) Ora, se a ideia sugerida inicialmente era a de que não há consenso na comunidade matemática acerca da aceitação da solução de Appel e Haken ("os matemáticos *parecem* tê-lo resolvido"), e que isso levaria ao problema conceitual (filosófico) em torno da prova, qual é o *status* da afirmação encontrada na citação acima, de que o antigo problema das quatro cores deu lugar *na matemática* ao novo teorema das quatro cores (como se existisse um antigo teorema e não apenas um problema em forma de conjectura matemática, finalmente resolvido)? Não seria mais coerente permanecer afirmando que o novo problema é filosófico e não matemático? É o que parece indicar a frase "Esta investigação deveria ser puramente filosófica." (Tymoczko, 1979, p. 57)

A falta de uniformidade terminológica (*novo problema das quatro cores* no parágrafo inicial para se referir ao problema *filosófico* que surge com a aceitação da solução de Appel e Haken, e *novo teorema das quatro cores* para se referir a um problema *matemático* que está *aparentemente* resolvido) revela uma confusão que aumenta ainda mais com a segunda frase, que afirma que o que se vai analisar é a questão de *se* o T4C foi *mesmo* provado. O que isso quer dizer? Que pode ter havido um erro na prova? Tymoczko teria disponíveis as ferramentas (conceitos e métodos) matemáticas para uma tal avaliação? Mais precisamente, e fazendo jus a essa questão, deveria ter sido afirmado que o *problema* foi tomado como *resolvido* (e não o *teorema* como *provado*). Ademais, insistimos: se a comunidade matemática aceitou a solução como prova – ainda que com algumas resistências, gradualmente eliminadas – quais seriam as razões

[85] Cf. Shapiro, 2000, especialmente capítulo 2. Trata-se da ideia de que cabe ao filósofo da matemática o trabalho de determinar princípios que guiem as atividades matemáticas. O princípio inverso (*se-filosofia-então-por-último* [*philosophy-last-if-at-all principle*]) é, por sua vez, anti-revisionista.

para um questionamento filosófico da legitimidade da mesma aos moldes do que realiza Tymoczko?[86]

O texto divide-se em quatro partes: uma introdução (cujos pontos principais acabamos de expor), seguida de uma apresentação do conceito de prova do qual destacará "algumas características que nos serão úteis mais adiante."[87] (Tymoczko, 1979, p. 58) A segunda parte contém uma exposição da prova do T4C, com ênfase na explicação do passo indutivo através do qual o lema de D-redutibilidade foi provado, incluindo-se os raciocínios envolvidos na determinação do algoritmo executado pelo computador. A terceira parte apresenta argumentos em favor da ideia de que o T4C não é um teorema no sentido tradicional do termo (o núcleo do AIE propriamente dito), enquanto a quarta e última parte pretende sustentar a afirmação de que a introdução dos computadores nas práticas matemáticas constitui uma *quebra de paradigma* na disciplina (dado o título de "primeira proposição matemática conhecida a posteriori" e o fato de que a prova do T4C forçaria a introdução de considerações acerca do contexto de descoberta na filosofia da matemática).

Apresentaremos em certo detalhe alguns movimentos da primeira e terceira partes do texto. Deixaremos de lado alguns pormenores da segunda parte, uma vez que a exposição da prova feita no primeiro capítulo nos parece suficiente para compreender as linhas gerais dos argumentos em questão. Podemos apresentar de modo esquemático os eixos do AIE de Tymoczko do seguinte modo:

(α) As principais características das provas matemáticas, tradicionalmente consideradas como "deduções *a priori* de uma sentença a partir de premissas" (Tymoczko, 1979, p. 58), consistem em serem (α_a) convincentes, (α_b) inspecionáveis e (α_c) formalizáveis.

---

86 Essa pergunta coloca em jogo novamente o *princípio de primeiro-a-filosofia* apontado por Shapiro como a tônica de uma longa tradição em filosofia da matemática, que desde Platão e Aristóteles contém um forte componente prescritivo com relação às práticas matemáticas.

87 Assim, estamos avisados desde o início que não se trata de uma análise do conceito de prova tal como ele é concebido pelas diferentes escolas fundacionalistas ou nos debates filosóficos implicitamente criticados por Tymoczko e sim um arranjo de aspectos que servem aos propósitos da argumentação do autor.

(β) A prova do T4C, embora seja (α_a) e (α_c), não é (α_b), uma vez que os cálculos realizados com o auxílio de programas computacionais não podem ser verificados passo a passo por uma pessoa no tempo de uma vida humana;

(γ) Os usos de programas computacionais em provas incorporam a experimentação no domínio da matemática, posta sua fundamentação "na determinação de um conjunto complexo de fatores empíricos" (Tymoczko, 1979, p. 74); ademais, no caso específico do T4C, um desses usos é combinado com a introdução de raciocínios probabilísticos;

(δ) Assim, ao apelar forçosamente à execução de programas computacionais, a prova do T4C faz dele "a primeira proposição matemática conhecida *a posteriori*", o que "nos compromete com uma modificação do conceito de prova" (Tymoczko, 1979, p. 58). Desse modo, fica incluída de uma vez por todas na matemática a possibilidade de erro que acompanha todo uso de metodologias experimentais.

Antes de uma análise mais detalhada do AIE, teceremos breves considerações acerca dos tópicos com os quais esquematizamos o argumento. De (α) destacamos a compreensão do que sejam provas no sentido tradicional, como "deduções *a priori* de uma sentença a partir de premissas". Essa caracterização é no mínimo curiosa, pois não há notícia de que alguma vez se tenha encontrado dentre as particularidades da dedução a nota do *a posteriori*.[88] Desse modo, enquanto não se especificar minimamante como a distinção entre as noções de *a priori* e *a posteriori* está sendo concebida, o sentido da alegação permanece impreciso, uma vez que não se poderia diferenciar uma prova matemática de outras deduções *a priori* a partir de premissas que, porventura, não fossem propriamente matemáticas.

[88] Na lista dos sentidos de *dedução* que se encontra no dicionário filosófico de Ferrater Mora, por exemplo, encontramos: "1) é um raciocínio de tipo mediato; 2) é um processo discursivo e descendente que passa do geral ao particular; 3) é um processo discursivo que passa de uma proposição a outras proposições até chegar a uma proposição que se considera a conclusão do processo; 4) é a derivação do concreto a partir do abstrato; 5) é a operação inversa à indução; 6) é um raciocínio equivalente ao silogismo e, portanto, uma operação estritamente distinta da indutiva; 7) é uma operação discursiva na qual se procede necessariamente de algumas proposições a outras." (Ferrater Mora, 2009, p. 790)

Sobre (α_a), o aspecto relativo à geração de convicção, Tymoczko o afirma como o aspecto chave para a compreensão da matemática como atividade humana (donde sua determinação como critério *antropológico*). Ademais, e em geral, esse aspecto dependeria da satisfação dos critérios de (α_b), inspecionabilidade (*epistemológico*), e (α_c), formalizabilidade (*lógico*). Ora, apesar da linguagem imprecisa do início do texto, nosso autor acaba reconhecendo que a prova do T4C foi aceita pela comunidade matemática – embora fosse preciso atenuar essa afirmação constatando que ela havia, à época do artigo, sido aceita *pelo auditório de especialistas*. A comunidade matemática, apesar de que se possa afirmar que estava em princípio persuadida, ainda estava sendo convencida da legitimidade da prova.[89] Desse modo seria adequado considerar que ela satisfaz (α_a).

Poderíamos confrontar a caracterização desse critério com o ponto (φ_2) da concepção de prova de Chateaubriand, a saber, a capacidade de gerar convicção. Aquilo que Tymoczko chama, sem maiores explicações, de critério *antropológico* é, para Chateaubriand, um critério *psicológico*. Caberia, entretanto, perguntar: uma vez que para Chateaubriand as práticas matemáticas de prova têm como principais objetivos a compreensão e a explicação com relação a coisas já compreendidas, por que não considerar a capacidade de originar convicção como uma característica *epistemológica*? Afinal, se o que está em jogo é, para usar mais uma vez uma ideia de Chateaubriand, obter convicção para além da dúvida razoável, não estamos lidando aqui com um vocabulário e uma temática tipicamente epistemológicos? O ponto em destaque consiste menos em propor uma correção da caracterização de Chateaubriand do que sugerir que a qualificação da convencibilidade como aspecto antropológico, como o faz Tymoczko, é demasiado trivial como para dizer algo relevante acerca dos efetivos

[89] A distinção entre persuasão e convicção aqui acionada encontra-se no §6 da primeira parte do *Tratado da argumentação...* (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 2005): “Propomo-nos chamar de *persuasiva* a uma argumentação que pretende valer só para um auditório particular e chamar *convincente* àquela que deveria obter a adesão de todo ser racional. O matiz é bastante delicado e depende, essencialmente, da ideia que o orador faz da encarnação da razão. [...] Digamos de imediato que somente quando o homem às voltas consigo mesmo e o interlocutor do diálogo são considerados encarnação do auditório universal é que adquirem o privilégio filosófico confiado à razão, em virtude do qual a argumentação a eles dirigida foi amiúde assimilada a um discurso lógico.” No nosso caso, portanto, parece que se poderia dizer que nos anos imediatamente seguintes ao da publicação da prova do T4C por Appel e Haken a comunidade matemática, como auditório universal, estava sendo progressivamente convencida daquilo ao que os especialistas já estavam persuadidos.

aspectos antropológicos das práticas matemáticas de prova – um tópico de relativo interesse em uma abordagem wittgensteineana, como veremos adiante.[90]

Sobre (α_b), percebe-se uma certa flutuação de sentido ao longo de todo artigo – ora Tymoczko parece aceitar que vale apenas uma inspeção mais geral (ou, no vocabulário introduzido no capítulo precedente, *inspecionabilidade global*), ora é preciso poder inspecioná-la passo a passo (ou *inspecionabilidade local*). Com relação à prova do T4C, em particular, Tymoczko destaca o fato de que não se pode, no segundo sentido, verificar os cálculos necessários à prova do lema principal, pois “nenhum computador imprimiu a prova completa do lema chave de redutibilidade”, embora reconheça imediatamente que “um tal documento [nem] seria de muita valia para um ser humano.” (Tymoczko, 1979, p. 68).

Todavia, ainda que a prova do lema-chave de redutibilidade tivesse sido impressa, e que por conseguinte pudéssemos verificá-la localmente, linha por linha, a prova permaneceria não sendo explicativa – um dos pontos em questão em boa parte das críticas, filosóficas ou não, à prova do T4C. Essa nos parece, então, a ocasião de lembrar que ao apresentarmos a concepção de prova de Chateaubriand, observamos também o caráter ligeiramente indistinto que o conceito de compreensão assume nessa abordagem. Ora, parece que tais considerações sugerem a necessidade de ajustar a noção de compreensão com a de explicação nas matemáticas, o que talvez seja a oportunidade de considerarmos uma proposta de Gilles Dowek em *Les métamorphoses du calcul*, relacionada com nosso estudo de caso. Trata-se da ideia de que qualquer rejeição da prova do T4C com base em sua não-explicatividade[91] indicaria apenas que os conceitos de *prova* e *explicação* precisam ser distinguidos, e não que seja preciso aceitar a curiosa tese de que, ainda que a comunidade matemática tenha se convencido da legitimidade da prova, embora com base na verificação por parte de um pequeno

[90] Compreendemos “antropológico” como designador de aspectos que envolvem a imersão das práticas matemáticas de prova simpliciter no mundo vivido, seus variados contextos (o artigo de MacKenzie referido na página 57, nota 67, nos parace um bom lugar para desenvolver análises da tais aspectos). Sobre uma possível “correção” da concepção de Chateaubriand no que diz respeito ao aspecto psicológico de provas *simpliciter* talvez se pudesse sugerir a distinção entre persuasão e convicção apresentada na nota anterior.

[91] O que nos obrigaria a rejeitar qualquer prova com um número muito grande de casos, gerando o problema de estabelecer um limite não arbitrário a partir do qual se determinaria a não razoabilidade do procedimento de exaustão: “L’argument que cette démonstration n’est pas explicative vient de l’idée que, s’il est vrai que toutes les cartes sont coloriables avec quatre couleurs, il doit bien y avoir une raison, et il ne peut pas y avoir mille cinq cents raisons différentes allant toutes miraculeusement le même sens.” (Dowek, 2007, p. 172).

grupo de especialistas, não se trata *propriamente* de uma prova, uma vez que não é um processo explicativo.

A questão da distinção entre prova e explicação nas matemáticas não é nova nem dela se pode dizer que possui uma formulação padrão[92]. Sendo assim, e limitando-nos à sua relevância para a prova que investigamos, retomaremos o tópico nos capítulos seguintes, quando a noção de *surveyability* de provas ("inspecionabilidade" até aqui), será trabalhada em maior detalhe. Não discordamos de Chateaubriand com relação ao seu destaque dos objetivos explicativos das provas. Salientamos apenas que uma prova que seja não explicativa pode ser retórica e epistemologicamente menos interessante do que uma que o seja, mas é, ainda assim, e na medida em que é aceita como tal pela comunidade matemática, uma prova.[93]

Quanto a (α_c) – a formalizabilidade – Tymoczko a caracteriza de modo bastante amplo, a partir da noção que ele denomina *lógica* de prova como "sequência finita de fórmulas de uma teoria formal que satisfaz certas condições" – ou conforme a capacidade de ser deduzida "a partir dos axiomas da teoria por meio dos axiomas e regras da lógica." (Tymoczko, 1979, 60) A vagueza dessa determinação não é, por ora, problemática. O que importa destacar é que os critérios apontados como tradicionalmente aplicados às provas não são todos satisfeitos pela prova do T4C: ela abriria uma brecha entre os critérios (α_b), de inspecionabilidade, e (α_c), a formalizabilidade, pois "nenhum matemático *viu* a prova, nem a prova de que há uma prova. Além disso, afirma nosso autor, é bastante improvável que qualquer matemático algum dia veja a prova do T4C." (Tymoczko, 1979, p. 58) Proporemos uma elucidação da questão "em que consiste ver uma prova?", bem como da insuficiência daquela determinação da formalizabilidade – dois tópicos fortemente relacionados – nas seções sobre a noção de *surveyability* no capítulo seguinte.

Vale ainda um comentário da premissa (γ),[94] pois a execução e a verificação mecânicas dos inúmeros cálculos em questão na prova do T4C é uma

[92] Para uma abordagem relativamente sinóptica do tópico cf. Mancosu 2001.
[93] Isso sem contar as "provas que ilustram técnicas" de que trata Weber (cf. nota 73 acima).
[94] "O uso de programas computacionais em uma prova incorpora a experimentação no domínio das matemáticas, posto que se baseia 'na determinação de um conjunto complexo de fatores empíricos' (Tymoczko, 1979, p. 74); ademais, no caso específico do T4C, esse uso ocasionou a introdução de raciocínios probabilísticos".

das vigas sobre as quais Tymoczko pretende sustentar o AIE. De acordo com esse pressuposto os usos de computadores na prova do T4C conteriam em seu bojo um "conjunto complexo de fatores empíricos" que nos forçaria, no âmbito da prova do T4C, a considerações sobre o funcionamento da máquina ela mesma, tanto em termos físicos quanto em termos de programação:

> A confiabilidade na máquina é, em última instância, uma questão a ser avaliada pela engenharia e pela física. É uma sofisticada ciência natural que nos assegura que o computador "faz o que deveria fazer" mais ou menos do mesmo modo que nos assegura que um microscópio eletrônico "faz o que é suposto fazer". Claro que mesmo se garantirmos que a máquina faz o que é suposta fazer – seguir o programa – permanece a questão de se o programa faz o que *ele* é suposto fazer. Essa questão pode ser difícil de responder. A tarefa de avaliar programas é um tópico de ciência da computação, mas presentemente não há métodos gerais para realizá-la nesse nível. Programas eles mesmos são escritos em "linguagens" especiais, e muitos deles podem ser bastante complexos. Eles podem conter "bugs", ou falhas que permanecem despercebidas por um longo tempo. A confiabilidade de qualquer apelo a computadores deve, em última instância, assentar em fundamentos tão difusos quanto esses. (Tymoczko, 1979, p. 74)

A passagem acima tem pontos de contato com diversas questões que serão analisadas na seção 3.2.1.2, onde se tratará de mostrar uma espécie de dependência de Tymoczko para algumas ideias de Saul Kripke.

Já do ponto de vista da possibilidade de erro no procedimento levado a cabo por Appel e Haken – o que nos forçaria à advogada "modificação do conceito de prova" – julgamos a insistência em destacar os elementos empíricos da máquina computadora como tão relevante quanto a insistência no destaque aos fatores empíricos do cérebro humano na avaliação da execução de cálculos muito extensos. A possibilidade de erro humano no cálculo de 939,14 x 320,56, por exemplo, não parece possuir algum privilégio quanto à isenção de erros se comparada com a possibilidade de erro na execução do algoritmo em questão na prova do lema chave de redutibilidade. Em outras palavras, pareceria inevitável reconhecer que a possibilidade de erro é constitutiva dos processos de cálculo (sejam humana ou mecanicamente realizados), o que não quer dizer que o mesmo valha para os processos de prova – uma vez que a própria gramática do verbo provar não autoriza pensar a inclusão de possibilidade de erro no processo.[95]

Além disso, ainda é preciso lembrar que houve mais de um uso do computador na construção da prova, e que nem todos possuem o mesmo estatuto no argumento de Tymoczko. Note-se que apesar da ênfase na indispensabilidade dos passos computacionais não localmente inspecionáveis da prova do T4C, ele reconhece que "em suas linhas gerais, a lógica da prova é fácil de ver" (Tymoczko, 1979, p. 68) – o que parece sugerir outra ênfase, na inspecionabilidade global. Tentando remover "a impressão de que o trabalho de Appel e Haken é apenas um argumento por 'força bruta'", afirma Tymoczko:

> Numa certa medida, o apelo ao computador pode ser considerado como "força bruta", mas ele apenas faz sentido quando situado no contexto de uma nova e sofisticada teoria desenvolvida pelos autores. Entretanto, o estabelecimento de um teorema introduzindo uma teoria nova e sofisticada não é em si mesmo um novo procedimento matemático. O apelo a um computador para fundamentar lemas-chave é. (*op. cit*)

Isso talvez corroborasse nossa aplicação da distinção entre dois tipos de inspecionabilidade (local e global) à leitura do AIE de Tymoczko. Embora se possa concordar com a afirmação bastante geral de que o trabalho de Appel e Haken não é um argumento por "força bruta", num sentido mais específico trata-se sim, como vimos ao final do primeiro capítulo, de "mero cálculo". Nesse sentido, o papel da inspecionabildiade local ou calculatória ficaria destacado. Afinal, pode-se considerar que a prova do T4C é dedutiva, independentemente do modo como viemos a reconhecer que os cálculos de um determinado passo da prova foram executados (sobretudo se o "viemos" diz respeito a todos aqueles que, não sendo os especialistas capazes de verificá-la o mais detalhadamente possível, compreendem a prova apenas globalmente). Lembremos que o computador foi inclusive chamado de *idiot savant* (com relação à execução dos cálculos necessários a algumas provas de redutibilidade, dentre as quais algumas

[95] Sustentar que os seres humanos são "os melhores calculadores da natureza", e que portanto máquinas (que apenas imitam nosso calcular) não são tão confiáveis quanto nós, parece corresponder àquilo que G. Dowek chama de "thèse de la complétude calculatoire des êtres humaines." (Cf. DOWEK, 2007, p. 97) Leibniz, ao que tudo indica, não a aceitaria. Pode-se encontrar uma valiosa discussão sobre o tipo de problema conceitual envolvido nessas questões na primeira parte ("Language, Mind and Machines") do livro de Sören Stenlund *Language and philosophical problems* (Stenlund, 1990).

foram inicialmente auxiliadas pela máquina e mais tarde completadas à mão) e *bloco de notas* (no uso que concerne à construção do conjunto inevitável de configurações).

É claro que os cálculos mecanicamente executados contribuíram para a construção da prova de um resultado substancialmente novo – e, nesse sentido, a prova do T4C teria sido uma novidade sem precedente na história da matemática[96], o início de uma nova era metodológica, por assim dizer. Mas a teoria dos procedimentos de descarga inventada por Heesch (para a construção do conjunto de configurações), foi aperfeiçoada *por Appel* e *Haken*, e não pelo computador – embora com seu auxílio, digamos, *cego*. Ainda que, como sugere a prosa em torno da prova[97], a interação homem-máquina tenha sido crucial em termos da determinação dos algoritmos de descarga e de D-redutibilidade, disso não se segue que o computador tenha elaborado alguma *matemática inteligente*, para usar os termos de Kreisel.

Com relação ao tópico da introdução de raciocínios probabilísticos na prova, mencionada ao final do ponto (γ) como reforço da tese da empiricidade do processo levado a cabo por Appel e Haken, observamos, juntamente com Swart, que é preciso evitar a ilusão gerada pela palavra *probabilidade.* Isso porque ela nos induziria a traçar falsas analogias entre argumentos probabilísticos nas ciências físicas e argumentos do mesmo tipo utilizados na solução de problemas matemáticos até então não resolvidos:

> Quando os físicos estimam a probabilidade da presença de um elétron em uma posição particular em um tempo particular, esperam que o elétron passe uma fração apropriada de seu tempo na posição em questão ou que não tenha uma posição específica

---

[96] Posição contrária consta em um texto de Daniel Cohen em “The superfluous paradigm”, no qual se encontram uma série de argumentos em favor da ideia, indicada no título do artigo, de que em realidade não há grandes novidades matemáticas, mas apenas técnicas, envolvidas na prova do T4C. (Cf. Cohen, 1991).

[97] Todos os grifos são nossos: “(…) some of the crucial ideas of the proof were perfected by **computer experiments** (…) In this case **a new and interesting type of theorem has appeared, one which has no proof on the traditional sense**”. (Appel & Haken, 1977, 108); “When we had hand-checked the analyses produced by the early versions of the programs, we were always able to predict their course, but now the computer was acting like a chess-playing machine. It was working out compound strategies **based on all the tricks it had been taught,** and the new approaches were often much cleverer than those we would have tried. **In a sense the program was demonstrating superiority** not only in the mechanical parts of the task but in some intellectual areas as well. (*loc. cit.*); “Our proof of the four-color theorem suggests that **there are limits to what can be achieved in mathematics by theoretical methods alone.**” (*loc. cit.*)

> no espaço. Eles estão de fato enredados com o problema da dualidade onda/partícula e a incerteza que dela advém.
> Quando matemáticos dizem que um número particular possui uma probabilidade *x* de ser primo, eles não pretendem que ele passe uma fração *x* de seu tempo como primo e uma fração 1 – *x* de seu tempo sendo fatorável. Nem tampouco eles pretendem que se trate de um novo tipo de número que não é nem primo nem fatorável (ou ambos). Tudo o que eles fazem é estimar a probabilidade [*likelihood*] de se vale a pena buscar saber se é ou não primo ou se vale a pena contá-lo (por algum propósito criptográfico ou outro). (Swart, 1980, p. 702)

Reiteremos, então, o aspecto a ser destacado aqui: os raciocínios probabilísticos foram utilizados no *contexto de descoberta* de um dos programas utilizados na prova, mais especificamente na execução dos cálculos a partir do algoritmo de descarga de Heesch. Assim, eles não seriam relevantes do ponto de vista da repetição da prova em contextos de verificação da mesma – uma vez que nesses casos (*nesse caso*, melhor dizendo, pois a prova foi, como já explicamos, verificada por poucos *referees*) tratava-se de aplicar ou executar o algoritmo, e não de criá-lo ou determiná-lo. Nesse sentido, se retomarmos a figura utilizada no primeiro capítulo para ilustrar os diferentes usos de programas na prova (em sua descoberta e em sua justificação), o ponto por assim dizer crítico estaria localizado entre os passos 2 e 4 (cf. figura 11 acima), pois no passo 4 foram utilizados raciocínios probabilísticos.

Por outro lado, mesmo se descartássemos o primeiro passo crítico com base na desconsideração do contexto de descoberta/determinação de um dos programas utilizados na prova, seria possível localizar um segundo passo crítico, no ponto 5. Isso porque é na prova de que o conjunto de todas as configurações geradas pelo algoritmo de descarga (o conjunto *U*) são redutíveis que se encontra o lema cuja prova exige cálculos que não são humana e localmente inspecionáveis.

A conclusão do argumento de Tymoczko – de que o conceito tradicional de prova precisa ser modificado – pode, assim, ser desdobrada em duas. A pretendida modificação teria que:

(δ_a) contemplar a empiricização de nosso modo de conhecer matematicamente, vinculada ao uso de um instrumento computacional e;

(δ_b) adequar-se à possibilidade de erro advinda da introdução de metodologia experimental.

Tais desdobramentos só podem ser melhor avaliados à luz dos esclarecimentos acerca do estatuto dos computadores e dos assim chamados experimentos computacionais (em ciência da computação e na matemática) que não realizaremos aqui. Seria preciso, então reativar explicitamente uma distinção kantiana deliberadamente contornada por Tymoczko, mas que está até agora implícita em nossa leitura: entre as origens de uma verdade (ou, no vocabulário corrente, o *contexto de descoberta*) e as evidências pelas quais aceitamos a verdade (o *contexto de justificação*). Tymoczko poderia alegar, mais ou menos na mesma linha de Kreisel, que se a *descoberta* da prova fez uso essencial do computador, não existe qualquer *verificação* da verdade do T4C que não faça apelo ao emprego do mesmo. Entretanto, como já sugerimos, nem todas as realizações de provas matemáticas (aliás, muito poucas) enfatizam a verificabilidade do processo – isso é característico das provas formais. Provas *simpliciter* são realizadas com diferentes objetivos (didáticos, estéticos, heurísticos), em diferentes contextos (salas de aula, de conferência, na bibliografia especializada e de divulgação) e dos mais variados modos (por redução ao absurdo, por indução, por casos, etc).

Assim, o argumento 'kreiseliano' que Tymoczko sustenta para defender a tese da empirização da matemática – e o consequente falibilismo no qual ela desembocaria – não parece adequar-se à multiplicidade que se deve atribuir às práticas matemáticas de prova uma vez observadas em suas vidas cotidianas. É com base em observações dessa índole que as distinções apresentadas no capítulo anterior podem ser justificadas e, consequentemente, utilizadas.

Se levamos em conta os aspectos retórico-dialéticos das provas anteriormente destacados, o T4C, enquanto exceção ocasional às provas *simpliciter*, pode ser compreendido por diferentes auditórios sem que a verificabilidade local da execução dos cálculos de redutibilidade seja um pressuposto de qualquer ocorrência da prova. Diante de diferentes auditórios descrições mais ou menos precisas dos programas, deveriam *contar como* verificação da prova. Parece-nos ser possível afirmar ainda que essa variação no grau de detalhamento a que se recorre em diferentes contextos de prova manifesta seu outro aspecto retórico, a saber, o uso de entimemas: premissas cuja plausibilidade é aceita pelo auditório, por serem "aquilo que é do conhecimento de todos". Afinal, poderíamos pensar que aceitação do uso do computador é parte desse tipo de premissas, e que as polêmicas em torno da prova do T4C revelam as idiossincrasias típicas de processos de aceitação de novos procedimentos e novas metodologias.

Com efeito, em diversas outras provas matemáticas (sejam *simpliciter* ou assistidas por computador) conta o apelo a lemas cujas provas não são explicitadas ou o apelo a resultados já conhecidos por todos ou, ainda, à verificação algorítmica ou local por parte dos especialistas na área.[98]

Após esse apanhado geral das noções e teses centrais do AIE, passemos a uma análise mais detalhada dos mesmos – a começar pela dicotomia a priori *versus* a posteriori.

4.2.1
As noções de *a priori* e *a posteriori*

O objetivo dessa seção consiste mormente em considerar, a partir do modo como a dicotomia "*a priori* versus *a posteriori*" foi lançada na arena das disputas sobre a prova do T4C (seção 3.2.1.1), uma distinção que nos parece crucial para uma crítica do modo como a dicotomia é acionada no AIE de Tymoczko (seção 3.2.1.2). Importa-nos ainda mostrar algumas aplicações da distinção na análise do referido debate (seção 3.2.3). Assim, ao tratar de uma das dicotomias mais célebres da epistemologia moderna[99] desde a perspectiva da discussão sobre a prova do T4C, é como se estivéssemos observando por assim dizer as aventuras desse amplo e complexo par conceitual a partir do buraco da fechadura de nosso estudo de caso.

[98] Kay-Yee Wong (2007) forja a categoria de "provas assistidas por arquivo" para se referir ao gênero de provas que conta com resultados "arquivados" (provas de lemas, por exemplo) mas que não entram explicitamente nas apresentações das mesmas. Esses resultados são, em geral, verificados pelos referidos *experts*. Os antecedentes dessa discussão encontram-se em "Computer proof, a priori knowledge and other minds", Burge (1998).

[99] Dicotomia que se pode identificar como parte de um elenco de dicotomias relacionadas, às quais filósofos tão distintos quanto Locke, Leibniz e Hume estiveram dedicados em investigar: necessidade x contigência, verdades de razão x verdades de fato, relações entre ideias x questões de fato, inconcebível x concebível, demonstrativo/intuitivo x probabilístico, análise x experiência, conclusivamente certo x provável, frivolidade x cognição, indubitável x dubitável. Analisaremos no capítulo final a hipótese de que a distinção de Wittgenstein entre provas e experimentos se encaixa nessas tradicionais dicotomias.

4.2.1.1
A apropriação de Tymoczko

Tymoczko lança mão da dicotomia – "*a priori* versus *a posteriori*" – desde a introdução do texto, quando confere ao T4C a designação de "primeira proposição matemática conhecida a posteriori." (Tymoczko, 1979, p. 58) Note-se que aqui *a posteriori* está sendo aplicada ao modo de conhecer uma proposição, não muito diferentemente da segunda utilização da noção, manifesta algumas páginas após o anúncio do "sentido tradicional de prova". Tal utilização foi mencionada no ponto (α) acima, quando aduzimos ao sentido que Tymoczko atribui a uma concepção tradicional de prova – como "deduções *a priori* de uma sentença a partir de premissas." (*loc. cit.*) Os dois usos referem-se, portanto, aos processos através dos quais são derivadas e, consequentemente, conhecidas determinadas proposições (ou sentenças, seu vocabulário é fluido). Como dissemos acima, contudo, essa caracterização não fornece critérios de distinção entre provas matemáticas e outros processos dedutivos de derivação que são em geral igualmente considerados como operações inversas às indutivas – por sua vez associadas ao domínio do conhecimento empírico, *a posteriori*.

Normalmente se considera que um argumento ou raciocínio é *a priori* se todas as suas premissas são *a priori*, o que nos mostra a necessidade de esclarecer a noção não apenas como atributo de proposições, mas de processos de justificação das proposições encadeadas nesses processos: se conhecimentos a *priori* são aqueles que se adquire por meios (argumentos, raciocínios) *a priori*, e esses por sua vez são encadeamentos de proposições *a priori*, nada mais premente do que elucidar em que consistem as relações entre esses elementos. De todo modo, a terceira ocorrência da dicotomia no texto indica com mais clareza os objetivos da apropriação que Tymoczko dela faz. Trata-se da ocasião do anúncio da tese da falência múltipla, provocada pela prova do T4C, das mais básicas crenças acerca da matemática, que seriam as seguintes:

> 1. Todos os teoremas matemáticos são conhecidos a priori;
> 2. A matemática, de maneira oposta às ciências naturais, não possui conteúdo empírico;
> 3. A matemática, de maneira oposta às ciências naturais, baseia-se apenas em provas, enquanto as ciências naturais fazem uso de experimentos.
> 4. Teoremas matemáticos são dotados de um grau de certeza que nenhum teorema da ciência natural pode alcançar. (Tymoczko, 1979, p. 63)

Cada uma dessas afirmações é tamanhamente geral e categórica que a decisão acerca de qual perspectiva utilizar para atacá-las não é tarefa simples.[100] A segunda afirmação, por exemplo, de que não se encontra qualquer conteúdo empírico na matemática, parece denotar desconhecimento de toda uma série de disputas filosóficas em torno da questão, que, desde uma perspectiva histórica, remontariam ao menos até aquelas entre Platão e Aristóteles, passando pelo debate de Kant com os empiristas ingleses, e que no último século foram tratadas não somente por matemáticos[101], mas também no domínio da psicologia da aprendizagem[102]. Podemos mencionar, a título de exemplo, apenas um texto (publicado em um período relativamente próximo ao do artigo de Tymoczko), escrito pelo matemático suíço Paul Bernays, no qual se aponta, numa direção contrária à abordagem de Tymoczko, para as semelhanças relevantes entre procedimentos cognitivos propriamente matemáticos e procedimentos típicos das ciências naturais, enfatizando-se a ocorrência senão do que se poderia considerar "conteúdo empírico" na matemática, ao menos de elementos metodológicos comuns entre esses dois domínios do saber – o que nos parece suficiente para amenizar a radicalidade com que Tymoczko enuncia a derrocada do apriorismo em filosofia da matemática.

Em "Some Empirical Aspects of Mathematics", Bernays afirma que além de a matemática e ciências da natureza compartilharem "algum tipo de experiência" (Bernays, 1965, p. 124), não se inicia nas respectivas empreitadas cognitivas *ab ovo* senão que familiarizando-se com, e utilizando-se de, resultados previamente estabelecidos – seja como inspiração ou ferramenta de pesquisa. Tal necessidade de familiarização é devida ao fato de que nem sempre os referidos resultados são auto-evidentes. Outro aspecto em comum destacado por Bernays é metodológico, e desenvolve um pouco melhor a ideia de que há "algum tipo de experiência" nos processos de aquisição de conhecimentos matemáticos, uma vez que em ambas as esferas (da matemática e das ciências naturais) utilizam-se

[100] Pode-se sem problemas identificar nessa lista ecos das disputas em torno da dicotomia, entendida em sentido forte, tais como se encontram nas obras de Quine (sobretudo em "Dois dogmas do empirismo"), Putnam (cf. nota 3 acima) e mesmo os trabalhos incompletos de Lakatos sobre filosofia da matemática a que nos referimos na seção introdutória do presente capítulo.

[101] Para citar apenas duas referências importantes conferir o já citado livro de Jacques Hadamard (*Psicologia da invenção na matemática*) e os dois volumes de Georg Pólya (*Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*).

[102] Cf., por exemplo, Jean Piaget, 1965: "Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence".

“tateios empíricos sugeridos por observação empírica” (*loc. cit.*), além da ocorrência da verificação de leis gerais em casos particulares.[103]

A partir das considerações por assim dizer fenomenológicas de Bernays seria possível contestar todas as afirmações de Tymoczko, sobretudo a segunda e a terceira: o que quer dizer que a matemática “baseiam-se apenas em provas”? Que não há métodos não-dedutivos envolvidos nos raciocínios e processos cognitivos em questão na matemática? Que tudo o que importa para os matemáticos é a produção de provas? Ou ainda que toda e qualquer atividade matemática está, de algum modo não esclarecido, fundamentada em provas? Dadas tais imprecisões parece-nos premente analisar um dos poucos momentos do texto nos quais Tymoczko não apenas faz uso de, mas explicita, sua caracterização de *a priori*. Encontra-se nessa passagem uma espécie de listagem de sentidos possíveis da noção:

(α_1) possibilidade da proposição ser conhecida independentemente da experiência;

(α_2) proposição imediatamente evidente;

(α_3) estipulação por convenção;

(α_4) cognoscibilidade de uma proposição somente pela razão, independentemente de qualquer experiência (Cf. Tymoczko, 1979, p. 77)

Que o sentido preferido de Tymoczko seja (α_4) fica claro quando o autor argumenta pelo caráter *a posteriori* do T4C afirmando que ele *não pode* ser conhecido *a priori*, uma vez que os usos (supostamente empíricos) do computador são indispensáveis na sua prova. O autor, entretanto, não justifica a afirmação da impossibilidade de conhecer *a priori* (ou seja, sem computadores) a proposição

[103] É claro, para Bernays, que essas considerações não são imunes à disputa – o que para ele se comprova pela existência de pelo menos dois pontos de vista dominantes: um deles (mais kantianamente inspirado) enfatizando o papel da experiência e outro (fregeanamente inspirado) negando-o e acusando os partidários da primeira de psicologismo. Essas disputas, como se sabe, contam com partidários tão célebres quanto Husserl, Hilbert, Poincaré, Brouwer, Russell, Wittgenstein e os positivistas lógicos do Círculo de Viena. Para uma tratamento contemporâneo similar ao de Bernays no que diz respeito aos aspectos metodológicos comuns entre matemáticas e ciências empíricas cf. “Experimental methods in proofs”, de Gabriele Lolli – publicado em *Deduction, computation, experiment: exploring the efectiveness of proofs* (Lupacchini & Corsi, 2008) – no qual se trata especificamente de mostrar, através de exemplos que remontam ao método de Arquimedes, como “o fato de que matemáticos utilizam diversas estratégias e vários instrumentos no ataque a um problema não significa que as soluções, quando encontradas, não estejam enraizadas num s*etting* dedutivo.” (Lolli, 2008, p. 66)

expressa no T4C, apesar de buscar acentuar a diferença de sua posição em relação à possibilidade de proposições necessárias *a posteriori*, aventada anos antes por Saul Kripke[104]. Para Kripke, na leitura de Tymoczko, mesmo uma prova realizada com o auxílio de cálculos computacionais *poderia* ser conhecida *a priori* (o sentido (α_1)). Para Tymoczko, diferentemente, não é esse o caso do T4C porque "o único caminho que sempre seguimos para o T4C parece levar aos experimentos computacionais (...) os matemáticos jamais o conhecerão por meios a priori." (*loc.cit.*)[105]

É interessante notar aqui que nem mesmo Appel e Haken afirmaram algo tão categórico. Aliás, já apontamos para isso acima, ao citá-los:

> Ainda não sabemos se uma prova menor do T4C pode ser encontrada. (...) Embora seja concebível que uma dessas provas [anunciadas como menores] sejam válidas, é também concebível que a única prova correta seja baseada em conjuntos inevitáveis de configurações redutíveis e que, assim, exijam computações que não podem ser executadas à mão. (Appel e Haken, 1978, p. 121)

Ao pressupor uma identificação do caráter *a priori* de uma proposição com o sentido (α_4), qual seja, da cognoscibilidade da proposição somente pela razão, independentemente de qualquer experiência, o AIE de algum modo reativa o sentido que Kant atribui ainda na Introdução da *Crítica da Razão Pura* aos conhecimentos *a priori*. Essa obra, como sabemos, é o leito das águas pelas quais transitam as mais proeminentes investigações do conceito de *a priori* – até mesmo aquelas que, como a de Wittgenstein, navegam na "terceira margem do rio".

A caracterização explícita de conhecimento *a priori* fornecida por Kant, que é negativa – "Denomina-se esse conhecimento [independente da experiência e de todas as impressões dos sentidos] *a priori*" (B 2/3) – fornece também o critério para identificar o tipo de conhecimento constitutivo do outro polo da dicotomia,

---

[104] Em *Naming and Necessity.* Consultamos a edição revisada e aumentada com relação à primeira versão, de 1972 – consultada por Tymoczko. (Cf. Kripke, 1980)

[105] F. T. Sautter, em comunicação pessoal, lembra que "no artigo seminal (dele se originou a Teoria Computacional da Complexidade) 'Über die Lange von Beweisen' [*On the lenght of proofs*], de 1936, Gödel mostra que não há limites para a diminuição do comprimento de provas quando passamos da operação com predicados de ordem n para ordem n+1. Ou seja, talvez em uma teoria matemática operando com predicados de grau 4, 5, ou maiores, exista uma prova inspecionável em todos os seus detalhes por um ser humano." Isso indicaria a dificuldade de provar a assunção equivocada de Tymoczko: que seja improvável uma prova menor, e sobretudo que prescinda dos cálculos mecanicamente operados, não implica, para nada, na impossibilidade da mesma.

"cuja origem é a posteriori, ou seja, na experiência." (*loc. cit*) O mesmo, vale dizer, ocorre com os *juízos* sujeitos à polarização – os *a priori* possuem independência de toda e qualquer experiência – e, de modo ainda mais originário, com as representações em geral (tanto intuições quanto conceitos podem ser dados *a priori* ou *a posteriori*).[106]

Assim, não nos parece abuso reconsiderar, ainda que rapidamente, as "crenças ameaçadas" de Tymoczko sob a perspectiva da classificação kantiana. Levemos em conta que para Kant uma proposição ou juízo será *a posteriori* caso a evidência que o suporta seja empírica. Isso transfere a atenção de considerações de ordem genética dos conhecimentos para aquelas sobre domínio da justificação da verdade dos juízos que os compõem. É ponto fulcral do edifício da filosofia crítica que todo conhecimento *comece com* a experiência. Assim, por exemplo, o conceito de mudança que opera no princípio da causalidade – "Toda mudança tem uma causa" – advém da experiência, embora a justificativa do princípio não ocorra através do apelo ao exame de instâncias (o que o caracterizaria como empírico).[107]

Desse modo, a afirmação de que não se conheceu (nem jamais se conhecerá) o T4C por meios *a priori* pode ser considerada como demasiadamente radical, pois ainda que do ponto de vista genético algum conceito ou juízo (o conceito de D-redutibilidade envolvido no lema provado com auxílio mecânico? Ou o lema ele mesmo?) constantes no T4C pudessem ser considerados empíricos, sua justificação não contaria como evidência de tipo empírico para a verdade do T4C na medida em que operam no interior de um *setting* dedutivo. O que de fato nos importa aqui pode ser ilustrado com o seguinte exemplo: a proposição *a priori* "a linha reta é a distância mais curta entre dois pontos" somente seria empírica

---

[106] Nesse sentido, ao utilizar o termo *a priori* como qualificativo de representações, juízos e conhecimentos, como observa H. Caygill no *Dicionário Kant*, o filósofo de Königsberg alarga o escopo do conceito de *a priori*. Isso porque tradicionalmente a expressão era utilizada como polo de uma dicotomia que servia para distinguir entre tipos de prova ou demonstração – para os lógicos de Port-Royal eram consideradas *a priori* as que partiam das causas para os efeitos e *a posteriori* as que partiam dos efeitos para as causas. Para uma exposição detalhada das subdivisões as quais Kant submete os conceitos cf. Lassalle Casanave (2012c).

[107] Vale notar que esse exemplo não passou sem dificuldade pelo crivo dos *scholars*, pois se trata de um caso de juízo *a priori* "impuro", apresentado por Kant (CRP B/3): H. Alisson, por exemplo, comenta que "apelar para a experiência é inútil mesmo no caso do conceito ser empírico. Quanto aos juízos a priori 'impuros', basta destacar que sempre implicam conceitos puros como predicados." (1992, p. 138) Ou seja, mesmo que "mudança" seja conceito empírico, "causalidade" é puro, "e essa é precisamente a razão pela qual a conexão afirmada no juízo entre este conceito e todo caso de mudança não pode ser estabelecida por um apelo à experiência." (*op. cit.*, p. 139)

caso fosse justificada a partir da evidência oferecida por repetidas medidas físicas de comprimento e não, como de fato é, a partir das definições e axiomas da geometria euclidiana.[108]

Se compararmos esse exemplo com o nosso estudo de caso, teríamos (na versão topológica): "Todo mapa planar é admissivelmente quatro-colorível" seria proposição conhecida de modo empírico (como quer Tymoczko) somente se tivesse sido aceita a partir da evidência oferecida por repetidos *experimentos* de medição. O que se repetiu no caso da realização da prova do T4C e de suas verificações (e não no caso do contexto de descoberta do algoritmo a ser executado pela máquina para completar a prova do lema de redutibildiade), entretanto, não foram experimentos desse tipo, mas *cálculos*. É preciso, assim, distinguir entre a realização de medidas físicas do exemplo de Kant (e casos similares, de aplicação de padrões numéricos ao mundo físico) e a realização de cálculos (por assim dizer "operações-padrão"), como os envolvidos na prova do T4C. Poderíamos advogar pela necessidade dessa distinção utilizando-nos de um jargão tipicamente wittgensteineano: *um cálculo não é um experimento*.[109] Fazê-lo sem antes introduzir a distinção, que *faute de mieux* podemos designar de neo-kantiana, entre diferentes tipos de *a priori* – que pode auxiliar tanto a preencher alguns hiatos no AIE quanto a compreender melhor o mencionado jargão – seria, entretanto (e para dizer pouco), prematuro. Antes de apresentar a distinção, contudo, gostaríamos de traçar ainda outra conexão.

A referência de Tymoczko à abordagem de Kripke, comparando-a com a sua proposta de leitura da prova do T4C, remete imediatamente a uma noção com a qual o conceito de *a priori* também foi associado ao longo de sua história, mas que não consta na "lista" de apresentação de sentidos da noção oferecida por Tymoczko: a de necessidade. Se é verdade que para Kant, e para uma longa tradição que de sua filosofia se seguiu, a noção de necessidade, acompanhada das de "universalidade estrita" e "pureza", são as "pedras de toque", ou seja, os critérios, do conhecimento *a priori* (suas notas distintivas com relação ao conhecimento empírico), não é menos verdade que a crítica de Kripke à essa

---

[108] Nossa exposição segue a de Arthur Pap em *Semántica y verdad necessária – Una investigación sobre los fundamentos de la Filosofía Analítica.* (Pap, 1970)

[109] A afirmação encontra-se no *Tractatus* (6. 2331), embora ocorra sob distintas (re)formulações em boa parte das observações de Wittgenstein sobre a matemática, tais como formuladas nas LFM e nas RFM. Teremos a oportunidade de explorar os desenvolvimentos dessa espécie de fio condutor pela filosofia da matemática de Wittgenstein no capítulo final.

associação costuma figurar entre os lugares(-filosóficos)-comuns de nosso tempo. Sendo assim, não surpreende que Tymoczko tenha considerado acriticamente a crítica de Kripke.

A espinha dorsal da análise de Kripke consiste na observação de que o par conceitual “necessário *versus* contingente” é um par de modalidade aléticas, ou seja, as noções são aplicadas aos modos sob os quais um juízo ou proposição pode ser verdadeiro – enquanto o par “*a priori* versus *a posteriori*” é um par de modalidades epistêmicas, aplicável aos modos de conhecer proposições.[110] Essa distinção se justificaria na medida em que, como vimos a partir da leitura de Tymoczko, Kripke quer defender a existência de proposições necessárias que *podem* ser conhecidas de modo empírico. Vejamos seu texto:

> Para dar um exemplo bastante senso-comum: qualquer um que tenha trabalhado com máquinas de computar sabe que a máquina pode dar uma resposta para se tal e tal número é primo. Ninguém **calculou ou provou** que o número é primo; mas a máquina deu a resposta: esse número é primo. Se acreditamos, então, que o número é primo, acreditamos com base em nosso conhecimento das leis da física, da construção da máquina, e assim por diante. Não acreditamos nisso, portanto, com base em uma evidência **puramente** *a priori*. Acreditamos nisso com base em uma evidência *a posteriori* (se é que existe algo *a posteriori*). Isso, entretanto, poderia ser conhecido *a priori* por alguém que faça os cálculos requeridos. Assim, ‘*pode* ser conhecido *a priori*’ não significa ‘*deve* ser conhecido *a priori*.’ (Kripke, 1980, p. 35, grifos nossos)

Pode-se, assim nos parece, inferir daí que Tymoczko aceita sem mais a análise de Kripke. E isso não somente porque ele assume a possibilidade de proposições necessárias *a posteriori*. Tymoczko ademais afirma que conhecemos o T4C *a posteriori* porque esse conhecimento depende de um “complexo conjunto de fatores empíricos” – sem que tal relação de dependência seja analisada em maior detalhe. Ele afirma, por exemplo, que nosso conhecimento do T4C “deve ser qualificado pela incerteza de nossos instrumentos (computador e programa).” (*loc.cit.*) Essa passagem é diretamente relacionada à outra, já citada acima, na qual lemos que:

[110] A distinção de Kripke, como é sabido, completa-se com a afirmação de que o par “analítico *versus* sintético” é um par de modalidades semânticas, que diz respeito ao modo como se associam os significados dos termos envolvidos na proposição.

> A confiabilidade na máquina é, em última instância, uma questão a ser avaliada pela engenharia e pela física. É uma sofisticada ciência natural que nos assegura que o computador "faz o que deveria fazer" mais ou menos do mesmo modo que nos assegura que um microscópio eletrônico "faz o que é suposto fazer". (Tymoczko, 1979, p. 74)

Kripke, aliás, como Tymoczko depois dele, não analisa o papel da "sofisticada ciência da computação" (ele em realidade fala das "leis da construção da máquina" – de todo modo parece tratar-se do mesmo tipo de concernimento), simplesmente afirmando que no caso da utilização do computador "acreditamos [que tal número é primo] com base em nosso conhecimento das leis da física, da construção da máquina, e assim por diante." (Kripke, *loc. cit.*) O que isso quer dizer? Que no cálculo executado pela máquina as leis físicas cumprem um papel que, no cálculo "de cabeça" não? Por que "acreditamos com base nas leis da física" deveria ser considerado evidência empírica a favor do T4C? Toda lei da física é estritamente empírica?

Além disso, embora a noção de necessidade associada diretamente à de Kripke não figure na lista oferecida por Tymoczko dos sentidos possíveis da expressão *a priori*, tanto ela quanto a noção correlata de contigência acabam aparecendo na passagem seguinte:

> Nem todo modo de caracterizar a diferença entre as ciências naturais e a matemática cai diante do T4C. Seguindo Kripke, podemos argumentar que todas as verdades matemáticas, mesmo o T4C, são necessárias, ou verdadeiras em todo mundo possível. *O T4C,* **podemos dizer, registra uma propriedade essencial de mapas planares**. (As verdades da ciência natural, por outro lado, podem ser contadas como contingentes, ou verdadeiras em algum mundo possível.) Nesse caso, o T4C seria um importante contra-exemplo à alegação de que todas as verdades necessárias são conhecidas *a priori*. (Tymoczko, 1979, p.78, grifos nossos)

Pode-se dizer, então, que Tymoczko não apenas aceita acriticamente as apostas de Kripke (a apropriação do vocabulário da semântica de mundos possíveis o atesta, bem como as ideias de que leis empíricas cumprem papel determinante na prova auxiliada por computador e de que o T4C é uma verdade necessária, pois "registra uma propriedade essencial de mapas planares"), como radicaliza sua posição. Isso porque o sentido de *a priori* em jogo no AIE é, justamente, o da total independência com relação à experiência do modo de conhecer a proposição – vimos que para Tymoczko T4C *não pode* ser conhecido *a priori*.[111]

Importa-nos indicar, assim, duas insuficiências dessas dependência e radicalização com relação ao sumário kripkeano. A primeira forma de sujeição, em realidade, já foi referida (embora não analisada), e diz respeito à identificação implícita entre a realização de cálculos por computador e a realização de experimentos físicos (como se vê na comparação com o uso do microscópio). Tal identificação seria um problema na medida em que não se manifestassem, ao assumí-la, as diferenças fulcrais entre cálculos e experimentos a que nos referimos acima com o auxílio do jargão wittgensteineano e que poderiam minar a identificação de Tymoczko. A outra, que não é de todo independente da primeira, refere-se à ideia de que o "argumento para o T4C é bastante parecido com um argumento em física teórica, onde um longo argumento pode sugerir um experimento chave que é levado a cabo e utilizado para completar um argumento." (Tymoczko, 1978, p. 78) Mas por que isso constituiria uma insuficiência da abordagem 'kripkeana' de Tymoczko? Por que não aceitar, ao menos em princípio, a comparação entre o uso de experimentos que complementam argumentos em física teórica (muito embora não nos seja fornecido exemplo algum) e o uso do lema (de D-redutibilidade) na prova do T4C, que depende dos cálculos computacionalmente executados? Afinal, se para "registrar uma propriedade essencial de mapas planares" é preciso realizar cálculos do mesmo modo que para registrar propriedades de objetos físicos são necessários experimentos cruciais, por que resistir à analogia?

Dois caminhos de resposta nos ocorrem aqui: um deles parte do cruzamento da comparação de Tymoczko com uma passagem de Wang, citada no primeiro capítulo, na qual se observa o uso da ideia de *complementação calculatória* que o computador pode oferecer ao "fluxo conceitual de argumentos"

---

[111] Vale observar que na segunda edição de *Naming and Necessity* Kripke reconhece, em seção adicionada, ter atribuído a Kant algo que não se encontra na CRP, a saber, uma caracterização de verdade *a priori* como aquela que *pode* ser conhecida independentemente da experiência. Kant fala propriamente de conhecimentos a priori: "of course, when Kant uses 'necessary' for a type of proposition and *'a priori'* for a mode of knowledge he cannot possibly be guilty of the common contemporary practice of treating the two terms as interchangeable synonyms. It is clear from the opening pages ofthe *Critique* that he regards the thesis that knowledge that something is necessary must be *a priori* knowledge as an important, though obvious, substantive thesis." (Kripke, 1980, p. 160)

matemáticos. Essa ideia já não era novidade na matemática, como sugere Tymoczko, à época da prova do T4C. Wang afirma:

> Esse tipo de **uso auxiliar e local** de computadores como um apoio na prova de teoremas tem sido feito de tempos em tempos, notadamente por D. H. Lehmer. Ele toma a forma do **destacamento de partes específicas que exigem extensas computações numéricas ou combinatórias** para **completar o fluxo conceitual dos argumentos** que conduzem a uma prova do teorema. Para descrever tais usos, podemos falar de mecanização oportunista ou *ad hoc* da prova de teoremas. (Wang, 1981, p. 45, grifos nossos)

Ao comparar a estratégia de Tymoczko com a passagem de Wang pode-se dizer que o último faz muito menos caso do papel da máquina na prova do que o primeiro. Isso talvez se explicasse pelo fato de que Wang (como Kreisel), possuía mais familiaridade com a construção e o uso dos computadores, de modo a ter uma visão mais realista quanto ao papel que podem desempenhar nas provas matemáticas, não se deixando admirar tanto quanto Tymoczko pelo seu uso como ferramenta de complemento calculatório. Isso, entretanto, poderia soar como mero argumento *ad hominem* caso não se considerasse, com base em uma ênfase que estamos sugerindo, que a familiaridade com os conceitos e métodos envolvidos numa prova por parte do auditório diante do qual é apresentada, realizada ou reproduzida é determinante para a sua compreensão.

Assim, saber que em realidade já se utilizava esse tipo de estratégia metodológica na matemática poderia servir como uma espécie de calmante para os anseios de novidade de Tymoczko com relação à prova do T4C. Quando se pretende tratar de uma prova na qual o papel do procedimento de exaustão, a construção de casos, é tão central como na do T4C, ignorar o que faz (e mesmo o que pode fazer) a máquina que auxilia a construir os casos pode ser fatal. Isso considerando-se, é claro, que conhecer como ela funciona entraria de modo relevante em qualquer apresentação ou descrição da prova, ou mesmo na compreensão mínima da mesma.

Aqui, entretanto, é preciso um esclarecimento quanto ao que se está considerando "conhecer como a máquina funciona". Sabemos o que se passa com o computador *do ponto de vista do programa*, do mesmo modo como saberíamos sobre o que se passa numa máquina abstrata, como a de Turing, que serve de modelo para processos computacionais (por conta da noção precisa de computabilidade pela qual é definida). Nesse sentido a descrição do processo de programação ela mesma fornece ou, por assim dizer, funciona como prescrição para o funcionamento de uma máquina abstrata, cujo comportamento é sujeito ao conjunto finito de instruções que constitui o programa da máquina. Não são levadas em conta, portanto, quaisquer considerações sobre *os aspectos* e as *interações físicas* da máquina computacional em qualquer compreensão do que ocorre conceitualmente em provas auxiliadas por elas.

Se, como parece, a *mecanização ad hoc* com vistas a complementar argumentos matemáticos estava sendo aceita como procedimento matemático legítimo, a comparação de Tymoczko não preserva sua aparente força. Ao menos não a força retórica associada ao gênero de novidade que ele quer atribuir ao auxílio computacional na prova do T4C. É curioso notar, entretanto, que na ocasião em que Wang compara o uso de computadores na matemática com experimentos em outra ciência não é à física que ele recorre (como Tymoczko), senão que à engenharia. Não se trataria, assim, de comparar a computação com um domínio cujo objetivo predominante é a descrição da natureza (como a física), mas com um que inclui de modo extremamente peculiar o prolífico mundo dos artefatos:

> Se experimentar com uma máquina para ver o que ela pode fazer for comparado com o tipo usual de pesquisa científica, ela parece mais com a engenharia do que com a física, na medida em que não estamos lidando com objetos naturais mas com artefatos [*gadgets*] humanos e na medida em que estamos aplicando e não descobrindo teorias. Por outro lado, máquinas de calcular são únicas dentre os artefatos humanos, pois suas potencialidades são muito menos claras ao criador [*the maker*] do que outras máquinas. (Wang, 1960, p. 17)

E, prossegue Wang, na medida em que artefatos são coisas produzidas pelo homem (e não descobertas), o desenvolvimento e a determinação das potencialidades da máquina de computar apresentariam problemas similares aos da psicologia. Talvez Wang estivesse sugerindo que em ciência da computação estamos transitando num *domínio gramatical*, para usar um vocabulário próprio a Wittgenstein. Desse modo, não se trata de descartar a analogia que Tymoczko traça entre o uso de experimentos em física teórica e o uso de lemas provados com auxílio mecânico em provas matemáticas, mas de enfatizar as *similaridades funcionais* desses processos em seus respectivos domínios, não suas supostas diferenças. Dizemos "supostas" porque Tymoczko alega, por exemplo, que enquanto o T4C “registra propriedades essenciais de mapas planares”, as verdades das ciências naturais seriam contingentes. Ora, essa alegação parece implicar que nas ciências físicas não se trata jamais de encontrar “propriedades essenciais” de objetos e relações entre eles, ou seja, estabelecer proposições metafisicamente necessárias através de procedimentos de justificação *a posteriori*.

O segundo caminho da resposta que queremos delinear à pergunta sobre a plausibilidade da comparação de Tymoczko (entre o uso de experimentos que complementam o fluxo argumentativo em argumentos da física teórica e o uso do lema de redutibilidade provado com o auxílio mecânico na prova do T4C), acaba, a seu turno, entrecruzando-se com o primeiro. Pode-se esclarecer se as provas com o complemento calculatório ou combinatório das quais fala Wang devem ser consideradas como procedimentos em algum sentido empíricos (ainda que num sentido mais fraco do que pretende Tymoczko) invertendo a pergunta pelo papel dos experimentos em matemática pura que Tymoczko induz por outra similar, sobre papel e o desenvolvimento de procedimentos *a priori* nas teorias físicas. Realizando essa espécie de inversão de perspectiva esperamos legitimar uma possbilidade de conceber diferentemente as conexões conceituais relevantes no AIE, ainda que se julgue legítima sua estratégia comparativa. Operaremos, então, uma comparação similar para alcançar um resultado relativamente distinto.

4.2.1.2
Uma concepção funcional de *a priori* como chave de leitura do AIE

Esse caminho será percorrido com o auxílio de indicações provenientes de uma investigação do *a priori* desenvolvida por Arthut Pap ainda na primeira metade do século XX. Trata-se de uma abordagem de forte inspiração kantiana que elide em si elementos basilares da filosofia crítica[112], da fenomenologia husserliana e ainda de alguns representantes do pragmatismo americano.[113]

Em um artigo (Pap, 1944) que precede a publicação de sua tese de doutoramento – *The A Priori in Physical Theory* (Pap, 1948) – Pap apresenta uma sugestiva distinção entre três tipos de *a priori*. Dada essa relação entre os textos, aduzimos a uma passagem do prólogo da tese que bem anuncia a tônica geral de

[112] A leitura de Pap foi influenciada pela interpretação neo-kantiana da Escola de Marburg (Ernst Cassirer, o mais ilustre neo-kantiano, chegou a ser seu tutor na Yale University em 1944).
[113] William James, John Dewey e, mais contemporaneamente, C. I. Lewis.

seu tratamento “dinâmico”.[114] Após afirmar que sua teoria do *a priori* pode ser chamada *funcional* – na medida em que *a priori* é caracterizado nos termos das funções que proposições podem desempenhar em investigações científicas – e *contextual* (uma vez que sentenças da forma “x é a priori” ou “x é a posteriori” são tratadas como elípticas ou incompletas), Pap mantém que “Uma proposição que é a priori em um contexto de investigação pode ser a posteriori em outro contexto.” (Pap, 1948, p. viii) Na aplicação que realiza de sua teoria aos princípios da física clássica, Pap enfatiza especialmente “a transformação de generalizações indutivas em convenções, ou a origem empírica das definições científicas.” (Pap, 1948, p. ix)

Pode-se organizar esquematicamente a distinção sugerida por Pap para classificar proposições *a priori* do seguinte modo (note-se que a cada tipo de *a priori* corresponde um tipo de necessidade):

(a) *a priori* formal ou analítico (ao qual corresponde a necessidade de tipo lógico);

(b) *a priori* material (associado à necessidade transcendental ou normativa);

(c) *a priori* funcional (relacionado à homônima necessidade).

Não é nosso objetivo analisar em detalhe a abordagem de Pap, tampouco suas possíveis relações de semelhança ou dessemelhança com as reinterpretações do *a priori* sugeridas pelo positivismo lógico.[115] Gostaríamos apenas de apontar para suas principais sugestões, pois acreditamos que com elas poderemos melhor contestar algumas teses problemáticas de Tymoczko. Tais sugestões são basicamente duas: a primeira delas é a de que existem proposições cuja origem é, utilizando-nos da expressão de Bernays, “algum tipo de experiência”, e que Kant denominaria

[114] “Se, como metodologistas, adotarmos um ponto de vista estático, examinando o corpo de proposições científicas tal como sistematizado em um estágio determinado da investigação, de fato dividiremos com sucesso as proposições entre analíticas e sintéticas, como que formando classes mutuamente excludentes. Se, entretanto, nosso ponto de vista for dinâmico ou desenvolvimentista, encontraremos que o que foram leis experimentais em um estágio passam a funcionar, em virtude de extensa confirmação pela experiência, como regras analíticas ou ‘convenções’, na linguagem de Poincaré, em um estágio posterior.” (Pap, 1948, p. vi) Sobre a similaridade da posição de Pap com a de Wittgenstein (sobretudo em *Sobre a certeza*) no que diz respeito aos processos de convencionalização de verdades empíricas em padrões de descrição remetemos ao capítulo final.

[115] Um texto a partir do qual se poderia iniciar uma investigação nesse sentido é o de M. Friedman, *Reconsidering Logical Positivism*, especialmente capítulos 3 e 4 (FRIEDMAN, 1999).

sintéticas, informativas.[116] Tais proposições por assim dizer *se transformam* em proposições formalmente *a priori* (analíticas) *para funcionar como princípios* necessários (vale dizer: regulativos) à investigação nas quais ocorrem.

A segunda é justamente a exemplificação da primeira através de uma analogia. Ele compara leis empíricas que precisam ser reconhecidas como verdades sintéticas, ou materialmente *a priori*, para que possam ser utilizadas como definições de conceitos empíricos – "Massa, p. ex., é definida nos termos da terceira lei de Newton, ou capacidade térmica em termos do princípio da conservação da quantidade de calor." (Pap, 1944, p. 468) – e leis lógicas ou matemáticas – que precisam ser reconhecidas como sintéticas ou informativas antes de serem utilizadas como definições implícitas de conceitos lógicos (seus exemplos são a regra *modus ponens*, que implicitamente define o símbolo da implicação,[117] e o princípio de indução matemática, que define implicitamente o conceito de número inteiro). Uma passagem de Pap apresenta sinopticamente o ponto:

[116] "Informativo" não é utilizado por Kant, mas "extensivo". O sentido é de que o "conceito-predicado" não meramente explicita a informação contida no termo sujeito, como nos juízos analíticos – uma das possíveis maneiras de entender o analítico em Kant que não recorre ao vocabulário por vezes "psicológico" do filósofo (quando ele afirma que *não se pode conceber o oposto* de um juízo analítico ou que nele o conceito predicado "ja é pensado" ao mesmo tempo que o conceito sujeito – Cf. *CRP*, Introdução B 11). Para uma discussão acerca da distinção entre extensão formal e material do conhecimento e também acerca das ambiguidades do *analítico* kantiano cf. Alisson, (1992) especialmente terceira e quarta seções do quarto capítulo.

[117] É claro que não se pode deixar passar despercebida a ideia um tanto heterodoxa de que a regra de *modus ponens* deve ter sido considerada uma verdade sintética antes de operar como definição implícita do signo para implicação. Dadas as limitações de escopo do trabalho cabe dizer apenas que para Pap sem o reconhecimento de algo "intuitivo" da validade do princípio antes de seu funcionamento como proposição analítica corre-se o risco de entrar em um círculo: os princípios da lógica (como a regra de *modus ponens*) não podem ser definidos em termos de outras proposições igualmente analíticas, mas somente em termos de proposições sintéticas elevadas à função de princípios normativos. Essas questões são, para Pap, tema de uma lógica transcendental, concernida com a origem dos princípios e não da lógica formal, que lida apenas com conceitos "prontos". Cf. Pap, 1944, p. 473: "Uma vez que, *e.g.*, tenhamos reconhecido intuitivamente a validade do *modus ponens* (se 'p > q' é verdadeira, e 'p' é verdadeira, então 'q' é verdadeira), podemos convencionalmente adotá-la como uma definição implítica do símbolo que denota a implicação; *desse modo*, é claro, a a validade do *modus ponens* seguir-se-á do sentido mesmo da implicação, e ninguém poderia negá-la a não ser que use o símbolo '>' em outro sentido. Ou, para dar outro exemplo, o princípio de indução matemática pode ser usado como definição implícita do conceito de inteiro, por causa de sua evidência intuitiva. Seria, então absurdo pensar que se refuta a alegação de *Poincaré* e dos intuicionistas de que o princípio da indução matemática é sintético a priori, dizendo que ele "meramente" define o que quer dizer por inteiro finito. Esse tipo de consideração aplica-se geralmente ao método axiomático da matemática moderna, o método de definir as 'noções primitivas' por um conjunto de axiomas e postulados por elas satisfeitas. Os postulados dão origem a, são a fonte de, verdades analíticas; mas devem eles mesmos ser considerados sintéticos. Como afirma Kant: 'Pode-se, de fato, considerar uma sentença sintética como verdadeira pela lei da não-contradição, mas apenas pressupondo outra sentença sintética da qual ela pode ser inferida, todavia nunca ela mesma'." (*Kr. d. r. V.*, .2ª ed. *Cassirer*, 42).

> É claro que uma vez tendo sido adotada como uma definição implícita uma lei empírica deixa de ser contingente e passa, *qua definição*, a ser irrefutável pela experiência. O que pode acontecer é que futuras experiência exijam revisão ou abandono daquela definição. Mas a razão de uma mudança dessa convenção é ela mesma um estado não-convencional de coisas: é o fato de que a lei empírica que corresponde à definição não se verifica. Dada a concomitância entre mudança da convenção e mudança da lei empírica, entre mudanças na "meta-linguagem" e mudanças na "linguagem-objeto", não há perigo em manter que o que é formalmente a priori no sentido de ser definicional, não diz nada sobre o mundo empírico; e temos insistido que para determinar se uma proposição é formalmente a priori não é preciso perguntar-se acerca das razões que nos levam a adotar exatamente *aquela* definição do termo-sujeito. (Pap. 1944, p. 468)

Caracteriza-se, assim, uma proposição *funcionalmente a priori*: ela é "predicável de contextos conceituais em relação aos objetivos ou fins de uma investigação (a 'necessidade hipotética' de Aristóteles)."[118] Ou, ainda, "adotada como pressuposição necessária da ciência", podendo, inclusive, ser também a priori no sentido (b). Esse trânsito que uma proposição pode ter, entre as categorias (a) e (b) mostra o dinamismo do enfoque de Pap, que atenta para o *modus operandi* de algumas proposições no processo de construção de teorias científicas, especialmente a mecânica newtoniana. Esse dinamismo, que desemboca na análise funcional do a priori, é a grande (ou talvez seja melhor dizer: a que mais nos interessa) virtude de sua abordagem.

Outro exemplo que Pap oferece para a legitimidade da categoria do *a priori* funcional é a segunda lei de Newton, que:

> [F]unciona como um princípio a priori, isto é, na linguagem de *Dewey*, "operacionalmente a priori com respeito à pesquisa ulterior"; ela diz ao físico como medir a força, prescrevendo assim um método. Métodos não podem eles mesmos ser diretamente refutados (...); nessa medida, postulados metodológicos são a priori. Eles podem, entretanto, ser *indiretamente* refutados, *i.e.*, podem ser provados infrutíferos pela falha em ser verificadas das leis empíricas que deram origem a eles; nessa medida eles possuem *fundamentum in re* e são abertos à revisão pela experiência. O fato empírico que guia até o postulado metodológico expresso pela segunda lei de Newton é que a força se manifesta como mudança de velocidade, enquanto antes de Galileu supunha-se que a força era a causa das mudanças de posição.(...)

[118] Pap, 1944, p. 465. Para um enfoque do *ex hipothéos* aristotélico cf. cap. IV de *Ciência e Dialética em Aristóteles* (Porchat Pereira, 2001).

> Teoricamente pode-se aderir a qualquer postulado, seja ele um axioma formal ou uma hipótese empírica, seja o que for que indução ou dedução possam revelar. (Pap, 1944, p. 480-81)

A inconsistência do oposto contraditório é, segundo Pap, critério definitório do *a priori* de tipo formal ou analítico. Desta perspectiva poderíamos nos perguntar se não é problemático afirmar, como o faz Tymoczko, que o T4C não é cognoscível *a priori*, pois a prova de que "Existe algum mapa planar que não é admissivelmente quatro-colorível" (o oposto contraditório do T4C) engendra uma contradição com o auxílio de proposições derivadas através de procedimentos próprios às áreas da matemática e com o uso de um instrumento computacional.

Por outro lado, em se tratando de uma sentença matemática não pareceria razoável considerar que se trate de uma proposição materialmente *a priori*, pois se assim fosse deveríamos ser capazes de apontar nela conceitos implicitamente definidos (ou construídos, para usar um vocabulário kantiano)[119] com o auxílio de "alguma espécie de experiência". Ora, Tymoczko argumenta justamente que o apelo aos cálculos mecanicamente executados introduz elementos empíricos na prova do T4C. Contudo, a única via seguida por sua argumentação está baseada na ideia kripkeana de que nosso conhecimento do T4C depende de um complexo conjunto de fatores empíricos associados à estrutura e ao funcionamento da máquina de computar utilizada na prova, sem explicar ou mesmo descrever como se dá tal relação de dependência.

[119] Uma outra maneira de mostrar que não se trata aqui propriamente de uma proposição que contenha conceitos *a posteriori* seria recorrer à filosofia kantiana naquilo que ela fornece em termos de distinção entre tipos de conceitos (no que se segue seguimos a Lassalle Casanavec 2012c): conceitos *a priori* podem ser *dados* (o caso dos conceitos que à filosofia cabe tematizar, que por sua vez podem possuir ou não esquemas – em caso de possuírem trata-se de *categorias* do entendimento e em caso negativo são *idéias* da razão) ou *não dados* (o caso dos conceitos matemáticos, que quando construídos são matemáticos em sentido estrito e quando não são conceitos formais); conceitos *a posteriori* estão sujeitos à mesma classificação: *dados* ou *empíricos* (com exemplificação são empíricos em sentido estrito e sem exemplificação são ficções) e *não dados* ou conceitos *de projeto* (que por sua vez dividem-se em conceitos *com protótipo* ou *conceitos de artefatos possíveis* – como computadores – e *sem protótipos* ou conceitos de artefatos impossíveis como o de um motor perpétuo). Ora, os principais conceitos em jogo no enunciado do T4C são: mapa planar normal, coloração admissível e quatro-colorabilidade dos quais parece claro que não possuem senão sentido matemático estrito – sendo, portanto, *a priori*. Poder-se-ia, entretanto, objetar que sem os conceitos de redutibilidade e inevitabilidade, centralíssimos na prova, e construídos apenas com o uso do computador, o enunciado não seria provado. Ocorre que tais conceitos foram por assim dizer "construídos" antes da concepção da ideia de que computadores eram necessários para gerar um determinado conjunto de configurações inevitáveis e redutíveis, de modo que o conceito de computador, único conceito possivelmente *a posteriori* em jogo na prova, não entraria de modo relevante em qualquer compreensão da mesma embora entre, certamente, no contexto de verificação por parte dos experts. Ainda assim, nos parece ser necessário responder sobre o conceito de computador: trata-se de um *conceito de projeto com protótipo* ou de um *conceito empírico com exemplificação*?

Se agora considerarmos que o lema cuja prova depende da máquina para realizar os cálculos é, de algum modo relevante, semelhante aos casos ilustrados por Pap, de sentenças reconhecidas como verdades sintéticas antes de serem utilizadas como definições implícitas de conceitos (sejam empíricos ou matemáticos), o apelo ao instrumento de cálculo (o computador) na prova desse lema é tão legítimo quanto o apelo à instrumentos de medição no contexto da física. Isso porque em ambos casos os instrumentos *são utilizados como* padrões *a priori* de procedimento ou, como diria Pap, como princípios metodológicos que não podem ser *diretamente* refutados (e que Kant poderia chamar de princípios regulativos da ciência). Uma "refutação" de princípios metodológicos só é possível na medida em que as leis empíricas que deram origem a eles não se verificam. Ora, não é nada trivial mostrar como os cálculos executados pelo computador na prova do lema de D-redutibilidade estão associados a leis empíricas – já sabemos que necessitamos, dentre outras coisas, explorar mais adequadamente a distinção entre cálculo e experimento, bem como as semelhanças possíveis entre ambos os processos, para melhor atacar a questão. De todo modo vale destacar que as únicas considerações acerca do computador feitas por Appel e Haken no artigo que apresenta a prova dizem respeito às capacidades de memória (e ao tipo de máquina) – nada ali, poderíamos dizer, remonta a qualquer conexão causalmente descrita entre fenômenos empíricos.[120]

Bastaria, entretanto, retomar os exemplos de proposições ou princípios materialmente *a priori* que Pap oferece (e que apresentamos sem muita ordem acima) para dar-se conta de que não é bem esse o caso. Não é o T4C propriamente, mas somente algumas pressuposições sobre o funcionamento empírico da máquina, ou talvez no máximo o lema provado com seu auxílio, o que poderia ser considerado como elemento ou princípio materialmente *a priori* na prova do T4C. Ainda assim, a levar a sério a distinção de Pap, melhor faríamos em conceder que

[120] As referidas observações encontram-se na segunda parte do artigo que apresenta a prova, já referido no primeiro capítulo: "The computer programs were greatly influenced by the facilities available. We had access to IBM computers (a 360-75 at Urbana-Campaign, a 370-158 at the University's Chicago Circle Campus, and later a 370-168 of the University of Illinois administrative data processing unit). For this reason programs were written in IBM assembler language to attempt do maximize efficiency. When we inquired, the opperation's staff suggested that we use less computer time at the expense of larger amounts of core storage. Therefore, to save steps we choose to use large tables. The core storage requirements were as follows: for twelve-rings, 200,000 bytes; for thirteen-rings, 600,000 bites; for fourteen-rings, 1,700,000 bytes." (Appel, Haken & Koch, 1978, p. 493) Note-se a colaboração da equipe que gerenciava o uso dos computadores que foram emprestados para a equipe de Appel e Haken.

mesmo que o fossem, o lema provado com o auxílio da máquina (acerca da qual pressupomos conhecimentos empíricos) *funciona como* proposição *a priori* no todo da prova, como passo legítimo de uma dedução que não perderia para nada, sob essa interpretação, seu caráter de procedimento *a priori*.

O procedimento, nesse caso, está sendo considerado *a priori* no quadro da teoria desenvolvida por Appel e Haken para a construção do conjunto de configurações que, ao ser construído, prova por absurdo a verdade do T4C. Que esse quadro teórico possua verdades "sintéticas", "com referência a objetos" ou contingentes, como as verdades acerca do computador, não implica que se trate de proposições sujeitas à refutação direta, uma vez que o computador é utilizado como padrão de procedimento metodológico, do mesmo modo que o princípio da conservação da energia mecânica (do qual se pode afirmar ter origem nas descobertas empíricas de Mayer e Joule, da equivalência quantitativa do calor e do trabalho mecânico)[121] é utilizado como procedimento metodológico funcionalmente *a priori* na definição de capacidade térmica.

O que gostaríamos de sugerir é que, levando-se em conta (talvez de modo dogmático) a tese de Pap de que tanto na física clássica quanto na lógica e na matemática realizam-se processos de convencionalização que transformam leis empíricas em princípios contextual e funcionalmente *a priori*, estamos de posse de uma pista para reler os sentidos de *a priori* e *a posteriori* tal como empregados no AIE de Tymoczko. Se substituirmos sua ênfase no caráter supostamente *a posteriori* dos cálculos computacionais pela consideração à la Pap de que as leis empíricas envolvidas na construção da máquina, e porventura na execução dos programas, bem como os cálculos mecânicos, estão sendo utilizadas implicitamente como proposições *a priori* não na definição de um dos termos do T4C, mas na construção da prova de um de seus lemas, o que se deveria afirmar não é que a prova do T4C introduz a experimentação no domínio da matemática – não mais do que o uso de um instrumento como uma máquina de calcular o faria – mas que se trata de um procedimento de dedução constituído por proposições tanto formal quanto funcionalmente *a priori*.

Apesar de que o uso de uma ferramenta tamanhamente *sui generis* como o

[121] Cf. Pap 1944, p. 480. Deve-se observar aqui a sugestiva leitura fornecida por Gilles-Gaston Granger no capítulo quinze de *Formes, opérations, objets* ("Le synthétique a priori et la science moderne"), que não apenas é compatível com, senão complementar à, leitura de Pap, na medida em que estende a interpretação à Relatividade.

computador seja notável ao participar da solução de um célebre problema matemático, a novidade quanto a esse procedimento de prova, tal como alarmada por Tymoczko, ainda estaria para ser atestada. Em seu favor seria necessário mostrar como em todas as demais provas matemáticas, que não a do T4C, não é possível encontrar notícia do tipo de cruzamento entre proposições formal e funcionalmente a priori – tarefa que, ao menos desde uma perspectiva aberta na esteira daquela sugerida por Bernays, não se promete trivial, dadas as similaridades metodológicas entre a matemática e as ciências naturais.[122] O que a inversão de perspectiva (sobre o modo como se compara matemática e ciências naturais) possibilita, ao invés de uma separação plena entre métodos matemáticos e físicos é uma aproximação e o destacamento de uma *semelhança funcional* entre descobertas empíricas que complementam argumentos em física (ou, no caso do que trata Pap, de proposições *materialmente a priori* na definição de conceitos como massa ou energia no contexto da mecânica clássica) e cálculos que complementam provas (como no caso dos cálculos mecanicamente executados na prova do T4C).

Já de uma perspectiva wittgensteinianamente inspirada, na qual se sublinha a primazia das provas *simpliciter* para as investigações filosóficas, seria preciso considerar que "a matemática é uma MISTURA MULTICOLORIDA de técnicas de prova"[123] (Wittgenstein, *RFM*, III, §46), ou seja, que se relaciona diretamente com o aprendizado de habilidades e o domínio de determinados *procedimentos simbólicos* – e não experimentais.

[122]Embora se deva destacar a diferença crucial: "For every discipline, what is preliminary (*préalable*) is the variety of concepts, suppositions, ways of thinking which are taken for granted when the discipline starts. In this sense, mathematics is preliminary to natural science; the method of natural science pressuposes mathematical truths." (Bernays, 1965, p. 127-8) e segue: "In this way, by attenuating and, so to speak, relativizing the concepts of a priori and analytic we can unify to observation... mathematical truths are different from those of the natural science; on the other hand there exists much in common between the methods". (*op. cit.* 128). Ver também Hilbert, "Lógica e conhecimento", §18: "O a priori não é nada mais e nada menos do que uma perspectiva fundamental, ou a expressão de certas pré-condições indispensáveis de pensamento e experiência." – com a ressalva de que Kant teria superestimado grandemente o papel e a extensão do *a priori*.

[123] A caixa alta é de Wittgenstein. O parágrafo todo, em inglês, vai assim: "I should like to say: mathematics is a MOTLEY of techniques of proof – And upon this is based its manifold applicaility and its importance". A palavra "motley" está para a expressão alemã italicizada "BUNTES *Gemisch*", associada também à ideia de *mistura multicolor* ou mesmo *polimorfa*. A referência à policromia não aparece na tradução inglesa de Anscombe, mas na francesa de Lescourret, na qual se traduziu a expressão como "*mixture* BIGARRÉ", quer dizer, *variegada*. Perde-se no primeiro caso a dupla referência que o termo possui no texto de Wittgenstein: às formas e às cores que ele metaforicamente atribui ao mundo das provas matemáticas. Como nos informa o *Dicionário Houaiss*, *variegado* diz respeito a algo "1. Que apresenta cores ou tonalidades variadas; matizado, versicolor [*desenho de colorido v.*] 2. que ostenta diversidade; diversificado, variado, diferente 3. MORF. BOT que apresenta *veriegação.*"

Pode-se inclusive arriscar dizer, com Wittgenstein, que calculamos (e, de algum modo relacionado que ainda resta esclarecer, provamos) operando não apenas com leis lógicas e matemática "puras", no sentido da total independência de qualquer experiência, mas também com leis empíricas que foram "solidificadas em regras"[124] – o que é um interessante ponto de contato temático de ambas as abordagens (de Pap e Wittgenstein) com o dito convencionalismo de Henri Poincaré.[125]

O próprio Tymoczko reconhece, vimos acima, que o T4C sublinha uma "propriedade essencial" dos mapas planares (a de serem quatro-coloríveis). Ora se ele o faz com o auxílio de uma máquina de computar programada por pessoas, e se o resultado do que ele faz (a proposição de que toda configuração do conjunto U é redutível, enunciada no lema de redutibilidade) é inserido na prova, cumprindo ali uma função de proposição *a priori*, parece ficar preservado, ao menos provisoriamente, o *dictum* kantiano de que "Só conhecemos a priori nas coisas o que nós mesmos nela pomos" (*CRP*, B XVIII). Desse modo as consequências revolucionárias que Tymoczko quer extrair da prova – especialmente a introdução do *a posteriori* no domínio do *a priori* – não se sustentam.

Se nossa aplicação da distinção de Pap fizer sentido, é por melhor alocar as "leis da construção da máquina" de que fala Tymoczko (ou as "leis da física" de que fala Kripke na formulação de seu exemplo de cálculo mecanicamente executado) na estrutura da prova do T4C como condição de sua possibilidade. Todas aquelas crenças ameaçadas sobre a matemática que o autor alega estarem em perigo em razão do caráter *sui generis* dessa prova (derivado justamente da função que imagina ter as leis físicas na compreensão da prova) podem ser reescritas, então, sem as fortes tonalidades *anti-aprioristas* que Tymoczko lhes atribui. Afirmar, por exemplo, que é parte "[d]a abordagem mais natural" a ideia de que matemática não possui conteúdo empírico nos parece equivocado na medida em que se leve em conta reflexões como aquelas às quais acima subscrevemos, de Bernays e Pap, mas que talvez Tymoczko tenha prematuramente desprezado.

[124] A expressão utilizada por Wittgenstein é "hardened into a rule" (ocorrendo, por exemplo, em RFM, VI, § 23) e aparece normalmente com ressalvas do tipo "é, por assim dizer, uma proposição empírica endurecida em uma regra" ou "endurecida em proposições que expressam regras". Para um tratamento dessa questão cf., de Mark Steiner, "Wittgenstein: Mathematics, Regularities and Rules" (1996) e o mais recente "Empirical Regularities in Wittgenstein's Philosophy of Mathematics" (2009).

[125] Talvez uma das melhores formulações de H. Poincaré daquilo que se chama de seu convencionalismo se encontre na terceira e última parte de *O valor da ciência*. (Poincaré, 1995).

Se ao lado das posições desses autores dispusermos agora aquela concepção leibniziana do pensamento simbólico da qual acima sublinhamos as funções, teríamos de concluir que Tymoczko desenha uma *Image d'Épinal*[126]– adequada a seus anseios anti-fundacionalistas de derrubada de paradigmas tradicionais sobre a matemática, suas provas e teoremas – desconsiderando quase que por completo as nuances envolvidas na distinção entre o domínio simbólico e o empírico.

O resultado relativamente distinto do de Tymozko que anunciamos poder alcançar ao final da seção precedente é o de que não é o caso, como nosso autor pretende, que com a prova do T4C tenha sido modificado o estatuto geral de conhecimento *a priori* que tradicionalmente se atribui à matemática com a prova do T4C. Acreditamos estar agora de posse de boas pistas para sustentar que as ciências naturais elas mesmas comportam procedimentos de *apriorização* de verdades empíricas, ou seja, transformação de proposições cuja origem pode ser "algum tipo de experiência" em proposições que funcionam como princípios *a priori* no interior de argumentos e/ou experimentos nesse domínio.

Restaria ainda, para completar o movimento de desconstrução da estratégia de Tymoczko, mostrar como o resultado dos cálculos computacionalmente realizados não é do mesmo tipo que os resultados experimentais das ciências naturais na medida em que se trata de operações de cálculo, de *pensamento simbólico* ou *cego* no sentido dos tópicos da tradição do conhecimento simbólico acima expostos. Gostaríamos de sustentar que é apenas na medida em que esse domínio formal do conhecimento puder ser identificado com o domínio empírico (uma questão, como dissemos, repleta de nuances em cada um dos autores inscritos

---

[126] Como aquela de que fala Dieudonnée na epígrafe do presente capítulo: *Imagens de Epinal* são estmpas gravadas através da técnica da xilogravura, inventada em Épinal, cidade do interior da católica França de fins do século XVIII. Originariamente as imagens foram usadas na divulgação de iconografia religiosa, tendo sido ampliado o domínio de suas funções com o advento da publicidade. No Brasil, pode-se encontrar um correlato, os conhecidas *santinhos*. O emprego dessa imagem no texto de nossa epígrafe permite a Dieudonné remeter-se a uma concepção notória das matemáticas cujo extremo oposto – o ponto de vista de acordo com a qual o tatear e as incertezas são sua marca constante – foi sustentado por I. Lakatos. Na sequência do mesmo texto o matemático francês exprime espanto quanto ao sucesso de tal ponto de vista nos meios filosóficos concernidos com a ciência. Além disso, encontramos nessas linhas uma recusa veemente do ponto de vista de Lakatos, justificada pela contestação da estratégia fundamental do célebre *Proofs and Refutations* (Lakatos, 1976). Trata-se de considerar eventos históricos singulares como justificativas para a alegação de uma tese geral acerca do desenvolvimento das matemáticas: que a falibilidade é a característica capital do conhecimento matemático. Acreditamos que Tymoczko infelizmente herdou o mesmo tipo de estratégia exagerada de Lakatos, e que portanto a crítica de Dieudonnée se estenderia perfeitamente ao uso do AIE para a derrocada das crenças da "abordagem mais natural" sobre provas.

na referida tradição) que se poderia alegar que a prova do T4C não é uma prova "no sentido tradicional", por possuir inelimináveis elementos empíricos.

4.3 Considerações finais

Talvez fosse possível a partir desse apelo a Kant afirmar que a assistência calculatória do computador no caso da prova do T4C faz parte do processo de construção *a priori* das intuições não-empíricas correspondentes aos conceitos envolvidos na prova do lema de D-redutibilidade. Esse gênero de consideração apoiada em Kant e Pap[127] pareceria, assim, reforçar a tese de que a estratégia lakatosiana de Tymoczko ao ignorar por completo a relação das operações realizadas pelo computador com as funções do pensamento cego, conduziu-o a conclusões demasiadamente radicais. É bem verdade que a prosa de Appel e Haken, da qual apresentamos uma mostra ainda no primeiro capítulo, pode ter incentivado as conclusões de Tymocko, como quando afirmam que no processo de construção do algoritmo de descarga o computador superava suas próprias capacidades intelectivas (a ideia de que o computador compunha "estratégias baseadas nos truques que lhes havam sido ensinados", por exemplo). Podemos dizer que no contexto da descoberta do algoritmo o computador estava cumprindo uma função heurística associada à função calculatória de manipulação regrada (e cega) de signos. Mas disso atribuir capacidades quase humanas de aprendizado e de formulação de estratégias à máquina nos parece configurar justamente o tipo de confusão conceitual que é preciso ou evitar ou esforçar-se por esclarecer.[128]

Como veremos no capítulo seguinte, isso acabou engendrando reações por vezes igualmente equivocadas, apesar de que ao menos em uma das respostas a seu artigo, formulada por M. Detlefsen e M. Luker, tenha sido invocada a necessidade de diferenciar os atos de provar e calcular (com o prejuízo, como

[127] Cf. nota 119, p. 98.

[128] É disso que trata o texto de S. Stenlund acima referido (nota 95), quando observa "Fala-se, por exemplo, sobre 'aprendizado da máquina' como se a noção de aprendizado que empregamos fosse a mesma que empregamos para seres humanos. Isso dá a a impressão de que o computador e seu programa são um modelo do 'mecanismo mental' do aprendizado humano, um modelo do que 'ocorre na mente quando se aprende. O termo 'aprendizado da máquina' tem, entretanto, um uso técnico perfeitamente correto em ciência da computação, significando um algoritmo que em algum sentido formalmente bem definido 'automodifica-se'. Mas essa é uma noção distinta da que se emprega em conexão com seres humanos, apesar de alguma similaridade formal." (Stenlund, 1990, p. 24)

veremos a seguir, de que se comete então o equívoco, que certamente mobilizaria a Wittgenstein, de *identificar* a atividade de calcular com a de experimentar).

Se resgatarmos a distinção apresentada ao final do capítulo precedente entre provas *simpliciter*, provas formas e provas assistidas por computador, acompanhada da distinção que se pode operar no nível das provas *simpliciter* entre provas como atos, traços ou objetos, deveríamos ser capazes de articulá-las no quadro das distinções de Pap para por assim dizer enquadrar as premissas do AIE de Tymoczko. No presente capítulo, entretanto, lidamos apenas de modo muito geral com o conjunto das premissas do AIE, preferindo enfatizar tópicos relativos à primeira delas, na qual um conceito padrão de prova é fornecido para ser "desconstruído". Uma vez que a principal noção a ele associada foi a de *a priori*, apresentamos a concepção de Pap para auxiliar a pensar seu uso nas consequências mais gerais a que Tymoczko pretende chegar via AIE.

Ao afirmar, por exemplo, que o T4C não é conhecido *a priori* porque não resulta de uma dedução *a priori* a partir de premissas, Tymoczko está sublinhando que a prova enquanto ato não pode ser reproduzida por qualquer um sem o auxílio da máquina. Ainda assim, é preciso admitir que enquanto traço/receita/programa parece possível afirmar que estamos, coletivamente (como diria Prawitz) de posse da prova do T4C – e mesmo enquanto objeto, uma vez que o programa está, para usar uma imagem wittgensteiniana acionada de outro modo por Tymoczko, "guardado nos arquivos" (e nesse sentido seria o mesmo afirmar que o programa é elemento constitutivo do elenco das condições de possibilidade da reprodução do ato de prova e da posse do objeto-prova).