7
Conclusão e Trabalhos Futuros

Esta tese apresentou algumas propriedades geométricas invariantes por transformações afins em superfícies regulares (paramétricas ou implícitas). Além disso, introduzimos dois métodos para o cálculo de tais invariantes afins no caso de isossuperfícies.

Mais precisamente, com o auxílio da geometria diferencial e os resultados da geometria afim apresentamos as principais propriedades geométricas invariantes por transformações afins em superfícies em $\mathbb{R}^3$, a saber a métrica de Berwald-Blaschke, os vetores co-normal e normal afins e as curvaturas Gaussiana e média afins. Uma vez conhecidas essas propriedades no caso paramétrico estendemos tais resultados para superfícies implícitas com a ajuda do teorema da função implícita.

Para calcularmos as estruturas geométricas, desenvolvemos dois métodos os quais denominamos de *método direto* e *método com transformação*. O primeiro consiste em aplicarmos diretamente as fórmulas dos invariantes no algoritmo base *Marching Cubes*, o que em particular causa instabilidade numérica, já para o segundo construímos uma transformação afim que deixa o vetor gradiente vertical e garanti que a derivada mista da função que define a superfície seja nula, isto possibilitou uma enorme redução dos cálculos e resultou em estabilidade numérica e invariância das propriedades geométricas.

Em experimentos realizados no problema do cálculo dos invariantes afins em superfícies implícitas, verificamos que o nosso método com transformação mostra-se capaz de reduzir o erro numérico ligado ao alinhamento com o eixo do gradiente. Além disso, este método possibilitou uma grande redução das fórmulas o que melhorou bastante a *estabilidade numérica*. Verificamos ainda que o método com transformação mostra uma tendência de uma boa *convergência* mesmo aplicando uma transformação afim. Outro ponto importante no nosso estudo foi a medida da *invariância afim* que é complicada quando experimentamos isossuperfícies. Geramos os histogramas da distribuição da curvatura Gaussiana afim e vimos que o método com transformação preserva melhor o significado geométrico das medidas invariantes.

Além disso, deduzimos uma *interpretação geométrica* da curvatura Gaussiana afim através da relação entre o cálculo de área de uma região a partir da parametrização da superfície e da área da superfície parametrizada pelo normal afim. Definimos *vizinhança tubular afim* e provamos a existência local e global desta para superfícies conexas, compactas e estritamente convexas. Uma aplicação futura desse resultado seria o uso na reconstrução de superfícies através de *off-sets* afins. A partir do conceito de *superfícies paralelas afins*, provamos uma condição necessária e suficiente para que a superfície paralela fosse regular, tal condição envolve as curvaturas Gaussiana e média afins além da existência da vizinhança tubular afim. Generalizamos a *fórmula de Minkowski* para a geometria afim.

Este trabalho abre novas possibilidades em problemas relacionadas à invariância afim, que é uma propriedade tão desejada em várias aplicações em computação visual. Algumas opções para a continuação do presente trabalho, na linha geométrica, incluem reconstrução de superfícies usando as cúbicas osculadoras, propriedades geométricas invariantes afins, superfícies paralelas além da determinação de novos invariantes afins como o *invariante de Pick.* Utilizar as curvaturas afins para segmentar superfícies. Outra linha de trabalho, mais relacionada à análise numérica, é a melhoria do cálculo das derivadas.