

6 Calcular, Provas, Experimentar

Tolstoi: o significado (a importância) de algo reside em sua compreensibilidade geral. – Isso é verdadeiro e falso. O que dificulta a compreensão de um tópico – se há algo significativo e importante – não é que antes de poder entendê-lo você deva ser especialmente treinado em assuntos abstrusos, mas o contraste entre compreender o tópico e o que a maioria das pessoas *quer* ver. Por causa disso as coisas mais óbvias podem se tornar as mais difíceis de compreender. Não é relacionada ao entendimento que uma dificuldade precisa ser superada, senão à vontade.

Wittgenstein
Cultura e Valor

6.1 Introdução

Nossa investigação sobre as disputas em torno da prova do T4C situou-nos diante de um tema que já foi caracterizado como uma “invenção tipicamente wittgensteiniana”: a distinção prova *versus* experimento. É bem verdade que a sentença tractariana da qual se poderia dizer que descende a formulação da distinção foi anteriormente mencionada em nosso trabalho, embora sob a alcunha de jargão. Fazendo-lhe justiça, deve-se dizer que a sentença é uma das engrenagens da sexta seção do *Tractatus*, aparecendo no seguinte contexto:

6.233 À questão de saber se a solução dos problemas matemáticos requer intuição, deve-se responder que **é precisamente a linguagem que fornece**, nesse caso, **a intuição necessária**.

6.2331 O **processo de calcular proporciona** justamente essa intuição.
O cálculo não é um experimento. (grifo nosso)¹⁶⁸

¹⁶⁸ Com o que de imediato se pode sublinhar a linhagem leibniziana das considerações de Wittgenstein. Cf. nota 145 acima.

Observamos, com Sören Stenlund, que esse aspecto da filosofia da matemática de Wittgenstein, apesar de todas as transformações pelas quais passou seu pensamento, permanece presente do início ao fim: a ênfase na *diferença* crucial entre proposições de experiência e proposições da matemática.¹⁶⁹

Quando o enunciado tractariano apareceu, no terceiro capítulo, tratávamos da necessidade de distinguir entre a realização de medidas físicas (casos de *aplicação* de padrões numéricos e calculatórios, algo próprio de experimentos, e portanto de procedimentos *a posteriori*) e a *realização* mesma de cálculos (que então chamamos “operações-padrão”, típicas de provas, procedimentos *a priori*). A dicotomia *a priori* x *a posteriori* foi então primeiramente mencionada associando-a a outras dicotomias tradicionais, como necessário x contingente.¹⁷⁰ A partir daí mostramos a concepção funcional de *a priori* de Pap (que chamamos ocasionalmente de neo kantiana) como uma alternativa de leitura daquela dicotomia – uma leitura que nos pareceu prolífica, na medida em que dá relativa conta dos *processos de transformação* de proposições empíricas, ou contendo termos que se referem a algo empírico, em proposições *a priori* ou normas de representação. Com isso quisemos comparar a incorporação dos resultados dos cálculos por computador como elementos funcionalmente *a priori* no contexto da prova do T4C. Adiamos, assim, para o presente capítulo a tarefa de examinar a hipótese de que distinção wittgensteiniana entre prova *versus* experimento fosse

¹⁶⁹ Cf. Stenlund, 2012a e também “The continuity of Wittgenstein’s Philosophy of Mathematics” (Wrigley, 1993). Wrigley destaca como descontinuidades relevantes: o abandono da ideia de que conceitos matemáticos fulcrais como o de *número* e *prova* possuem uma forma geral comum a todas as diferentes manifestações (com o que se conecta a observação elaborada na nota 123 acima), ou seja, que Wittgenstein passa a considerá-los como *conceitos determinados por semelhança de família*; a elaboração progressiva da ideia de que *uma prova matemática cria novas conexões conceituais e persuade a tomar uma decisão* (embora, como veremos, não se trate de afirmar que a cada passo da prova nos seja em algum sentido “concedido o direito” de tomar decisões). Caberia observar por fim que, de acordo com Wrigley, a continuidade mais relevante diz respeito à conservação de uma *imagem do cálculo* como padrão para pensar o sentido mesmo das proposições matemáticas: o cálculo como modelo de comparação para as investigações sobre linguagem e pensamento é progressivamente substituído pelo jogo como modelo – o que de acordo com o primeiro autor citado nesta nota se deve justamente à incorporação de elementos do formalismo hilbertiano em filosofia da matemática aos pensamento de Wittgenstein. Vale destacar também que a supramencionada tese de doutorado de Jourdan mostra a distinção entre os âmbitos necessário e contingente da linguagem como chave de leitura da filosofia de Wittgenstein como um todo, pois perpassa seu pensamento e é imprescindível para a noção mesma de determinação semântica do filósofo, que por assim dizer a descola da determinação da verdade: as proposições da lógica e da matemática são caracterizadas, dentre outras coisas, pelo colapso entre verdade e sentido.

¹⁷⁰ Cf. nota 99 acima.

confortavelmente alocada com as demais dicotomias tradicionais, tendo como pano de fundo a perspectiva funcionalista de Pap.

Importa-nos, pois, averiguar em que medida a distinção de Wittgenstein, que apresentaremos na seção 5.2, pode contribuir para esclarecer tópicos das disputas sobre o T4C. Ainda nos resta analisar a conclusão do AIE, que conecta a questão da possibilidade de erro com a hibridização dos processos de prova, bem como as duas últimas das quatro crenças sobre a matemática que esses processos híbridos, segundo Tymoczko, ameaçariam (seção 5.3). Por fim, teceremos algumas considerações mais gerais sobre a perspectiva wittgensteiniana em filosofia da matemática, para indicar uma possível maneira de compreender seu lugar nos enquadramentos tradicionais.

6.2

Stilwell e o duplo ponto de vista de Wittgenstein sobre provas

Diversos especialistas na filosofia de Wittgenstein tem dedicado alguns estudos ao esclarecimento do papel da suposta exigência de sinopticidade de provas matemáticas em seu pensamento.¹⁷¹ Para continuar examinando o modo como esse tópico da filosofia da matemática de Wittgenstein foi utilizado em questões disputadas sobre o T4C, há textos que são em muitos aspectos mais precisos e consistentes que o de Shanker, analisado no capítulo anterior, que usa a alegada exigência para excluir o T4C do domínio matemático. Além disso, dificilmente fazem uso dos textos camaleônicos do período intermediário como suporte textual para qualquer tese forte sobre “o que Wittgenstein diria” acerca de provas computacionalmente assistidas (e desprovidas de inspeccionabilidade). Seu enfoque, diversamente, são as anotações dos textos de maturidade e cada um deles tem objetivos específicos que diferem dos nossos. Eles, contextualizam melhor do

¹⁷¹ No primeiro volume de *Understanding and Meaning* Baker e Hacker apenas mencionam o fato de que a noção de *Übersicht* é tecida principalmente nas observações sobre matemática – preferindo construir uma análise mais geral da noção em conexão com questões filosófico-metodológicas. Outros autores que se dedicaram ao tema foram Crispin Wright (capítulo VII de *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*, 1980) e Pasquale Frascolla (*Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, 1994, especialmente terceiro capítulo). Ambos discutem a interpretação oferecida por Dummett em “Wittgenstein's Philosophy of Mathematics”, que associa as posturas de Wittgenstein com a do finitismo estrito, além da tese de que Wittgenstein incorpora um tipo “puro-sangue” de convencionalismo. Textos mais recentes, e os quais eventualmente serão acionados aqui, são “‘A mathematical proof must be surveyable’: what Wittgenstein meant by this and what it implies” (Mühlhölzer, 2005) e “Wittgenstein on surveyability of proofs”, publicado no recente *The Oxford Handbook in Wittgenstein* (Marion, 2012).

que Shanker as observações de Wittgenstein relativas a provas no todo de sua filosofia da matemática¹⁷² e problematizam mais precisamente o que poderia ser uma noção de sinopticidade como aspecto lógico e não epistemológico, como o autor queria evitar.¹⁷³

Restringiremos nossa exposição à apresentação da leitura oferecida por Shelley Stillwell acerca da participação do tema wittgensteiniano da *Übersichtlichkeit* de provas nas disputas sobre a prova do T4C. Sublinharemos, assim, elementos que podem auxiliar a aperfeiçoar uma ideia exposta ao final do último capítulo, mas que de certo modo estamos cativando ao menos desde o terceiro capítulo: a de que a novidade filosoficamente significativa implicada pela prova do T4C não consiste, como quer Tymoczko, em ser um híbrido de prova com experimento – nem tampouco em ser um resultado experimental em sentido estrito, como quer Shanker, para quem a prova teria sido aceita como tal por uma espécie de “equívoco gramatical” da comunidade matemática.

Não gostaríamos, entretanto, de afirmar que a novidade de nosso estudo de caso consistiu apenas na introdução de uma nova ferramenta em práticas de prova, pois isso poderia sugerir a ideia de que computadores são *meras* ferramentas de cálculo. Como se esse novo artefato de transmissão e codificação de informação, essa “máquina de pensamento cego” como dissemos, inventada a partir de desenvolvimentos ocorridos na e pela matemática, não engendrasse, por sua vez, todo um amplo e multifacetado universo de práticas e experiências humanas – por que razão não dizê-lo, de novas formas de vida.

Nosso objetivo com o agrupamento de alguns elementos e movimentos estratégicos da filosofia da matemática de Wittgenstein a partir da leitura oferecida por Stillwell consiste em delinear uma *perspectiva wittgensteiniana* a partir da qual tratar do lugar das atividades de cálculo nas controvérsias sobre a prova do T4C, bem como revisitar, pondo em ação, as distinções apresentadas no segundo capítulo. Se com isso conseguirmos mostrar que algum problema engendrado no ou a partir do AIE se pode dissipar, a fecundidade que nos parece própria àquele gênero de perspectiva já estaria garantida.

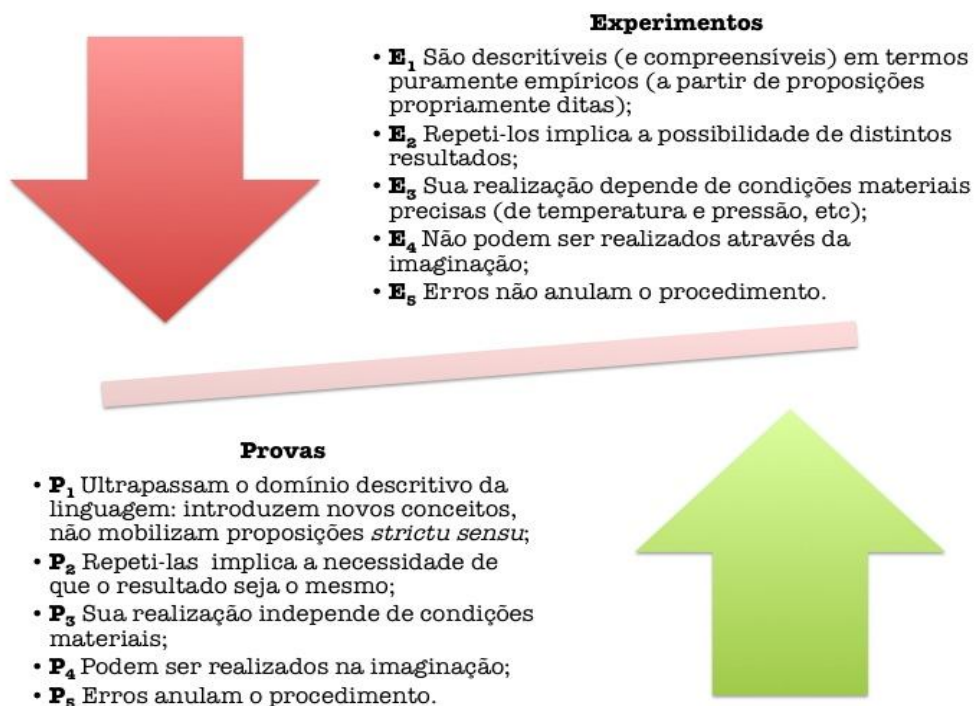
“Empirical Inquiry and Proof” (Stillwell, 1992) parte de uma premissa elaborada no texto de Shanker: a de que Wittgenstein teria analisado a noção de

¹⁷² Os textos de Mathieu Marion, Felix Mühlhölzer e Sören Stenlund.

¹⁷³ Trata-se das propostas de Stillwell e Mühlhölzer.

prova buscando excluir completamente elementos de ordem epistemológica. A autora refere-se mais especificamente “à rejeição [de Wittgenstein] de qualquer concepção mentalista de nossa ‘apreensão’ [*grasp*] ou ‘compreensão’ [*understand*] de provas” (Stillwell, 1992, p. 122). Stillwell estaria, assim, corrigindo adequadamente seu antecessor, Shanker, pois Wittgenstein talvez estivesse mais preocupado em evitar não propriamente questões epistemológicas, mas um determinado modo de conceber a compreensão de provas, qual seja, o modo mentalista. Para a autora, “ele [Wittgenstein] sustenta que provas são ‘sinópticas’ e que nossa habilidade de compreendê-las repousa, pelo menos, nesse fato” (*loc. cit.*), ou seja, que a sinopticidade não é derivada da compreensão da prova no sentido de um fenômeno que ocorre no interior de nossas mentes.

Stillwell dedica uma seção de seu texto a elencar evidências a favor da pertinência da distinção entre provas e experimentos tal como proposta por Wittgenstein nas RFM, utilizando diversas passagens dessa coletânea da observações para tecer uma “rede de pontos lógicos de contraste entre provas e experimento” (Stillwell, 1992, p. 116 [nota 8]), da qual oferecemos uma representação diagramática abaixo:



A partir daí a autora formulará uma defesa do que denomina de apriorismo wittgensteiniano, sobretudo com base nos aspectos **P₂** e **P₃**, ou seja, o “holismo” e a incondicionalidade de provas. Sua estratégia nos interessa não tanto por ter resultado em uma análise de todo adequada da discussão sobre a prova do T4C, mas sim na medida em que o “ataque” à concepção wittgensteiniana do *a priori* de que fala a autora é justamente a leitura que tanto Tymoczko quanto Detlefsen & Luker realizam da novidade representada pela prova do T4C. Examinemos, então, sua lista de aspectos lógicos em favor da distinção de Wittgenstein, para em seguida avaliar a possibilidade de que ela esclareça algum tópico na discussão que nos concerne.

De início é preciso observar que **P₁** poderia ser chamado aspecto normativo-criativo, sendo talvez, dos pontos destacados por Stillwell, o mais importante para uma caracterização da filosofia da matemática de Wittgenstein como um todo. Embora Stillwell não realize qualquer movimento de contextualização, já observamos com Stenlund que a distinção entre proposições descritivas e matemáticas (ou entre o uso descritivo e o uso normativo da linguagem, característico da matemática e de outros domínios, como o do direito), é um dos alicerces das investigações filosóficas de Wittgenstein. Não é de espantar, portanto, que se pudesse por assim dizer derivar as demais características distintivas entre provas e experimentos dessa primeira – especialmente **P₅**, o ponto de acordo com o qual a presença de erros anulam provas.

A possibilidade de derivação do ponto **P₅** a partir de **P₁** é devida ao fato de ser característico de domínios normativos que caso um determinado ato ou procedimento (casar-se, por exemplo, no caso do direito civil) não seja realizado de acordo com as normas habilitantes, o resultado não consiste numa realização errada do ato, mas na sua anulação (anula-se um casamento por não ter sido realizado de acordo com as regras que habilitam para e regem o ato de casar-se; não se casa “errado” *nesse* sentido). Poderíamos então dizer que um erro em um procedimento que pretende ser prova anula-o.¹⁷⁴ Mais do que isso, complementando o trabalho de Stillwell, poderíamos lembrar que todos os erros encontrados no procedimento da equipe de Appel e Haken eram de tipo

¹⁷⁴ Estamos apelando aqui a uma série de considerações sugeridas por Lassalle Casanave em “Matemática elemental, cálculo e normatividad”, adaptando o que ali foi dito sobre o ato de calcular ao ato de provar: não somos obrigados a realizar tais atos (do mesmo modo como não somos obrigados a nos casar ou realizar outro performativo jurídico), mas a partir do momento em que decidimos fazê-lo, é preciso obedecer a uma série de procedimentos, satisfazer determinadas condições estabelecidas por regras habilitantes. (Lassalle Casanave, 2006)

irrelevante, que não interferem no resultado final da derivação (ou, como base no que acaba de ser dito: não é capaz de anular o procedimento).

Quanto à P_2 , o “holismo” das provas, trata-se para a autora de sublinhar que repetir uma prova engendra necessariamente a repetição do mesmo resultado. Com base em nossas distinções precedentes diríamos que a repetição do ato de provar gera inexoravelmente uma repetição da prova como objeto: seja o teorema provado, seja a prova como mapa. A evidência textual à qual Stillwell recorre em favor disso é um recorte de uma anotação do referido período entre 1939-40. Apresentamos a seguir a íntegra da anotação, destacando com os elementos de nosso esquema as passagens que dizem respeito aos pontos de Stillwell:

Uma prova nos mostra o que DEVE resultar. $[(P_1)]$ – E assim toda reprodução da prova deve demonstrar a mesma coisa $[(P_2)]$, por um lado ela **deve reproduzir o resultado automaticamente**, enquanto por outro lado ela **deve reproduzir também a compulsão em alcançá-lo**.

Isto é: não reproduzimos meramente as condições que uma vez forneceram esse resultado (como no experimento), mas o resultado ele mesmo $[(P_2)]$, $[(P_3)]$. E contudo **a prova não é um jogo de carta marcadas** [*a stacked game*] na medida em que sempre **deve ser capaz de nos guiar** $[(P_3)]$.

Por um lado **devemos ser capazes de reproduzir a prova *in toto* $[(P_3)]$ automaticamente**, e por outro lado essa reprodução deve mais uma vez ser *prova* do resultado $[(P_3)]$.

“Provas devem ser sinópticas [*übersehbar*]”: a finalidade disso é nos chamar a atenção para a diferença entre ‘repetir uma prova’ e ‘repetir um experimento’. Repetir uma prova não é repetir as condições sob as quais um resultado particular foi uma vez obtido $[(P_3)]$, mas repetir todo passo *e o resultado* $[(P_2)]$. E ainda que isso mostre que **prova é algo que deve ser capaz de ser reproduzido *in toto* $[(P_2)]$ automaticamente**, cada reprodução sua deve conter a força da prova, que compele à aceitação do resultado. (RFM III, § 55, grifos nossos [não os itálicos, que são de Wittgenstein])

Observemos, primeiramente, que essas ideias estão depuradas nas IF, sobretudo nas seções dedicadas aos famosos problemas acerca de seguir regras (§185-242).¹⁷⁵ Há sequências, entre §156-199, nas quais Wittgenstein compara a ideia de seguir regras com a imagem de uma “máquina simbólica”, uma “máquina de leitura” na qual todos os estados futuros “já estão determinados de antemão” num sentido diferente em que estariam numa “máquina efetiva” (física). Todas essas considerações poderiam contribuir para que se construísse um modo

¹⁷⁵ Para as divisões da obra em “extensões contínuas” (o mais próximo do que se poderiam considerar capítulos) de acordo com temas cf. o verbete “Investigações filosóficas” do *Dicionário Wittgenstein*. (Glock, 1998).

adequado de tratar do assunto desviado por Stillwell – da reprodutibilidade automática de provas:

A máquina como símbolo de sua ação: a ação da máquina – poderia começar dizendo – parece já estar lá desde o começo. O que isso quer dizer? – Se conhecemos a máquina, seus movimentos e tudo o mais parecem estar já completamente determinados.

Falamos como se essas partes pudessem apenas mover-se desse modo, como se não pudessem fazer mais nada. Como assim – esquecemos a possibilidade de que entorem, quebrem, derretam e tudo o mais? Sim; em muitos casos não pensamos nisso. Usamos uma máquina, ou o desenho de uma máquina, para simbolizar uma ação particular da máquina. Mostramos o desenho, por exemplo, a uma pessoa e assumimos que ela derivará do desenho o movimento das partes. (Do mesmo modo como damos a alguém um número dizendo a ele que é o vigésimo quinto da série 1, 4, 9, 16...)

“A ação da máquina parece estar nela desde o princípio” quer dizer: estamos inclinados a comparar os movimentos futuros da máquina em sua determinação com objetos que já estão numa gaveta e que então pegamos. – Mas não falamos esse tipo de coisa quando se trata de prever o comportamento efetivo de uma máquina. Em geral, então, não esquecemos da possibilidade de uma distorção das partes, e coisas do tipo – Mas *falamos* assim, entretanto, quando estamos imaginando o modo como podemos usar uma máquina para simbolizar um dada maneira de mover-se – uma vez que ela pode se movimentar também de *diferentes* maneiras.

Podemos dizer que uma máquina, ou sua imagem, é a primeira de uma série de imagens que aprendemos a derivar dela.

Mas quando refletimos que a máquina poderia ainda mover-se de maneiras diferentes, pode parecer que o modo como se move deve estar contido na máquina-como-símbolo com maior determinação do que na máquina efetiva. Como se não fosse o bastante para os movimentos em questão ser empiricamente determinados *in advance*, mas tivessem de estar realmente – em um sentido misterioso – já *presentes*. E é verdade: o movimento da máquina-como-símbolo é predeterminado em um sentido diferente daquele pelo qual o movimento de qualquer máquina efetiva é predeterminado.” (IF, §193)¹⁷⁶

Em segundo lugar, infelizmente um dos aspectos mais interessantes da passagem das RFM não é explorado por Stillwell, qual seja, a ideia de que a reprodutibilidade *automática* da prova como um todo (ato e objeto, portanto) é condição para sua identidade. Ora, isso nos interessa pela conexão entre a referência à reprodução automática da prova e o tópico da obediência *cega* a regras, auferido nas IF:

¹⁷⁶ Comparar com o último parágrafo da p. 93 acima, onde explicamos o aspecto do funcionamento da máquina relevante para compreender sua função matemática na prova.

‘Todos os passos já estão dados’ quer dizer: não tenho mais escolha. **A regra**, uma vez selada com um significado particular, **traça** através de todo o espaço **as linhas pelas quais é para ser seguida**. – Mas se algo do tipo realmente fosse o caso, como isso seria útil? **Não; minha descrição apenas faz sentido se fosse compreendida simbolicamente** – Eu deveria dizer: *É assim que me parece* [*This is how it strikes me*].

Quando obedeco uma regra, não escolho.
Obedeco a regra cegamente. (IF, §219)

A autora afirma, entretanto, que sobre procedimentos automáticos: “o que Wittgenstein tem em mente nunca fica muito claro, e ele diz pouco sobre a ideia.” (Stillwell, 1992, p 116)¹⁷⁷

Em terceiro lugar, não se considera com atenção a ideia de que a repetição do ato inclui não somente a repetição do resultado, mas também da *compulsão* em alcançá-lo, no sentido de que a reprodução deve preservar o que Wittgenstein chama *a força da prova*, sua capacidade de servir como guia. Talvez sua opção em deixar de lado considerações relativa a esse ponto, mesmo que **P₁** destaque o aspecto normativo de provas (e portanto justamente seu estatuto de guia), se deva à complexidade do mesmo – afinal, as expressões *compulsão* ou *força* poderiam facilmente fazer pensar que quando provamos somos causalmente guiados das premissas para a conclusão da prova. Por outro lado, Wittgenstein quer justamente dissolver esse tipo de confusão, mostrando que o que chama de força da prova não consiste em ser o resultado de relações causais (de outro modo computadores seriam provadores legítimos: bastaria admitir que as relações causais em jogo na máquina são do mesmo tipo das que ocorrem em nosso cérebro) mas sim o resultado de seguir ou obedecer as regras que governam as práticas de provar.

Na sequência do parágrafo das IF citado acima, Wittgenstein afirma: “Mas qual é o propósito daquela proposição simbólica? Trazer à tona a diferença entre ser causalmente determinada e ser logicamente determinada.” (IF, §220) Seguir ou obedecer regras nos habilita, diferentemente de ser causalmente determinado a fazê-lo, a *fornecer razões* para a execução de cada passo de um procedimento de cálculo ou prova. Desse modo, a “proposição simbólica” que afirma a determinação das regras como determinação prévia completa dos passos que serão dados, sem possibilidade de escolher (fazer algo diferente do que as regras

¹⁷⁷ Sobre as discussões de Wittgenstein e Turing acerca das atividades de leitura e cálculo conferir *Wittgenstein’s Remarks on the foundation of AI* (Shanker, 1998).

determinam), cumpriria tão somente a função de explicitar o caráter lógico dessa determinação, apesar de sua aparência de determinação causal.

Com o ponto anterior conecta-se justamente **P₃**, a independência ou autonomia das provas com relação às condições materiais (localização, temperatura e pressão do ambiente, por exemplo). Se as relações em jogo numa prova, entre conceitos, regras e passos inferenciais, fossem de tipo causal (como é o caso em experimentos) e não lógico ou gramaticais, poder-se-ia afirmar, à la Tymoczko, que provas em algum sentido se confundem com experimentos. E Stillwell vai elaborar sua defesa do apriorismo de Wittgenstein justamente sugerindo que a concepção de *a priori* do filósofo teria sofrido um “ataque” por parte de Tymoczko e de Detlefsen & Luker no contexto da discussão sobre a prova do T4C.

O ponto da defesa da autora é que não se deveria confundir **P₂**, o aspecto do holismo, com a possibilidade de que o conjunto do raciocínio seja percebido *d'un coup d'œil*, para resgatar a expressão de Poincaré correspondente à sinopticidade. Isso, para a autora, porque “holismo não implica em sinopticidade [*perspicuity*]”, o que quer dizer que se poderia copiar inteiramente uma prova e seu resultado (holismo) sem que com isso se obtivesse uma imagem sinóptica ou esquemática da mesma (perspicuidade). A seu turno, tal possibilidade implicaria que, em princípio e em geral, mesmo a menos sinóptica das construções satisfaria o requisito do holismo. Desse modo, uma prova como a do T4C, mesmo não sendo sinóptica (diríamos: inspecionável passo a passo por um ser humano), poderia ser “holística” (sinóptica), uma vez que o trabalho de repetir a prova do lema principal *in toto* é realizado (ainda que por outros computadores).

A autora apresenta diversos recortes de passagens da seção III das RFM como suporte para sua leitura de que apreender [*to grasp*] uma prova depende, para Wittgenstein, de nossa capacidade de apreensão de algo geral, um padrão, enfatizando assim um dos pólos da dupla visão sobre provas que atribui ao filósofo. Poderíamos aplicar aqui os termos de nossa distinção entre inspecionabilidade e sinopticidade e dizer que Stillwell, mesmo querendo evitar falar em termos epistemológicos (daí sua opção pelo termo “holismo” ao invés de *surveyability* ou *perspicuity* de provas), tende a aceitar que se possa legitimamente falar de compreensão (e mesmo de conhecimento) de provas a partir de Wittgenstein.

Quando apresentamos a referida distinção não consideramos relevante, diferentemente de Shanker e Stillwell, excluir qualquer referência à capacidade de compreender provas, sustentando mesmo que se poderia falar de diferentes *graus de compreensão* de uma prova – indexados pelos detalhamentos em suas apresentações. As capacidades meramente calculatórias, relativas à função de pensamento cego, consideramos como algo que só envolvem compreensão num sentido, digamos, operatório: compreender um cálculo consistiria em saber como executá-lo (do mesmo modo como compreender uma receita culinária ou um algoritmo).

Por outro lado a ideia de “ver conexões” ou relações internas, ficou, de nossa parte, relacionada à sinopticidade das provas, sua capacidade de ser vista e compreendida do mesmo modo como se vê e compreende um mapa – destacando-se com isso a função propriamente *ectética* das provas como objetos, resultados dos atos de provar. Nesse sentido, se poderia pensar que quanto mais claras se mostram as conexões conceituais em uma prova, tanto mais sinóptica, compreensível aos olhos de quem sabe ver, ela será.¹⁷⁸ “Aos olhos de quem sabe ver” quer dizer apenas que compreender uma prova como estrutura equivale a saber orientar-se no espaço simbólico dentro do qual ela é construída, conhecer as convenções, regras de transformação de signos e relação entre conceitos – o que equivale a dizer: ter passado por um processo de aprendizagem de como as coisas funcionam naquele espaço simbólico.

Uma tal interpretação não foge completamente ao espírito da filosofia de Wittgenstein (nem do modo como Stillwell o apresenta) na medida em que as referidas relações conceituais que uma prova mostra, como objeto, não são nada mais do que as relações internas, relações *constitutivas* de proposições gramaticais ou necessárias – das quais, como sabemos, as pseudo-proposições da lógica e da matemática constituem o mais premente gênero. A própria Stillwell, como dissemos, afirma:

Wittgenstein sustenta que a compreensão de uma prova em um sentido “transcende” nossa apreensão [*our grasp*] de construções específicas, pois nossa convicção de que tal e tal é a maneira de provar X não é identificável com, e não envolve, crenças sobre construções espaço-temporais. Wittgenstein mantém ainda o ponto de vista mais forte de que o conhecimento de provas é *independente* em um grau

¹⁷⁸ Ou, ainda metaforicamente, que quanto mais detalhado for o mapa em termos de exposição das relações formais entre os pontos que conecta, mais ele servirá à função de habilitar quem o compreende a percorrer o espaço simbólico ou conceitual por ele representado.

significativo de crenças sobre configurações particulares. Ainda assim, não é como se fosse possível aprender [*to learn*] uma prova sem *qualquer* apelo a tais configurações. Ademais, algumas das citações acima podem elas mesmas sugerir que “grasping a proof” ao menos indiretamente inclui uma referência a nosso conhecimento de *tokens*. (Stillwell, 1992, p. 131-2)

Nesse sentido, ao destacar a importância do processo de aprendizado de provas, uma das diferenças positivamente significativas de Stillwell com relação a Shanker aparece: ela nos lembra da atenção, progressivamente maior conforme a filosofia madura vai tomando corpo, que Wittgenstein dedicou à descrição de provas como *práxis humanas*, coisas que aprendemos, fazemos, construímos, repetimos. Isso sem contar que, claro, também podemos analisá-las matematicamente.¹⁷⁹

O problema parece ser que, mesmo destacando o aspecto antropológico das práticas de prova, ao intentar escapar dos problemas relacionados à explicação mentalista da apreensão do significado dos termos de uma prova, e das provas mesmas, Stillwell deliberadamente desconsiderou uma das características centrais que Wittgenstein inclui dentre as notas da sinopticidade, que é afinal um importante critério para a distinção entre prova e experimento: a *facilidade* da reprodução de que trata **P₂**. Ainda no primeiro parágrafo da terceira parte das RFM Wittgenstein anota:

‘Uma prova matemática deve ser sinóptica.’ Apenas **uma estrutura cuja reprodução é uma tarefa fácil** é denominada “prova”. Deve ser possível decidir com certeza se realmente temos a mesma prova duas vezes. A prova deve ser uma configuração cuja exata reprodução pode ser certa. Ou, novamente: **devemos estar certos de que podemos reproduzir o que é essencial à prova**. Ela deve, por exemplo, poder ser escrita com duas caligrafias ou cores diferentes. **O que conta na reprodução de uma prova não é em nada similar à reprodução da sombra de uma cor, ou de uma caligrafia.**

Deve ser fácil escrever exatamente essa prova duas vezes. E isso é onde uma prova escrita tem vantagens com relação a um desenho. O essencial ao último tem normalmente sido mal compreendido. O desenho de uma prova euclidiana pode ser inexato, no sentido de que a linha reta pode não ser muito reta, os segmentos dos círculos não exatamente circulares, etc, etc, e ao mesmo tempo o desenho é ainda

¹⁷⁹ Apesar de que nesse caso Wittgenstein certamente julga que se trata de fazer “mais” matemática, e não propriamente de *metamatemática*, tampouco com um legítimo status fundacional – um dos pontos principais de diferenciação de sua filosofia da matemática: o anti-fundacionalismo.

uma prova exata; e disso pode se ver que esse desenho, e.g, não demonstra que essa construção resulta em um polígono com cinco lados iguais; que o que é provado é uma proposição da geometria e não uma sobre propriedades do papel, compasso, régua e caneta.

[Conexão com: prova como *imagem* de um experimento] (RFM, III, §1, grifos nossos)

A autora utilizou, portanto, para escapar ao mentalismo, uma estratégia de dupla desconsideração: por um lado, de um aspecto tão repetidamente enfatizado por Wittgenstein como o da *facilidade da reprodução* de uma prova sinóptica;¹⁸⁰ por outro, deflacionou a importância da ênfase em *ver* conexões, na medida em que o ver em questão poderia ser pensado como um ato meramente mental e privativo ao sujeito que prova. Com isso, entretanto, a autora acabou perdendo a oportunidade de sublinhar algo bastante relevante. Não somente que as análises de Wittgenstein sobre provas, compreensão e conhecimento matemáticos – sua filosofia da matemática, enfim – possuem afinidades vigorosas com a tradição do conhecimento simbólico (como atestam ao menos a passagem do TLP com a qual abrimos o capítulo e o §193 das IF citado acima). Faltou ainda notar que o destaque desse vínculo pode ser a chave para mostrar a relevância da perspectiva wittgensteiniana para o esclarecimento das discussões em torno do T4C. Se a sinopticidade for entendida do modo como estamos sugerindo, uma prova é sinóptica se puder ser *vista como* uma estrutura simbólica (um mapa no sentido topológico, que mostra relações internas).

Toda a insistência na *Übersichtlichkeit* de provas ao longo das RFM participa do problema geral de distinguir processos matemáticos de processos empíricos naquilo que as proposições típicas de cada domínio se diferenciam primordialmente enquanto manifestações de nossa linguagem. As proposições da matemática não têm por função, no interior da matemática, a descrição de seja o que for, embora sirvam, em sua “vida civil” (suas aplicações), para descrever a realidade. As proposições empíricas, a seu turno, referem e são utilizadas para descrever seja o que for, por exemplo, os eventos envolvidos em experimentos nas quais ocorrem.

¹⁸⁰ Ao caracterizar a noção de sinopticidade como noção puramente lógica ou formal, no que insiste, como Shanker e Stillwell, em eliminar elementos epistemológicos da discussão de Wittgenstein sobre provas, Mühlholzer destaca a facilidade da reprodução como nota característica da *Übersicht* de provas. Sua caracterização contempla: (S₁) *Reproduzibilidade*; (S₂) *Facilidade* de (S₁); (S₃) Certeza na decisão sobre a *identidade* da reprodução; (S₄) Reproduzir uma prova é como *reproduzir uma imagem*. (Mühlholzer, 2005, p. 59)

É somente quando as provas da matemática pura são tomadas como manifestações de uma linguagem entendida como sistema de representação e descrição de um domínio de objetos¹⁸¹ que se pode com mais facilidade cair em confusão e tentar sustentar que uma sentença como “Todo mapa planar normal é admissivelmente quatro-colorível” faz parte do domínio descritivo da linguagem,¹⁸² ou que o processo de sua prova é experimental. Mostrar os equívocos envolvidos em uma tal concepção é uma das principais tarefas que Wittgenstein tomou como suas ao longo das reflexões sobre matemática. Exemplos desse gênero de concepção são mencionados em passagens como a seguinte:

De modo bastante bruto – o mais bruto possível – se eu quisesse dar a alguém uma pista grosseira para a diferença entre uma proposição de experiência e uma proposição matemática, diria que podemos sempre afixar à proposição matemática uma fórmula como “por definição”. O número de tal-e-tal é idêntico ao número de tal-e-tal: de experiência ou matemática? Pode-se afixar à proposição matemática “por definição”. Isso gera uma modificação categorial. Se você esquece isso, fica com uma impressão completamente errada do procedimento. O “por definição” sempre se refere a uma imagem [*picture*] guardada nos arquivos. – Se esquecemos disso **caímos no estranho problema de perguntar-se acerca de que é a matemática** – e alguém responde que é sobre números. Surge então outro alguém para dizer que não é sobre números, mas sobre numerais; pois números parecem coisas muito misteriosas. E então fica parecendo que proposições matemáticas são acerca de rabiscos no quadro-negro. Isso deve parecer ridículo mesmo para aqueles que o sustentam, mas eles o dizem porque não parece haver outro jeito. – Estou tentando mostrar de um modo muito geral como a compreensão equivocada [envolvida] na suposição de que proposições matemáticas sejam proposições de experiência conduz à compreensão equivocada de que uma proposição matemática é sobre rabiscos no quadro-negro. (LFM, XII, p. 112)

Nessa passagem, além da conhecida crítica de Wittgenstein ao modo realista de conceber a matemática – como um domínio descritivo de entidades independentes, o que gera a também criticada imagem do matemático como um descobridor – percebe-se claramente uma tendência ao que se poderia chamar de convencionalismo em sua posição: aplicando o que está dito ali ao caso da prova do T4C poderíamos dizer que todos os conceitos envolvidos no enunciado do teorema são determinados ou definidos por estipulação ou convenção. Desse

¹⁸¹ Sejam mentais ou exteriores à mente, como o platonismo de Hardy, constantemente lembrado por Wittgenstein tanto nas LFM quanto nas RFM, sustentava. (Cf. Hardy, 1929, p. 18)

¹⁸² Cf., por exemplo, a posição de Cohen, citada na nota 162 acima, de acordo com a qual “o trabalho de Appel e Haken sobre o Problema das Quatro Cores remonta a uma confirmação de que um cartógrafo com apenas quatro potes de tinta não vai ficar sem trabalho”.

modo, o alegado estatuto experimental da prova do teorema deixa de ser relevante a partir do momento em que se reconhece que se trata de relações entre conceitos *a priori*, e não empíricos ou com referência na intuição (para além da intuição fornecida pelos próprios conceitos, pela própria linguagem construída para a elaboração da solução do problema, o sistema de prova dentro do qual está construída a prova do teorema).

A autora considera o apelo de Detlefsen & Luker à ideia de que as provas são “auto-suficientes” como um dos problemas centrais de seu “anti-apriorismo”. O tipo de alegações empíricas que os autores atribuem ao resultado de Appel e Haken seri, assim, equivocado. Stillwell está se referindo aos pontos (c) e (d) dos quais tratamos no capítulo anterior, e que, de acordo com ela, justamente introduzem desnecessários tópicos epistemológicos na discussão:

Detlefsen e Luker estão sugerindo que um computador (racional) não pode **ser convencido de que uma construção C estabelece o resultado R** a não ser que ele ou ela **acreditem** em ambos: que nenhum erro aritmético ocorreu em C e que, na linguagem pertinente, o resultado obtido ou encontrado em C é “R”. (...) [E] parecem estar corretos em afirmar que a crença **de que** uma construção específica é uma prova – *se* essa espécie de crença é possível – repousa em crenças empíricas. Nesse caso eles ainda estariam corretos em que provas auto-suficientes – *se* provas forem construções específicas – possuem conteúdo empírico. (Stillwell, 1992, p. 125)

Stillwell concede aos seus oponentes que Wittgenstein não identificaria a convicção *de que* uma construção é uma prova com “a crença em construções específicas” – o que contrariaria seu ponto **P₃**. As duas abordagens poderiam ser harmonizadas, assim, no que se refere à ideia de que provas são autônomas, pois uma prova *não precisa de nada exterior à ela para gerar convicção*, para usar uma frase de Tymoczko. Sabe-se que desde o *Tractatus* Wittgenstein atribuiu às proposições e provas da lógica e da matemática uma autonomia com relação à realidade, no sentido de não possuírem conteúdo descritivo, como as sentenças empíricas.¹⁸³ O problema é, para Stillwell, que ao mesmo tempo em que acionam

¹⁸³Mais tarde, por uma série de transformações em seu pensamento – diretamente ligadas aos destinos das ciências formais ao longo da década de trinta – a autonomia da matemática foi projetada na ideia de autonomia da gramática mesma. Stenlund mostra detalhadamente, na segunda seção no artigo referido na nota 170 as afinidades entre a noção wittgensteiniana de gramática e sua concepção de geometria: “Suas ideias sobre a natureza da gramática influenciaram seus pontos de vista sobre geometria, mas a influência o estímulo no sentido oposto é ainda mais importante: a geometria é frequentemente usada como modelo para a gramática” (Stenlund, 2012, p. 140).

a ideia de autonomia de provas, Detlefsen e Luker sustentam a *identificação entre cálculos/provas calculatórias com experimentos*.¹⁸⁴ Desse modo, os autores geram uma tensão wittgensteinianamente insuperável: em que sentido uma prova extremamente calculatória como a do T4C poderia independer de conteúdos descritivos (e de condições empíricas) e ao mesmo tempo ser experimental?

Essa seria, então, a fonte dos equívocos encontrados nas abordagens tanto de Tymoczko quanto de Detlefsen & Luker: ao colapsar provas com experimentos os autores estariam subcrevendo ao equivocado pressuposto de que aquilo de que tratam as provas matemáticas são objetos descritíveis (como mapas geográficos, por exemplo, ou montanhas ou cavalos), e não relações conceituais e simbólicas, definidas e manipuladas em sistemas de convenções ou estipulações.

É claro que na medida em que se podem mostrar interessantes vínculos da filosofia da matemática de Wittgenstein com a tradição do conhecimento simbólico (algo que Stillwell não faz, mas no que estamos seguindo a Stenlund)¹⁸⁵, não procede afirmar que Wittgenstein desconsidera a importância de *um certo tipo de visualização* envolvido nas atividades de cálculo e prova – o “ver regrado” dos símbolos e conceitos com os quais se calcula ou prova. E nem cremos que seja a esse tipo de afirmação que Stillwell subscreva, embora afirme que “se a construção que serve a esse propósito [servir como o objeto ‘imaginado’ do ato]¹⁸⁶ é percebida no espaço ou imaginativamente visualizada, claramente, não afeta o ponto.” (Stillwell, 1992, p. 132) A autora pretende tão somente deflacionar o aspecto-figura das provas em favor de seu aspecto-regra-ação – ou, como diríamos, não deixar que a imagem das provas como objetos se sobreponha à imagem das provas como atos guiados por regras.

A plausibilidade desse movimento de esvaziamento do aspecto-figura está justificada, para Stillwell, na medida em que com ele é possível uma “reconciliação da aparente visão ‘dual’ que Wittgenstein possui das provas:

¹⁸⁴ Cf. por exemplo, Detlefsen & Luker, 1980, p. 811: “O que estamos dizendo aqui sobre computação pode, certamente, ser generalizado para outros elementos da construção da prova [*proof-construction*]. Se uma prova é considerada como um *self-sufficient epistemological packet*, então reflexões sobre a confiabilidade de *qualquer* tipo de passo dedutivo (*não* apenas passos computacionais utilizados na construção da prova) terão de ser consideradas uma parte da prova caso forem necessários para produzir convicção.”

¹⁸⁵ No sugestivo artigo “Wittgenstein and Symbolic Mathematics” (no prelo do volume 33 de *O que nos faz pensar*), ao qual o autor gentilmente concedeu acesso.

¹⁸⁶ No sentido de ser uma imagem, como uma fotografia. Ou, como Wittgenstein chegou a dizer: “como uma imagem cinematográfica.” (RFM, III, 22)

provas como padrões (a “rigidez do ‘deve’ lógico”) e provas como um fenômeno prático e variável.” (*loc. cit.*) O problema aqui parece ser que se a dualidade da perspectiva de Wittgenstein é apenas aparente, não haveria porque tentar conciliá-la. Nesse sentido, seria mais razoável tentar mostrar como um fenômeno prático e *variável* pode “possuir a dignidade de uma regra” (RFM, I §165).

É interessante, nesse sentido, observar a compatibilidade entre o apriorismo de Wittgenstein tal como elaborado por Stillwell e a concepção funcional de *a priori* de Pap. Destacar a importância atribuída por Wittgenstein ao fenômeno do aprendizado de uma prova (algo que ocorre apelando-se a configurações simbólicas específicas), como faz Stillwell, corresponderia a descrever a origem empírica de nosso conhecimento de proposições que funcionam logicamente como regras em determinados contextos. Wittgenstein observou explicitamente diversas vezes que as duas coisas: que provas podem funcionar como experimentos e que experimentos podem funcionar com provas. Exemplos da primeira observação, relacionados ao ponto **P₄** de Stillwell (a possibilidade, interdita aos experimentos, de que provas sejam realizadas na imaginação – “de cabeça”), encontram-se, por exemplo, na primeira anotação em que Wittgenstein aciona a distinção prova *versus* experimento nas RFM:

Imagine agora que todo esse processo, esse experimento com cem bolinhas de gude [descrito na primeira parte da anotação], fosse filmado. O que vejo agora na tela certamente é não um experimento, porque a imagem de um experimento não é ela mesma um experimento – Mas eu vejo a coisa ‘matematicamente essencial’ do processo na projeção também! Pois aqui aparecem primeiro 100 pontos, e então eles são arranjados de dez em dez, e assim por diante. Então eu posso dizer: a prova não serve como um experimento; mas serve como imagem do experimento.” (RFM, I, §36)

O caso da prova do T4C pode ser considerado, então, como passível de ser realizado “imaginativamente” (mesmo se quisermos conceder relevância aos cálculos computacionais em sua dimensão experimental, causal). É preciso considerar que de acordo com a ideia da máquina-come-símbolo tal como formulada nas IF, o caráter empírico da máquina não é relevante para a discussão. Nesse sentido, ainda que comumente se denominem de “experimentos computacionais” os procedimentos de “teste de casos” como os envolvidos na prova do lema principal do T4C, são cálculos, manipulações simbólicas regradas

para as quais as relações causais em questão nos corpos ou nas máquinas que calculam não fazem diferença.

Exemplos do segundo tipo de observação de Wittgenstein (de que experimentos podem servir como provas) são os assim chamados experimentos didáticos, mencionados por Wisdom na lição X das LFM:

Você diz que olhar uma equação em um livro é um experimento. Claro, pode ser um experimento, do mesmo modo como **qualquer coisa pode ser um experimento**. Mas por que você chama de experimento nesse caso?

Wisdom: Crianças em um laboratório estão fazendo experimentos, e contudo se elas alcançam determinado resultado dizemos “Você deve ter feito alguma coisa errada.”

Wittgenstein: Bem, é um bom teste para se uma coisa é um experimento ou um cálculo perguntar-se pelo caso de ser tão bom quanto se não realizarmos o experimento, mas apenas desenhar uma imagem dele. (LFM, X, p. 100)

Como vemos, Wittgenstein estabelece como diferença entre o caso de experimentos “genuínos” e cálculos a capacidade de ser repetíveis do mesmo modo como se repetem ou copiam imagens, como sugere a seu modo Stillwell em seu ponto **P₄**. Ainda assim, nos parece que ao insistir na dualidade da concepção de prova de Wittgenstein, Stillwell não destacou algo importante: que *não é ao mesmo tempo* que uma prova pode ser vista como padrão e como algo particular, mas que se trata de uma distinção funcional.¹⁸⁷ Um fenômeno variável, como chama Stillwell, a prova em seu aspecto-instância pode ser solidificado como regra em virtude do uso que fazemos dela. Aliás, mesmo com relação ao uso de figuras em provas Wittgenstein, em conversa com Turing, sustenta uma distinção de tipo funcional, quando afirma, respondendo à afirmação de Turing de que, à época, muitos “matemáticos treinados” guardavam algum preconceito com relação a provas com figuras:

A figura da prova Euclidiana como usada na matemática é tão rigorosa como a escrita – porque nada tem a ver com seu desenhada bem ou mal. [...]

[*Referindo-se a uma figura desenhada*] Isso está perfeitamente bem. – É realmente um preconceito que essas figuras sejam menos rigorosas:

¹⁸⁷ Cf. LFM, X, p. 94 (diálogo com Turing): “I cannot make the result of the experiment at the same time into the result of a calculation. If the result is the result of the calculation, I have already fixed what I call ‘obeying the rules’ by my calculation.”

parcialmente porque o papel dessa figura é confundido com a construção de um pentágono mensurável – **confundindo o desenho usado como símbolo com o desenho como produzindo determinado efeito visual**. (É verdade que eu posso desenhar tão mal a ponto de você não conseguir ver do que se trata. Isso é análogo ao caso de um matemático que não sabe com o que uma elipse se parece e tem de perguntar a seu filho. Ele perde o simbolismo se ele não sabe com o que se parece uma elipse. Como se ele não soubesse com o que se parecem *erres* e *eles* [*r's* and *l's*] – ainda mais sublime.) Essa é uma das razões para o preconceito contra figuras: a outra é que há menos oportunidade para a generalidade. (LFM, XIV, p. 134)

Parece-nos que algo similar poderia ser dito acerca do uso do computador como máquina: quem, como Tymoczko, sustenta que seu uso introduz a possibilidade de que uma falha física interfira no processo de cálculo está confundindo o uso da máquina-como-símbolo com o uso da máquina como produzindo determinados efeitos físicos.

Há ainda um ponto não destacado pela autora quanto à distinção prova *versus* experimento em Wittgenstein: quando se realizam experimentos pretende-se obter uma *previsão* acerca de como determinados fenômenos naturais ocorrerão, enquanto que a realização de provas não é prospectiva nesse sentido. Não repetimos uma prova ou um cálculo para saber se algo ocorrerá, mas simplesmente para saber ou mostrar que determinadas relações conceituais ou calculatórias ocorrem, no sentido de serem construtíveis a partir das estipulações que constituem o sistema no qual ocorrem. Outra passagem das lições de 1939, dessa vez um diálogo com Turing (anterior às supracitadas passagens), é bastante ilustrativa do ponto:

Turing: Pode-se comparar um experimento em física e um cálculo matemático. Em um caso você diz para um homem ‘Coloque esses pesos no prato da balança de tal e tal modo, e veja para que lado o fiel pende’, e no outro caso você diz ‘Pegue essas figuras, olhe em tais e tais tabelas, etc, e veja qual o resultado.’

Wittgenstein: Sim, ambos parecem bastante. Mas qual é a similaridade?

Turing: Em abos os casos você quer **ver o que acontece no final**.

Wittgenstein: É isso que se quer ver? No caso matemático quer-se ver qual marca de giz o homem fez? – Há certamente algo esquisito aí. – Quer-se ver o que se obtém multiplicando ou o que ele obtém se ele multiplicar corretamente – qual o resultado correto? (LFM, X, p. 96)

De certo modo essa passagem nos auxilia a completar o comentário dos pontos de distinção de Stillwell, pois nela aparece justamente uma diferença apontada em **P₅**. Afirmamos acima, ao iniciar o comentário, que o aspecto normativo da linguagem característico, dentre outros, do domínio matemático implica que as ações desse âmbito são anuláveis em caso de não cumprirem as assim chamadas regras habilitantes. A ação mesma de multiplicar implica, de acordo com a pergunta final de Wittgenstein na passagem acima, que um erro anularia o procedimento: não seguir as regras de multiplicação implica em não multiplicar (e não em “multiplicar errado”). É, portanto, sempre em virtude do fato de que cálculos e provas são atividades convencionalmente regradas que desde uma perspectiva wittgensteiniana se poderia afirmar que não há, no caso da prova do T4C, qualquer possibilidade de que erros ocultos “ameacem” ou sejam capazes de implicar numa modificação da categoria de prova em direção de uma aproximação à de experimento.

Vejam os mais detidamente, na seção seguinte, como a perspectiva wittgensteiniana que se pode erigir a partir das considerações precedentes aplica-se às conclusões de Tymoczko. Entendemos que essa perspectiva tem como aspectos centrais: a consideração da matemática como prática humana, sujeita, portanto, às regras e convenções estabelecidas pela comunidade de utilizadores da mesma; que essas convenções, por sua vez, não são sempre resultados de deliberações ou decisões *strictu sensu*, mas mostram-se nas práticas matemáticas elas mesmas, sejam da matemática aplicada ou da matemática pura; cabe por fim sublinhar em que consiste para Wittgenstein o trabalho do filósofo frente a novidades como a representada pelo T4C (e às práticas matemáticas em geral).

Há uma espécie de tensão implícita entre “o que dizem (e fazem) os matemáticos” e “o que dizem (e podem dizer)” os filósofos sobre isso na abordagem de Tymoczko. À pergunta pela possibilidade de aceitação do trabalho de Appel e Haken como trabalho matemático nos parece que Wittgenstein responderia dizendo que não cabe ao filósofo tomar qualquer partido. Se o fizesse, deveria ser desde um ponto de vista matemático e não filosófico. Uma postura filosófica fortemente não-revisionista com relação à matemática (e aos usos da linguagem em geral), portanto, e bastante clara no famoso parágrafo das IF, onde Wittgenstein afirma:

A filosofia não deve, de forma alguma, interferir no uso efetivo da linguagem; ela pode, no fim, apenas descrevê-lo.
Pois também não pode fundamentá-lo.

Deixa tudo como está.

Deixa também a matemática tal como está, e nenhuma descoberta matemática pode fazê-la avançar. Um “problema preponderante em lógica matemática” é para nós um problema da matemática como qualquer outro. (IF, § 124)

6.3

As conclusões de Tymoczko à luz da perspectiva wittgensteiniana

Dissemos acima que ainda nos resta avaliar diretamente a conclusão do AIE de Tymoczko (δ) – de que o conceito tradicional de prova precisa ser modificado a partir do caso da prova do T4C. Ainda no terceiro capítulo sugerimos que essa conclusão fosse desdobrada em duas. A modificação conceitual pretendida por Tymoczko teria, então, que:

(δ_a) contemplar a empiricização de nosso modo de conhecer matematicamente, vinculada ao uso de um instrumento computacional e;

(δ_b) adequar-se à possibilidade de erro advinda da introdução de metodologia experimental.

Ora, talvez falar da empiricização dos modos de conhecer matematicamente não fosse problemático para Wittgenstein na medida em que para o filósofo tanto cálculos como provas são atividades que aprendemos a realizar à medida em que aprendemos a nos orientar num determinado domínio simbólico-sistemático (a aritmética elementar, por exemplo). Temos insistido em que o apriorismo de Wittgenstein, na medida em que se pode equiparar à concepção funcional de *a priori* de Pap, não se adequa ao modelo kripkeano de análise ao qual subscreve Tymoczko, ou seja, que não é a questão da origem mas a do uso de proposições e provas matemáticas a que institui suas diferenças fulcrais para com as proposições e experimentos típicos das ciências naturais.

Quanto ao primeiro desdobramento da conclusão de Tymoczko, portanto, parece razoável pensar que Wittgenstein não estaria de todo em desacordo, mas talvez observasse que o uso do instrumento computacional de que fala Tymoczko não equivale meramente ao uso de uma máquina física, e sim de uma máquina-como-símbolo. Nesse sentido, ainda que o computador seja um instrumento que pode derreter ou quebrar, já o sabemos, não é esse o aspecto relevante para a compreensão do que ocorre na prova do lema que dele se utiliza mas tão somente

seu aspecto de máquina simbólica cujas operações estão, *in advance*, todas determinadas. As repetições dos cálculos não foram, como em repetições de experimentos, realizadas com o intuito de ver *se* o computador estava “seguindo regras” corretamente, mas simplesmente se estava simulando corretamente o seguir regras *que* qualquer um que compreenda o algoritmo de descarga pode executar. Nesse sentido se poderia dizer que temos, coletivamente, controle completo do procedimento, não podendo haver surpresas (como porventura podem haver em experimentos) no caso de cálculos e provas.

Já quanto ao segundo desdobramento da conclusão nos parece mais claro que na medida em que o uso da máquina computadora realizado na prova do T4C é um *uso a priori*, a questão da possibilidade de erro no procedimento ficaria interdita desde o ponto de vista de Wittgenstein. Como vimos através de Stillwell, ao considerar que a matemática faz parte do domínio prescritivo ou normativo da linguagem, Wittgenstein concorda que erros nesse âmbito (de prova e cálculo). implicam na anulação dos procedimentos. Isso quer dizer que a possibilidade de erro é de todo excluída de tais processos, justamente em virtude de sua promoção à categoria de padrão.¹⁸⁸ Da *decisão*, poderíamos dizer, em assim aceitá-lo, o único tipo de decisão “livre” nas atividades de cálculo e prova (já que o seguir de regras é de tipo cego).

Há que se considerar, por fim, as duas últimas das “crenças comuns”¹⁸⁹ sobre a matemática que, como consequências deriváveis de seu AIE, seriam ameaçadas pelo caso do T4C, quais sejam, as crenças de que:

3. A matemática, de maneira oposta às ciências naturais, baseia-se apenas em provas, enquanto as ciências naturais fazem uso de experimentos.
4. Teoremas matemáticos são dotados de um grau de certeza que nenhum teorema da ciência natural pode alcançar. (Tymoczko, 1979, p. 63)

Quanto à crença 3, seguimos Jacques Bouveresse em sua observação de que não importa, para Wittgenstein, se conhecemos uma proposição matemática

¹⁸⁸ É interessante observar que no § 657 de *Sobre a certeza* Wittgenstein parece concordar com a distinção entre erros relevantes e irrelevantes que acionamos ao longo de nosso trabalho: “Há uma diferença entre um erro para o qual está reservado um lugar no jogo e uma completa irregularidade que ocorre excepcionalmente”.

¹⁸⁹ As duas primeiras, lembramos: “1. Todos os teoremas matemáticos são conhecidos a priori; 2. As matemáticas, de maneira oposta às ciências naturais, não possuem conteúdo empírico;”

pela experiência ou pelo “mero raciocínio”. Independentemente das razões que nos conduzam a reconhecer uma proposição como regra, afirma Bouveresse, “não resta a menor dúvida de que a partir do momento em que a adotamos como regra, concedemos a ela um estatuto categorialmente diferente do de proposição empírica” (Bouveresse, 1988, p. 202).¹⁹⁰

Nesse sentido se poderia ampliar nossa leitura sobre a distinção entre prova e experimento como distinção funcional à distinção entre os domínios *a priori*/normativo e *a posteriori*/descritivo da linguagem: é uma distinção quanto ao uso, não quanto aos modos de conhecer. Além do mais, a afirmação de que nas ciências naturais só se faz uso de experimentos, como vimos ainda no terceiro capítulo, parece eliminar os casos de convencionalização de resultados experimentais ou empíricos em regras de descrição em investigações da física clássica.

Já quanto à última “crença ameaçada” de Tymoczko nos parece que Wittgenstein não concordaria que se trata de uma diferença de grau de certeza, mas de tipo lógico. Veja-se, a título de exemplo, o parágrafo 167 de *Sobre a certeza*:

É claro que nem todas as nossas proposições empíricas têm o mesmo estatuto, já que se pode formular uma proposição e convertê-la de proposição empírica em norma de descrição.
Pense-se na investigação química. Lavoisier faz experiência com substâncias no seu laboratório e conclui que acontece determinado fenômeno quando há combustão. Não diz que poderia acontecer de outro modo, noutra ocasião. (SC, §167)

Poderíamos multiplicar enormemente as citações de aforismos dessas anotações derradeiras como suporte textual para a leitura de acordo com a qual a caracterização da diferença entre “certezas” matemáticas e empíricas de Tymoczko é, para Wittgenstein, equivocada. Mencionaremos, entretanto, apenas mais duas observações, que compõem a sequência final desse derradeiro escrito, sendo a última delas a mais relevante para nosso estudo de caso:

655. À proposição matemática foi atribuído, como que oficialmente, o caráter de incontestabilidade. Isto é: “Questionem outras coisas; *esta* é inamovível – é uma dobradiça em torno da qual se podem processar nossas discussões.”

657. Poderia dizer-se que as proposições da matemática estão petrificadas. [...]

¹⁹⁰ Mais recentemente essa leitura “não-cognitivista” do apriorismo de Wittgenstein foi sugerida de modo menos radical por Mathieu Marion (Cf. Marion, 2011)

671. Vou de avião para um local do mundo onde as pessoas têm apenas uma informação vaga, ou mesmo nenhuma, acerca da possibilidade de deslocamentos em aviões. Digo-lhes que acabo de vir de avião de... Perguntam-me se não poderei estar enganado. Têm, obviamente, uma impressão errada de como é que a coisa aconteceu. (Se eu fosse transportado dentro de uma caixa, seria possível que me enganasse sobre a maneira que viajara.) Se eu simplesmente lhe disser que não posso enganar-me, é provável que isto não as convença; mas convencerá se eu lhes descrever o processo como vim. Então, certamente que não suscitarão a possibilidade de um erro. Mas, apesar de tudo – mesmo se confiarem em mim –, poderiam acreditar que eu sonhei ou que uma *magia* me fez acreditar nisso.

Tymoczko, nos parece, ao subscrever sua investigação sem mais ao quadro do quase-empirismo, especialmente o de Lakatos – para quem as proposições da matemática não são senão aproximativamente certas, podendo ser demovidas de sua função normativa, “quase” do mesmo modo que hipóteses científicas podem ser demovidas quando da apresentação de contra-exemplos – acabou, assim nos parece, comparando certezas que são, para Wittgenstein, incomparáveis.

Ao afirmar que o trabalho não-inspecionável do computador nos priva da certeza tipicamente associada às proposições matemáticas, os mais prementes exemplos de proposições necessárias, agiu como as pessoas do exemplo de Wittgenstein, pois imaginou que a utilização do computador equivale a uma viagem dentro de uma caixa, que impossibilitaria o viajante de saber como chegou ao destino. Tentamos mostrar, ao longo de nosso trabalho, que a posse de uma correta descrição do procedimento computacionalmente executado poderia desfazer essa espécie de ilusão de que o computador é como uma caixa-preta que não sabemos o que contém, nem como funciona, e que, assim, a prova que dele depende representa uma premente necessidade de revisão ou modificação do conceito de prova. Faltou a Tymoczko, e àqueles que o seguiram nos principais movimentos de seus argumentos, atentar menos para o delineamento de um conceito de prova propício tão somente à finalidade legislativa de sua investigação e mais para as manifestações usuais do conceito, suas aplicações, nos variegados contextos e práticas nos quais ocorrem. Parece, por fim, que a familiarização da audiência filosófica com os conceitos e métodos constitutivos do domínio matemático da linguagem, das práticas dos quais se pretende dar conta, é um pressuposto retórico indispensável à investigação filosófica.

6.4

Notas finais: sobre o lugar a filosofia da matemática de Wittgenstein no panorama tradicional

Fez parte de nosso modo de apresentar o AIE de Tymoczko, no terceiro capítulo, uma tentativa de delinear, ainda que de modo bastante geral, o quadro teórico a partir do qual o argumento e suas consequências foram construídos. Mostramos, então, que o clima de sua abordagem caracterizava-se por fazer frente ao assim chamado fundacionalismo em filosofia da matemática, tendo o próprio autor qualificado seu texto como um estudo de caso capaz de exemplificar teses anti-fundacionalistas, similares às do falibilismo ou quase empirismo de Lakatos e Putnam, representantes do “renascimento” do empirismo em filosofia da matemática em fins da década de 1970.

De outra parte, após apresentarmos o modo como tópicos a filosofia da matemática de Wittgenstein foram introduzidos nas discussões sobre o AIE, realizamos mais uma vez o movimento de inversão de perspectiva através do qual contrastamos a primeira premissa do argumento com a concepção funcional de *a priori* de Pap. No presente capítulo, tentamos mostrar que de um ponto de vista wittgensteiniano alguns tópicos daquelas discussões podem ser esclarecidos – como a distinção entre tipos de *surveyability* e a ênfase no caráter prático, normativo e criativo da linguagem que a matemática manifesta – com o que por assim dizer matizamos a segunda premissa do argumento de Tymoczko, bem como sua conclusão.

Gostaríamos então de realizar um rápido comentário acerca do lugar da filosofia da matemática de Wittgenstein no quadro das filosofias ou “escolas” filosóficas que constituem o contexto de discussões no seio do qual ela mesma amadureceu, e do qual a seu modo participou. Para tanto, remetemos ao segundo capítulo do trabalho onde fornecemos, com intenções metodológicas, algumas distinções, como aquela entre provas *simpliciter*, formais e por computador (ao que mais tarde acrescentamos a categoria das provas *sobre* computadores) e a distinção entre provas concebidas como atos, objetos e traços.

Sobre a primeira dessas distinções, notamos que ela deriva do esforço em mostrar que algumas exigências que se costuma elaborar com relação a provas, como a da inspecionabilidade calculatória, não se aplicam a toda e qualquer manifestação simbólico-discursiva que nomeamos como prova. A partir da análise

do conceito de prova de Chateaubriand, então, construímos a distinção anotando que mesmo para um filósofo (e matemático) fundacionalista como Hilbert, a referida exigência não se aplica ao domínio das provas *simpliciter* mas ao das provas de sua metamatemática. No caso de Wittgenstein, vale mais uma vez de observar, essa modalidade de *surveyability* possui uma função específica na economia de suas reflexões, qual seja, a de servir como um dos critérios de distinção entre provas e experimentos – e embora seus movimentos de pensamento com relação ao tópico devam bastante aos de Hilbert, não é menos verdade que devem igualmente aos movimentos de pensamento dos demais fundacionalistas. Frege, Russell e Brouwer, para citar os representantes do platonismo e do intuicionismo, não são menos importante para o pensamento do vienense do que Hilbert, quando não pelo com eles Wittgenstein concordou, certamente pelos pontos de divergência que delineou ao elaborar sua filosofia da matemática.

Como não nos incumbe traçar aqui um mapa detalhado dessas relações, observaremos apenas, a partir do supramencionado texto de Stenlund sobre Wittgenstein e a tradição do conhecimento simbólico, que com relação ao vocabulário típico do fundacionalismo,¹⁹¹ a filosofia da matemática de Wittgenstein não possui um lugar confortável,¹⁹² principalmente pela recusa em aceitar que a matemática como prática necessite de algum tipo de fundamentação teórica a ser fornecida pela lógica matemática. De acordo com Stenlund considerar a matemática com *práxis* é, para Wittgenstein, muito mais importante do que concebê-la como teoria – o que explicaria a utilização cada vez mais articulada ao longo de seu pensamento da noção de jogo como modelo

¹⁹¹ No qual figuram termos praticamente interdefiníveis (alguns dos quais inevitavelmente utilizamos) como platonismo, realismo, formalismo, intuicionismo, construtivismo, finitismo, verificacionismo, convencionalismo e suas variações (forte, fraco, estrito, mitigado).

¹⁹² Algo que Baker e Hacker já haviam formulado, embora no contexto mais geral de seu comentário às *Investigações filosóficas* (o capítulo final, “Grammar and necessity”), onde elencam seis *leitmotivs* que determinam seu ponto de vista: (1) Proposições necessárias são heterogêneas (no caso da matemática: tanto tautologias quanto equações – e teoremas); (2) Proposições necessárias expressam relações internas (conceituais); (3) O prolífico esclarecimento da distinção entre proposições necessárias e contingentes depende de focalizar a atenção aos seus usos (geralmente mascarados pelas suas formas); (4) A atenção ao uso diferencia a distinção de Wittgenstein das demarcações tradicionais (diríamos: por seu caráter funcional); (5) Uma reorientação da associação tradicional entre verdade necessária, evidência e conhecimento; (6) O método filosófico é descritivo (de usos de expressões, de regras para seu emprego, das relações entre eles) – desse modo a filosofia não possuiria maior proximidade com a matemática do que com qualquer outra ciência, pois o que descreve é o domínio gramatical de nossa linguagem. Marion fornece, no artigo sobre sinopticidade de provas em Wittgenstein, a imagem do filósofo como um *maverick*, um dissidente em filosofia da matemática.

comparativo, não somente para as práticas matemáticas, mas para as práticas linguísticas em geral.¹⁹³

Os problemas em conceber a matemática como uma teoria no sentido da tradição da lógica formal teria sido apontado por dois célebres antecessores de Wittgenstein no que diz respeito a essa crítica, H. Hertz e H. Poincaré. Eles consistiriam basicamente em obliterar o aspecto-atividade da matemática e, assim, em compreender o simbolismo matemático como uma notação puramente tipográfica, de maneira estática – o que se reflete, observamos, no caso da noção de *Übersichtlichkeit* aplicada à notação lógica ideal de Frege (e na *perspicuity* da versão russelliana). De acordo com os representantes do realismo, como já observamos em algum momento, a notação ideal deve preservar a característica de que a cada termo das sentenças correspondam entidades (os sentidos) da proposição que a sentença representa.¹⁹⁴ Na abordagem de Wittgenstein, diferentemente, teorias científicas e sistemas matemáticos são pensados como sistemas simbólicos autônomos e independentes, em seus aspectos formais, de fenômenos empíricos (o que, observa Stenlund, de certo modo está em germe já no *Grundgedanke* do TLP, expresso em 4.0312: que constantes lógicas não representam).

Stenlund observa que não se deveria, a partir da sua aproximação da filosofia da matemática de Wittgenstein com a concepção simbólica da matemática, entender tratar-se de uma associação, digamos, isomórfica do pensamento de Wittgenstein com todos os representantes da tradição algébrica. Seu método (ou seus métodos) em filosofia – partir das situações filosoficamente incômodas na direção ao escrutínio de sua gênese, buscando dissolver as inquietações uma vez trabalhadas as dificuldades – bem como seu estilo de escrita,¹⁹⁵ não permitem uma acomodação confortável mesmo no quadro daquelas concepções que mais o inspiraram.

O que Stenlund vai destacar como ponto de contato mais prolífico da filosofia da matemática de Wittgenstein com a tradição simbólica é a ênfase na compreensão da matemática como atividade de solução de problemas. Vale notar

¹⁹³ Para uma excelente análise da função metodológica dos jogos de linguagem nas IF cf. a “Nota sobre o conceito de jogo-de-linguagem nas *Investigações*”, de Balthazar Barbosa Filho. In: *Wittgenstein no Brasil*. Darlei Dall’Agnol (org.) São Paulo: Escuta, 2008, pp. 163-190.

¹⁹⁴ Cf. nota 53 acima.

¹⁹⁵ Sobre o tópico específico do peculiar estilo de escrita de Wittgenstein cf. “A escrita poética de Wittgenstein, sua tradução”, de Helena Martins. In: *Revista Brasileira de Literatura Comparada*, v. 19, 2011, pp. 109-125.

que Stenlund caracteriza o esteio daquela tradição a partir de uma série de considerações históricas que indicam a arte analítica de Franciscus Vieta como o ponto de partida da tradição, no século XVII. Quanto ao ponto acima mencionado, de que a matemática não é bem compreendida quando tomada como teoria (dos números, por exemplo), fornecemos ainda nesse capítulo uma passagem das LFM (p. 153) que ilustra o incômodo de Wittgenstein com a ideia de que a matemática é sobre algum domínio de objetos (sejam mentais, abstratos ou sobre marcas no papel). Nesse sentido uma passagem do artigo de Stenlund é importante:

In the fourth chapter of the *Isagoge*, Vieta lays down the rules for the operation with species or forms, as well as rules for the transformation of equations. *These rules create, as Klein puts it, the systematic context which “defines” the object to which they apply.* Klein calls this system of rules “the first modern *axiom system*”, alluding to Hilbert’s axiomatic method. There is no talk here about logical demonstrations from postulates or first principles as in Aristotle and Euclid. **The analytic art of Vieta is not seen primarily as a representation of a body of truths, or a body of knowledge of some subject-matter, but in the first instance as a system of methods and techniques for solving problems**, which later develops into the analytic geometry of Descartes and the infinitesimal calculus of Newton and Leibnitz. (Stenlund, 2012b, p. 12, negritos nossos)

O ponto de vista simbólico de Wittgenstein pode ser entendido a partir de sua ênfase na matemática como atividade, sendo a visão dinâmica do simbolismo matemático, nesse sentido, uma clara consequência. Um simbolismo matemático por assim dizer toma vida, como tomam vida os sentidos das palavras e sentenças, ao ser utilizado (na solução de problemas, equações, cálculos corriqueiros ou provas de teoremas). Podemos dizer, de nosso estudo de caso, que o uso do computador compõe o sistema de métodos e técnicas para resolver o problema das quatro cores, é parte das suas condições de possibilidade quase como o simbolismo com o qual é provado.

Quando propusemos, por exemplo, que as provas como objetos (mapas) fossem associadas às provas como traços (instruções/receitas) – na medida em que ambos os pontos de vista permitem entender provas como estruturas discursivas capazes, como padrão, de orientar quem as utiliza em um determinado espaço simbólico – estávamos de algum modo articulando, sem menção à filosofia de Wittgenstein, um dos pontos que, tal como as compreendemos, suas reflexões sugerem como princípio. Nossa comparação das atividades de prova com as

atividades culinárias não tinha senão a pretensão de dizer, com nossa dicção, que mesmo as práticas discursivas da matemática, essa multicolorida variedade de técnicas de cálculo e prova, só podem ser filosoficamente bem analisadas se as contextualizarmos nos panoramas a partir dos quais se realizam, suas condições por assim dizer transcendentais.

Calcular, provar, experimentar, as atividades que investigamos desde o ponto de vista dos problemas filosóficos que pretendíamos esclarecer, constituem formas de vida de nossa cultura. Elas certamente poderiam ser diferentes de como são – podemos imaginar uma tribo que só operasse com números até sete (o resto seriam “muitos”), ou tantos outros jogos de linguagem ou formas de vida, como sugere Wittgenstein. Faltando-nos o talento para tais jogos imaginativos, gostaríamos de encerrar lembrando que, como Kant,¹⁹⁶ Wittgenstein construiu uma imagem do matemático como construtor dos objetos de seu conhecimento, como novas estradas, o matemático, afirma Wittgenstein, “inventa novas maneiras de pensar.” (LFM, XVI, 139):

(E com quantas casas e ruas é que uma cidade começa a ser cidade?)
A nossa linguagem é como uma cidade antiga: um labirinto de travessas e largos, casas antigas e modernas e casas com reconstruções de diversas épocas; tudo isso rodeado de uma multiplicidade de novos bairros periféricos com ruas regulares e as casas todas uniformizadas.
(IF, §18)

Ao filósofo restaria, na contrapartida do trabalho matemático de construir novas estradas para o pensamento, a tarefa de quem sabe percorrer, a seu modo, a cidade com a qual Wittgenstein tão felizmente comparou nossa linguagem – desenhando mapas de percursos que, talvez, não sirvam a mais ninguém além dele mesmo. Se seus desenhos acabarem ilustrando também os novos instrumentos com os quais os matemáticos abrem seus caminhos, não pareceria haver tanta novidade sob nosso sol.

¹⁹⁶ Cf. trecho da CRP citado na p. 104 acima.