# 5
# Família de Parabolóides

Este capítulo tem por objetivo apresentar a parcial falta de solução ao primeiro problema proposto para essa tese, a saber estender o modelo de polígono parabólico para superfícies.

O problema inicial proposto para esta tese foi mostrar que dado uma amostra $\{(p_i, n(p_i)\}_{i=1}^{3} \subset S \times \mathbb{S}^2$, onde $S$ é uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária, poderíamos obter um parabolóide passando por estes pontos e normais. A motivação veio do modelo de polígono parabólico (13) que mostra a reconstrução de curvas através da geometria afim. O modelo para superfície utiliza parabolóides em cada triângulo. Provamos que é necessário impor algumas condições sobre os normais para existir o parabolóide passando por $(p_i, n(p_i))$. Mostramos que sobre certas condições da amostragem de pontos e normais existe uma família de parabóloides que passa por três pontos e possuem os normais definidos nesses pontos. Tentamos resolver o problema completo utilizando cúbicas osculadoras, mas até o presente momento não temos uma solução.[1]

Seja $\{(p_i, n(p_i)\}_{i=1}^{3} \subset S \times \mathbb{S}^2$ uma amostra, ou seja, temos três vetores normais definidos em $\{p_i\}_{i=1}^{3}$. Podemos aplicar uma transformação afim $A$ que leva esses três pontos para os pontos $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$, em coordenadas homogêneas $A^{-1} = (p_1 - t, p_2 - t, p_3 - t, t)$, onde $t$ é um vetor de translação qualquer. Podemos definir $t = p_3 - N_3, t_w = 0$ tal que $n(p_3) = e_3 = (0,0,1)$. Usamos a representação geral de quádrica

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y,z) &\longmapsto ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0. \end{aligned} \tag{5-1}$$

Notemos que o gradiente de $F$ é paralelo ao vetor normal $\mathbf{N}_e$, assim existem coeficientes $\{\lambda_i\}_{i=1}^{3} \in \mathbb{R} - \{0\}$ tais que

$$\nabla F(e_i) = \lambda_i n(e_i). \tag{5-2}$$

[1]Nessa busca recebemos muita ajuda do professor Carlos Tomei, que agradecemos muito.

Queremos encontrar os coeficientes $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, \lambda_1, \lambda_2$ e $\lambda_3$.

Se assumirmos que $j \neq 0$, então sem perda de generalidade podemos definir $j = 1$. Notemos que temos 12 equações e 12 incógnitas sendo que 9 delas foram obtidas a partir da equação (5-2) e as demais da equação (5-1). Podemos escrever essas equações em termos de um sistema linear não homogêneo, a saber

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -n(p_1)_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -n(p_1)_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -n(p_1)_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -n(p_2)_1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -n(p_2)_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -n(p_2)_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando o programa **Maple**, obtemos que $\lambda_i = 0,\ i = 1, 2$, em particular temos uma solução que não respeita $n_1$ e $n_2$. Logo, devemos encontrar condições sobre os normais que nos deem um resultado mais amplo. O próximo resultado foi obtido com a ajuda do **Maple**.

**Teorema 7** *Se $n(p_1)$ é simétrico a $n(p_2)$ pelo plano ortogonal a $n(p_3)$ bissetor a $p_1Op_2$, em outras palavras se as componentes dos vetores normais satisfazem $n(p_2)_1 = n(p_1)_2,\ n(p_2)_2 = n(p_1)_1,$ e $n(p_2)_3 = n(p_1)_3$. Então $det(A) = 0$ e portanto temos uma família de quádricas a um parâmetro em $\lambda_1$*

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (1 + n(p_2)_2\lambda_1)x^2 + (1 + n(p_2)_2\lambda_1)y^2 + (1 + (n(p_2)_2 - n(p_2)_3)\lambda_1)z^2 \\ &+ 2\left(1+\frac{1}{2}\left(n(p_2)_2+n(p_2)_1\right)\lambda_1\right)xy+2\left(1+\frac{1}{2}n(p_2)_2\lambda_1\right)xz \\ &+ \left(1+\frac{1}{2}n(p_2)_2\lambda_1\right)yz - \left[\left(1+\frac{1}{2}n(p_2)_2\lambda_1\right)x\right] \\ &- \left[\left(1+\frac{1}{2}n(p_2)_2\lambda_1\right)y+\left(1+\frac{1}{2}\left(n(p_2)_2-n(p_2)_3\right)\lambda_1\right)z\right] \end{aligned} \quad (5\text{-}3)$$

Vamos encontrar o valor de $\lambda_1$ de tal forma que a quádrica seja um parabolóide.

Seja $Q$ a matriz da forma quadrática associada a quádrica dada pela equação (5-3)

$$Q=\begin{bmatrix} 1+n(p_2)_2\lambda_1 & 1+\frac{1}{2}\left(n(p_2)_2+n(p_2)_1\right)\lambda_1 & 1+\frac{1}{2}n(p_2)_2\lambda_1 \\ 1+\frac{1}{2}\left(n(p_2)_2+n(p_2)_1\right)\lambda_1 & 1+n(p_2)_2\lambda_1 & 1+\frac{1}{2}n(p_2)_2\lambda_1 \\ 1+\frac{1}{2}n(p_2)_2\lambda_1 & 1+\frac{1}{2}n(p_2)_2\lambda_1 & 1+(n(p_2)_2-n(p_2)_3)\lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos

$$\begin{aligned} \det(Q) &= -\frac{1}{4}\lambda_1^2(n(p_2)_1-n(p_2)_2)(n(p_2)_2n(p_2)_1\lambda_1-n(p_2)_1n(p_2)_3\lambda_1 \\ &+ n(p_2)_1+2n(p_2)_2^2\lambda_1-3n(p_2)_2n(p_2)_3\lambda_1+3n(p_2)_2-4n(p_2)_3). \end{aligned} \tag{5-4}$$

Queremos que a quádrica seja um parabolóide então temos que ter $det(Q)=0$. Assim, na equação (5-4) temos um polinômio em $\lambda_1$ de grau 3, cujas raízes são

$$0, 0 \; e \; \frac{-n(p_2)_1-3n(p_2)_2+4n(p_2)_3}{-n(p_2)_2n(p_2)_1+n(p_2)_1n(p_2)_3-2n(p_2)_2^2+3n(p_2)_2n(p_2)_3}.$$

Se $\lambda_1=0$, então temos um caso impossível, teríamos na definição de $F$ que $(x+y+z-0.5)^2+0.75=0$. Portanto, estudaremos o caso em que $\lambda_1\neq 0$. Substituímos o valor de $\lambda_1$ em $Q$ e calculamos os autovetores $\{v_i\}_{i=1}^3$ e autovalores $\{\alpha_i\}_{i=1}^3$, obtemos um autovalor nulo. Definamos a matriz diagonal $D=diag(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3=0)=PQP^t$, onde $P$ é uma matriz formada pelos autovetores $\{v_1,v_2,v_3\}$.

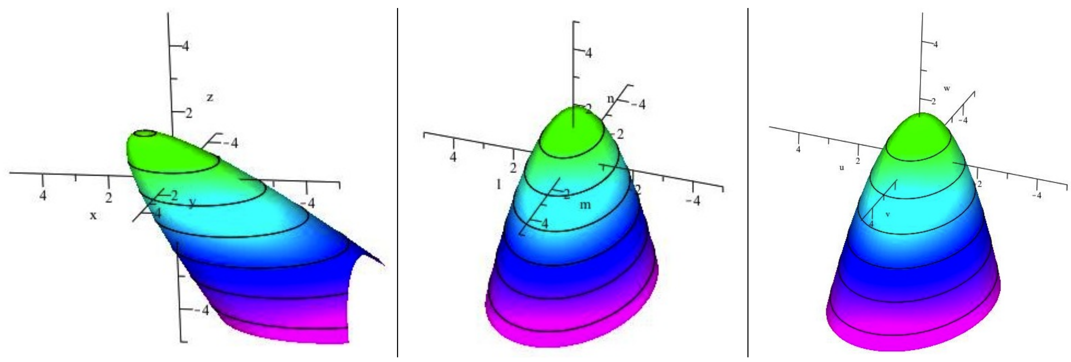

Figura 5.1: Parabolóide elíptico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente.

**Afirmação 2** *Existe uma transformação* $\bar{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, *tal que*

1. $F(x,y,z)=\bar{F}(l,m,n)=l^2\alpha_1+m^2\alpha_2+2l\bar{g}+2m\bar{h}+2n\bar{i}+j$

2. $j=\bar{j}$

**Demonstração:** Definamos $P(x, y, z)^t = (l, m, n)^t$. Observemos que

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= X^tQX + X^tN + j \\ &= X^tP^tPQP^tPX + X^tP^tPN + j \\ &= R^tDR + R^tS + j, \end{aligned}$$

onde $X = (x, y, z)^t$, $R = PX$, $N = (2g, 2h, 2i)^t$ *e* $S = PN$. Portanto

$$\bar{F}(l, m, n) = l^2\alpha_1 + m^2\alpha_2 + 2l\bar{g} + 2m\bar{h} + 2n\bar{i} + j.$$

□

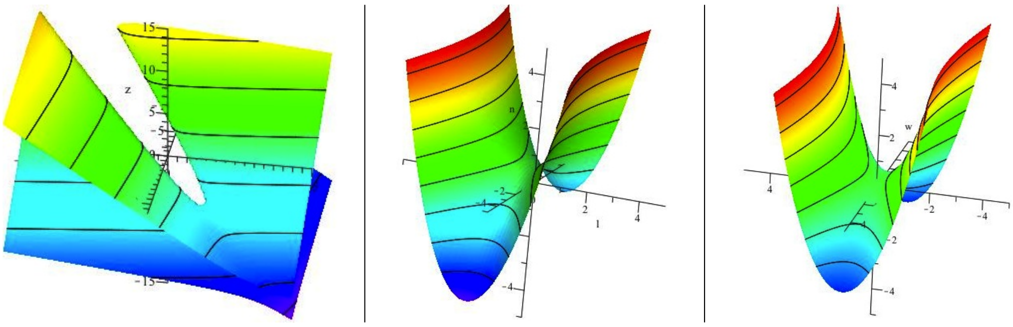

Figura 5.2: Parabolóide hiperbólico original (à esquerda), e após a primeira (centro) e segunda (à direita) transformações, respectivamente.

Utilizando a afirmação acima, vamos fazer mais uma transformação de tal forma que a equação do parabolóide fique mais simples. Definamos $l = u - \frac{\bar{g}}{\alpha_1}$, $m = v - \frac{\bar{h}}{\alpha_2}$, *e* $n = w$, assim seja

$$f(l, m, n) = \alpha_1 u^2 + \alpha_2 v^2 + 2w\bar{i} + k, \; onde \; k = -\frac{\bar{h}^2}{\alpha_2} - \frac{\bar{g}^2}{\alpha_1} + j.$$

As figuras 5.1 e 5.2 ilustram as transformações que fizemos. Um fato interessante é que não existe um parabolóide osculador à superfície que seja invariante por transformações afins (37). É possível mostrar a existência de *cúbicas osculadoras* à superfície, e existe uma transformação afim que leve tais cúbicas em outras que são simples de entender. A classificação dessas cúbicas depende do sinal da métrica. A demosntração da existência das cúbicas osculadoras equivale a mostrar que o normal afim é vertical e dado por $\xi = (0, 0, 1)$.