

## 4 Processos Estocásticos e Simulação de Monte Carlo

O processo estocástico faz a descrição de uma variável com comportamento ao menos em parte de maneira aleatória através do tempo, onde se assume valores imprevisíveis. Pode ser citado o preço de ações como um exemplo comumente utilizado, e que pode se fazer a modelagem o utilizando como uma variável que faz movimentos com alguma tendência, mas com flutuações aleatórias ao redor desta. Dependendo de a variável tempo ser contínua ou discreta, os processos estocásticos podem ser respectivamente contínuos ou discretos.

### 4.1. Processos de Wiener

É um processo estocástico a tempo contínuo que pode também ser chamado de movimento browniano e que possui três propriedades relevantes:

- 1- O processo de Wiener é um processo de Markov, e, no entanto, a distribuição de probabilidade para  $X_{t+1}$  depende somente do ocorrido em  $X_t$ , não sendo importantes os acontecimentos antes do tempo  $t$ . Dado isso, para prever o valor futuro de uma variável, o necessário apenas é saber a sua distribuição de probabilidade e o seu valor atual.
- 2- O processo de Wiener tem incrementos independentes. A distribuição de probabilidades para as variações no processo em qualquer intervalo de tempo é independente de qualquer outra mudança em qualquer outro intervalo de tempo, ou seja,  $p(X_{t2}-X_{t1}, X_{t3}-X_{t2}, \dots) = p(X_{t2}-X_{t1})p(X_{t3}-X_{t2}) \dots$
- 3- Como terceira e última propriedade, as variações no processo em qualquer intervalo de tempo, são distribuídas normalmente, com aumento da variância proporcionalmente com o intervalo de tempo.

Se  $z(t)$  é um processo de Wiener, então:

$$\Delta z = \epsilon t \sqrt{\Delta t}$$

Em que  $\Delta z$  é igual a variação em  $z$ ,  $\Delta t$  é o intervalo de tempo e  $\varepsilon t \sim N(0,1)$ . Ademais, a variável aleatória  $\varepsilon t$  é serialmente descorrelata, ou seja,  $E(\varepsilon t, \varepsilon s) = 0$ , para  $t \neq s$ .

Quando se torna  $\Delta t$  em um intervalo infinitesimalmente pequeno, o incremento do processo de Wiener,  $dz$ , pode ser representado em tempo contínuo como  $dz = \varepsilon t \sqrt{dt}$ .

#### 4.1.1. Movimento Browniano com Drift

O processo de Wiener é estacionário e sem termo de drift. Com a adição de um crescimento de longo prazo e sua volatilidade ao processo de Wiener, é obtido um Movimento Browniano com Drift, ou mais simples ainda, Movimento Aritmético Browniano (MAB), que é representado da seguinte forma:

$$ds = \mu dt + \sigma dz$$

$$\text{em que } dz = \varepsilon t \sqrt{dt} \text{ e } \varepsilon t \sim N(0,1).$$

Considera-se relevante ressaltar que para qualquer intervalo de tempo  $\Delta t$ , a mudança em  $s$ , dita por  $\Delta s$ , é comumente distribuída com os parâmetros a seguir:

Média:

$$E(\Delta s) = E(\mu \Delta t + \sigma \Delta z)$$

$$E(\Delta s) = E(\mu \Delta t) + E(\sigma \Delta z)$$

$$E(\Delta s) = \mu \Delta t + \sigma E(\Delta z)$$

$$E(\Delta s) = \mu \Delta t$$

Variância:

$$\text{Var}(\Delta s) = E[\Delta s - E(\Delta s)]^2$$

$$\text{Var}(\Delta s) = E[\Delta s - \mu \Delta t]^2$$

$$\text{Var}(\Delta s) = E[u \Delta t + \sigma \Delta z - \mu \Delta t]^2$$

$$\text{Var}(\Delta s) = E[\sigma^2 \Delta z^2] = E[\sigma^2 \varepsilon^2 \Delta t]$$

$$\text{Var}(\Delta s) = E(\varepsilon^2) \sigma^2 \Delta t$$

$$\text{Var}(\Delta s) = \sigma^2 \Delta t$$

No entanto,  $\Delta s \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$

E a evolução desta se faz quando combinada duas parcelas.

#### 4.1.2. Movimento Geométrico Browniano

Este é o processo estocástico que mais se utiliza tanto na teoria econômica financeira quanto na prática. Considerado o que mais se adéqua para fazer modelagem de preço de ações, taxas de juros, preços de produtos e outras variáveis financeiras e econômicas. Um MGB é representado da seguinte forma matematicamente:

$$ds = \mu s dt + \sigma s dz$$

Quando se divide este modelo por  $s$  encontra-se o resultado que  $ds/s$  segue um MAB, ou em outras palavras, a variação proporcional de  $s$ ,  $ds/s$ , tem uma distribuição normal.

É com facilidade que se percebe que  $ds/s$  é o incremento no  $\ln(s)$ :

$$d(\ln s) = \frac{1}{s} ds = \frac{ds}{s}. \text{ No entanto, considerando } F = \ln s \rightarrow DF = d \ln s = \frac{ds}{s}$$

Como dito anteriormente, o incremento no  $\ln(s)$  tem uma distribuição normal. Para serem determinados os seus parâmetros utilizaremos o Lema de Itô, que tem o ditado:

“Caso um processo estocástico em tempo contínuo,  $s(t)$ , possa ter sua representação através da equação abaixo, este processo será chamado de processo de Itô, onde  $a(s,t)$  e  $b(s,t)$  são funções não aleatórias conhecidas que significam respectivamente a média (tendência) e variância,  $z(t)$  é um processo de Wiener e  $t$  é o tempo.”

$$ds = a(s,t)dt + b(s,t)dz$$

Percebe-se que o Movimento Geométrico Browniano é um caso especial do processo de Itô, onde  $a(x,t) = \mu s$  e  $b(x,t) = \sigma s$

Então, considerando uma função  $F(s,t)$ , diferenciável no mínimo duas vezes em  $s$ , e uma vez em  $t$ , o Lema de Itô indica que esta função vai seguir o processo abaixo:

$$dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial s} ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} ds^2 \right]$$

Pode-se reescrever esta equação em uma maneira expandida ao substituir ds:

$$dF = \left[ \frac{\partial F}{\partial t} + a(s,t) \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2} b^2(s,t) \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \right] dt + b(s,t) \frac{\partial F}{\partial s} dz$$

Assim, quando consideramos um Movimento Geométrico Browniano S e fazemos o uso do Lema de Itô, obtemos que  $F(s,t) = \ln s$  segue o seguinte processo:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial s} = \frac{1}{s}; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = -\frac{1}{s^2}$$

$$dF = \left[ 0 + \mu s \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{-1}{s^2} \right] dt + \sigma s \frac{1}{s} dz$$

$$dF = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Assim, fica representado que para qualquer intervalo de tempo T, a variação no  $\ln s$  é normalmente distribuída com média  $\left[ \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right] T$  e Variância  $\sigma^2 T$ .

A aproximação discreta para a equação acima é dita como:

$$\ln \left( \frac{S_{t+1}}{S_t} \right) = \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t$$

Ou

$$S_{t+1} = S_t e^{\left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t \right]}$$

Isso é explicado porque  $\Delta z$  é um processo de Wiener ( $\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$ ), e  $\varepsilon_t$  é uma variável aleatória com distribuição normal padronizada, a data t+1 equivale a  $t + \Delta t$ ,  $\Delta F = F_{t+1} - F_t = \ln S_{t+1} - \ln S_t = \ln \left[ \frac{S_{t+1}}{S_t} \right]$  e  $\Delta F$ ,  $\Delta t$  e  $\Delta z$  são as versões discretas de  $dF$ ,  $dt$  e  $dz$  respectivamente.

## 4.2. Simulação de Monte Carlo

A função de gerir risco em organizações está intrinsecamente relacionada a técnicas de prever e simular preços e outras variáveis de mercado. De maneira divergente do mercado financeiro, onde usar dados históricos e técnicas paramétricas são algo possível e benéfico, as contínuas mudanças no mecanismo e estratégia das companhias tornam tais tecnologias impraticáveis e as técnicas de simulação surgem como opção.

A metodologia sugerida pelo *CorporateMetrics* (1999) propõe segregar a modelagem da estrutura financeira da companhia de projeções das variáveis de mercado. Distintamente de técnicas como, por exemplo, o *valuation*, onde existe uma reunião destes dois procedimentos em um só esqueleto, esta separação entre estrutura da companhia e projeções de variáveis permite a quem gere o risco perceber a atuação da companhia quando variáveis de mercado são levadas ao limite (*estresse*). As projeções das variáveis de mercado (preços, taxas, etc) são de carácter estocástico, convertendo as projeções em simulações do comportamento destas variáveis, também conhecidas como geração de cenários.

Para cumprir tais projeções, a técnica que recebe o nome de Simulação de Monte Carlo é indubitavelmente a mais utilizada. A Simulação de Monte Carlo é um método estatístico aplicado em simulações estocásticas. Este é usado há muito tempo como maneira de obter números aproximados de funções complexas. Esta técnica comumente envolve a geração de cenários de alguma distribuição de probabilidades e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse.

A idéia base do monte Carlo é simular, repetidamente (diga-se 1000 vezes), um processo estocástico para uma variável de mercado, e fazer a simulação da maior parte de situações/resultados possíveis. Um processo estocástico comumente usado é o Movimento Geométrico Browniano (MGB), que, de acordo com o que foi demonstrado anteriormente, pode-se descrever por:

$$ds = \mu s dt + \sigma s dz$$

em que  $dz$  é uma variável aleatória com distribuição normal, média zero e variância  $dt$ . Quando se considera a variação de  $s$  num curto intervalo de tempo  $\Delta t$ , temos:

$$\Delta s = \mu \Delta t + \sigma \epsilon t \sqrt{\Delta t}$$

Em que  $\varepsilon_t$  se torna uma variável aleatória padronizada normal. Para simular uma trajetória de valores para  $S_{t+1}$ , inicia-se com  $S_t$ , e então é gerado épsilons ( $\varepsilon$ ) em seqüência para obter o resultado.

Com a utilização do Lema de Itô, a equação acima é encontrada na seguinte aproximação discreta:

$$S_{t+1} = S_t e^{\left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t \right]}$$

Dentre os modelos de previsão mais usados em gestão de risco, podemos mencionar os processos estocásticos, os modelos univariados e multivariados baseados em séries temporais e os modelos econométricos. Os principais processos estocásticos usados são: movimento aritmético browniano, movimento geométrico browniano, processo de reversão à média e processos de reversão com saltos. Nos modelos econométricos são encontradas as regressões simples e múltiplas. Nos univariados baseados em séries temporais, os modelos ARIMA (auto-regressivo integrado de médias móveis) e Alisamento Exponencial. Nos Modelos multivariados, encontram-se o VAR (modelo vetorial auto-regressivo) e o VECM (modelo vetorial de correção de erros).

Como se pode perceber, diversas metodologias de previsão estão disponíveis, mas é importante realçar que não há um modelo universalmente aplicável. Então, é aconselhável fazer previsões por meio de diferentes métodos, para que possa haver comparações entre eles e para analisar valores e deficiências. Além disso, é necessário tomar cuidado ao escolher séries históricas para calibrar os modelos, evitando-se usar séries muito curtas (amostra pouco significativa) e com *outliers* presentes.

Além de escolher o modelo de previsão, é necessária atenção especial ao gerar as projeções do conjunto de variáveis. Quando há mais de uma variável de mercado que atinge os valores dos fluxos financeiros das empresas, a geração de cenários deve ser criteriosa para que não haja a construção de projeções incompatíveis. Uma destas premissas é preservar as correlações entre os fatores. A técnica conhecida como fatoração de Cholesky permite que sejam feitas as projeções levando-se em conta a dependência linear entre as variáveis.

Pela fatoração de Cholesky, a forma dos modelos de previsão dos fatores de risco não é mudada; somente o fator aleatório do modelo de previsão passa a carregar a influência da correlação entre as séries.

Com estes conceitos, gerir risco de mercado em instituições não financeiras pode ser compilado em quatro passos: gerar cenários, ou seja, as projeções estocásticas dos fatores de risco; organizar a estrutura econômico-financeira da empresa (receitas, custos, EBITDA, Fluxo de caixa, etc); simular, ou seja, fazer a projeção das contas da empresa (receitas, custos, EBITDA, Fluxo de caixa, etc) com base nos cenários estocásticos gerados; fazer as análises e relatórios de risco. Essa é a abordagem que será realizada neste trabalho.