2. Revisão da literatura sobre finanças

2.1. Fundamentos de finanças

2.1.1. Fundamentos sobre retorno

2.1.1.1. Retorno de um ativo

De acordo com Gitman (2004), o retorno de um ativo pode ser definido como a perda ou o ganho total sofrido por este, em certo período de tempo. Portanto, pode ser medido pela soma dos proventos líquidos em dinheiro (fluxo de caixa), durante um período, com a variação de valor – positiva ou negativa – do mesmo em relação ao valor original do ativo, conforme a equação 1:

$$R_{i,t} = \frac{C_t + P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{1}$$

onde $R_{i,t}$ é o retorno do ativo i no instante t, C_t é o fluxo de caixa líquido do investimento durante o período $t-1$ a t, P_t é o preço do ativo i no instante t e P_{t-1} é o preço do ativo i no instante $t-1$.

2.1.1.2. Retorno acumulado de um ativo

O retorno acumulado de um ativo é o retorno total deste quando se considera um horizonte de vários períodos. Pode ser, portanto, calculado por meio da equação 2:

$$R_{acumulado_i} = \prod_{t=1}^{T}(1 + R_{i,t}) - 1 \tag{2}$$

onde $R_{acumulado_i}$ é o retorno acumulado do ativo i e T é o número de observações históricas de retornos.

2.1.1.3. Retorno esperado de um ativo

O retorno esperado de um ativo é a média dos retornos históricos do mesmo. Podem-se, então, utilizar duas equações para calculá-lo.

Utiliza-se a equação 3 quando se conhece a distribuição dos retornos do ativo, e utiliza-se a equação 4 quando não se tem tal distribuição e o estimador do retorno médio é a própria média dos retornos históricos amostrais.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

$$E(R_i) = \bar{R}_i = \sum_{t=1}^{T} Pr_t R_{i,t} \tag{3}$$

$$E(R_i) = \bar{R}_i = \sum_{t=1}^{T} \frac{R_{i,t}}{t} \tag{4}$$

onde $E(R_i)$ é o retorno esperado do ativo i, $\bar{R}_i$ é o retorno médio do ativo i e Pr_t é a probabilidade de ocorrência do retorno do ativo i no instante t.

2.1.1.4. Retorno de uma carteira de ativos

O retorno de uma carteira de ativos é a média ponderada dos retornos dos ativos que a compõem, conforme exposto pela equação 5:

$$R_{c,t} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{i,t} \tag{5}$$

$$\text{Para: } w_i \in [0; 1] \quad e \quad \sum_{i} w_i = 1$$

onde $R_{c,t}$ é o retorno da carteira c no instante t, w_i é a proporção de valor do ativo i na carteira c, N é o número de ativos na carteira c.

2.1.1.5. Retorno acumulado de uma carteira de ativos

O retorno acumulado de uma carteira de ativos é o retorno deste quando se considera um espaço de vários períodos. Pode ser, portanto, calculado por meio da equação 6:

$$R_{acumulado_c} = \prod_{t=1}^{T} (1 + R_{c,t}) - 1 \tag{6}$$

2.1.1.6. Retorno esperado de uma carteira de ativos

Considerando que os retornos dos ativos que compõem uma carteira são variáveis aleatórias, o retorno esperado desta é a média ponderada dos retornos esperados dos ativos, conforme exposto na equação 7:

$$E(R_c) = \bar{R}_c = \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{R}_i \tag{7}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

onde $E(R_c)$ é o retorno esperado da carteira c e $\bar{R}_c$ o seu retorno médio.

2.1.2. Fundamentos sobre risco

2.1.2.1. Perfil de investidores

Utilizando a abordagem microeconômica sobre incerteza, Varian (2003) classifica os investidores em três perfis: avesso ao risco, propenso ao risco e neutro ao risco.

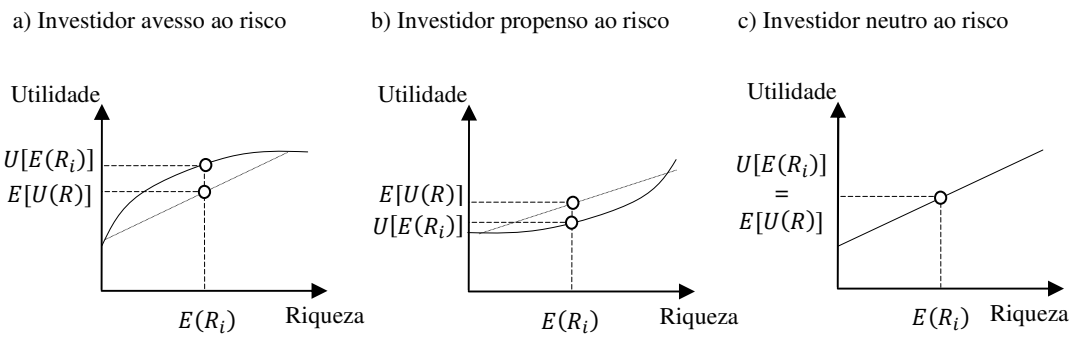
O investidor é avesso ao risco quando prefere obter o valor esperado do investimento a investir neste. Assim, obtém-se uma curva de utilidade marginal da riqueza côncava, como se pode observar na Figura 2a.

O investidor é propenso ao risco quando prefere investir e incorrer em incerteza a receber o valor esperado do investimento. Assim, obtém-se uma curva de utilidade marginal da riqueza convexa, como se pode observar na Figura 2b.

O investidor é neutro ao risco quando se mostra indiferente às incertezas do investimento. Assim, obtém-se uma curva de utilidade marginal linear, como se pode observar na Figura 2c.

Conforme exposto anteriormente, segue a Figura 2 com as curvas de utilidade marginal dos três perfis de investidores, sendo $U[E(R_i)]$ a utilidade do retorno esperado de um ativo i e $E[U(R)]$ a utilidade esperada da riqueza.

Figura 2 – Perfil de investidores



Fonte: Elaboração própria.

2.1.2.2. Risco de um ativo

De acordo com Samanez (2007), o risco de um ativo está associado à incerteza dos seus retornos. Quanto maior for a faixa de retornos possíveis ou a sua dispersão das expectativas em torno da média, maior será o risco do ativo.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Na visão de Gitman (2004), a avaliação de risco de um ativo pode ser feita por meio de duas maneiras:

(i) análise de sensibilidade – verificam-se os possíveis retornos de um ativo considerando diferentes cenários planejados, como por exemplo: otimista, pessimista e mais provável. Nesse caso, o risco do ativo poderia ser encarado como a amplitude dos retornos calculados, ou seja, o retorno do ativo no cenário otimista menos o retorno do ativo no cenário pessimista. Quanto maior for a amplitude, maior a variabilidade e, portanto, o risco;

(ii) distribuição de probabilidade – quando se tem uma função dos possíveis retornos de um ativo associados a uma probabilidade de ocorrência, pode-se verificar se os retornos estão mais próximos da média ou menos dispersos da média. Quanto mais disperso da média, mais arriscado é o ativo.

No segundo caso, pode-se, então, calcular o risco por meio da variância (σ^2) ou do desvio-padrão (σ) da distribuição de probabilidade dos retornos. Quando a distribuição é totalmente conhecida, utiliza-se a equação 8 ou a equação 9 – a que for mais conveniente. Quando não se tem informações de todos os retornos da distribuição, utiliza-se a equação 10, que consiste no desvio-padrão estimado de uma amostra de retornos históricos de um ativo. Utiliza-se, nesta última, o fator $(T-1)$ para que o estimador do desvio-padrão seja não tendencioso.

$$\sigma_i = \sqrt{E(R_i - \bar{R}_i)^2} = \sqrt{\sum_{t=1}^{T} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2 \times Pr_t} \tag{8}$$

$$\sigma_i = \sqrt{E(R_i - \bar{R}_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2} \tag{9}$$

$$\hat{\sigma}_i = \sqrt{E(R_i - \bar{R}_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T} \left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2} \tag{10}$$

onde σ_i é o desvio-padrão dos retornos do ativo i e $\hat{\sigma}_i$ o seu desvio-padrão estimado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Outra medida estatística muito utilizada na análise de risco é o coeficiente de variação, conforme exposto na equação 11. Esta é uma medida de dispersão relativa, útil na comparação de riscos de ativos com retornos cujas ordens de grandeza diferem-se muito. Ou seja, há um ajuste das magnitudes das distribuições de retorno. Obtém-se, por meio deste indicador, o mesmo tipo de avaliação do desvio-padrão: quanto maior for o coeficiente de variação, maior será o risco do ativo.

$$Coeficiente\ de\ Variação\ (CV) = \frac{\sigma_i}{\bar{R}_i} \tag{11}$$

2.1.2.3. Risco de uma carteira de ativos

A quantificação do risco de uma carteira de ativos é menos empírica do que a do seu retorno, visto que esse era obtido por meio da média ponderada dos retornos dos ativos (ver Seção 2.1.1.4). As próximas seções serão destinadas à explicação da teoria estatística necessária para o cálculo do desvio-padrão (risco) de uma carteira.

2.1.2.3.1. Covariância e correlação de retornos de ativos

A covariância é uma medida estatística que mede a relação entre duas variáveis e que deve ser utilizada na análise de retornos de ativos em uma carteira. Quando os desvios dos retornos de dois ativos de uma carteira variam positivamente nos mesmos momentos, pode-se dizer que a covariância destes é positiva. O mesmo pode-se dizer quando os desvios dos retornos dos ativos variam negativamente nos mesmos momentos. Entretanto, a covariância será negativa quando os desvios dos retornos nos mesmos momentos possuírem sinais inversos. A equação 12 representa a covariância de retorno de dois ativos:

$$\sigma_{ij} = E\left[(R_i - \bar{R}_i)(R_j - \bar{R}_j)\right] = \sum_{i=1}^{T}\sum_{j=1}^{T}\frac{(R_{i,t} - \bar{R}_i)(R_{j,t} - \bar{R}_j)}{T} \tag{12}$$

onde σ_{ij} é a covariância dos retornos do ativo i e do ativo j, R_j é o retorno do ativo j, $\bar{R}_j$ é o retorno médio do ativo j e $R_{j,t}$ é o retorno do ativo j no instante t.

A correlação é uma outra medida estatística que visa padronizar a covariância de modo que aquela varie entre um intervalo limitado a $[-1; 1]$. Isto é possível dividindo a covariância dos ativos pelos desvios-padrão dos mesmos.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Portanto, quando a correlação for menos um, diz-se que há correlação negativa perfeita. Quando a correlação for um, afirma-se que há correlação positiva perfeita. A equação 13 representa a fórmula de correlação:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \times \sigma_j} \qquad \rho_{ij} \in [-1; 1] \tag{13}$$

onde ρ_{ij} é a correlação dos retornos dos ativos i e j e σ_j é o desvio-padrão dos retornos do ativo j.

2.1.2.3.2. Variância de uma carteira

A variância de uma carteira é definida como a expectância dos quadrados dos desvios dos retornos observados em torno do seu retorno esperado (SAMANEZ, 2007), conforme exposto na equação 14:

$$\sigma_c{}^2 \ = E(R_c - \bar{R}_c)^2 \tag{14}$$

onde $\sigma_c{}^2$ é a variância da carteira c.

A variância de uma carteira de ativos pode ser calculada do mesmo modo que é calculada a variância de um ativo (equações 8, 9 e 10), caso se tenha os dados de retorno histórico ou de probabilidade de retorno da carteira.

Entretanto, quando não se tem estes dados e sim as variâncias e covariâncias dos ativos que compõe uma carteira, a sua variância pode ser obtida por meio da equação 15. Esta equação é obtida desenvolvendo-se a equação 14 utilizando as equações 5, 7, 12 e 13 que definem, respectivamente, o retorno de uma carteira (R_c), o retorno esperado de uma carteira ($\bar{R}_c$), a covariância (σ_{ij}) e a correlação (ρ_{ij}) dos retornos do ativo (i) e do ativo (j).

$$\sigma_c{}^2 = E\left(\sum_{i=1}^{N} w_i R_{i,t} - \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{R}_i\right)^2 = E\left(w_i \times \sum_{i=1}^{N}\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)\right)^2$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^{N} w_i{}^2\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} w_i w_j\left(R_{i,t} - \bar{R}_i\right)\left(R_{j,t} - \bar{R}_j\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} w_i{}^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

$$= \sum_{i=1}^{N} {w_i}^2 {\sigma_i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{15}$$

onde w_j é a proporção de valor do ativo j na carteira c e N é o número de ativos.

Para melhor visualização da equação 15, segue abaixo a exemplificação para os casos de uma carteira formada por dois e três ativos, conforme equações 16 e 17, respectivamente.

(i) Risco de uma carteira com 2 ativos

$$\begin{aligned} {\sigma_c}^2 &= \sum_{i=1}^{2} {w_i}^2 {\sigma_i}^2 + \sum_{i=1}^{2} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{2} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \\ &= {w_1}^2 {\sigma_1}^2 + {w_2}^2 {\sigma_2}^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \end{aligned} \tag{16}$$

(ii) Risco de uma carteira com 3 ativos

$$\begin{aligned} {\sigma_c}^2 &= \sum_{i=1}^{3} {w_i}^2 \times {\sigma_i}^2 + \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{3} w_i w_j \sigma_{ij} \\ &= {w_1}^2 {\sigma_1}^2 + {w_2}^2 {\sigma_2}^2 + {w_3}^2 {\sigma_3}^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} + 2 w_1 w_3 \sigma_1 \sigma_3 \rho_{13} \\ &+ 2 w_2 w_3 \sigma_2 \sigma_3 \rho_{23} \end{aligned} \tag{17}$$

2.1.2.3.3. Risco diversificável e risco de mercado

Pode-se reescrever a equação 15 da variância de uma carteira na forma matricial, conforme exposto na equação 18.

$$\begin{aligned} {\sigma_c}^2 &= \sum_{i=1}^{N} {w_i}^2 {\sigma_i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \\ &= (w_1 \; w_2 \; \cdots \; w_N) \underbrace{\begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & {\sigma_2}^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & {\sigma_N}^2 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de variâncias-covariâncias}} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{18}$$

A representação matricial é muito útil, pois se consegue facilmente observar, por meio dela, quantas variâncias e covariâncias terá na equação da

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

variância da carteira. Tendo em vista que a matriz destacada na equação 18 é uma matriz quadrada $N \times N$ cuja diagonal principal é composta pelas variâncias do retorno de cada ativo e os demais elementos são as covariâncias dos ativos, pode-se dizer que esta possui N variâncias e $N^2 - N$ covariâncias.

Com base no exposto no parágrafo anterior, pode-se estabelecer a covariância média ($\bar{\sigma}_{ij}$) e a variância média ($\bar{\sigma}_i{}^2$) dos retornos dos ativos de uma carteira:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \sigma_{ij} \frac{1}{N^2 - N} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \sigma_{ij} \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N-1}\right) \tag{19}$$

$$\bar{\sigma}_i{}^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \sigma_i{}^2 \tag{20}$$

Ainda, supondo que haja uma carteira cujas proporções dos ativos sejam iguais, ou seja,

$$w_i = \frac{1}{N} \quad \text{para todo } i \tag{21}$$

e substituindo (19), (20) e (21) em (15) tem-se:

$$\begin{aligned}
\sigma_C{}^2 &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)^2 \sigma_i{}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \left(\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N}\right) \sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} \sigma_i{}^2 + \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \left(\frac{1}{N}\right) \sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{N} \bar{\sigma}_i{}^2 + \left(\frac{N-1}{N}\right) \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{1}{N(N-1)} \sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{N} \bar{\sigma}_i{}^2 + \left(\frac{N-1}{N}\right) \bar{\sigma}_{ij}
\end{aligned} \tag{22}$$

Quando o número de ativos da carteira composta por N ativos em proporções iguais tende a infinito, a primeira parcela da equação 22 tende a zero e a segunda parcela tende à covariância média dos ativos. Tal situação pode ser verificada a seguir.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

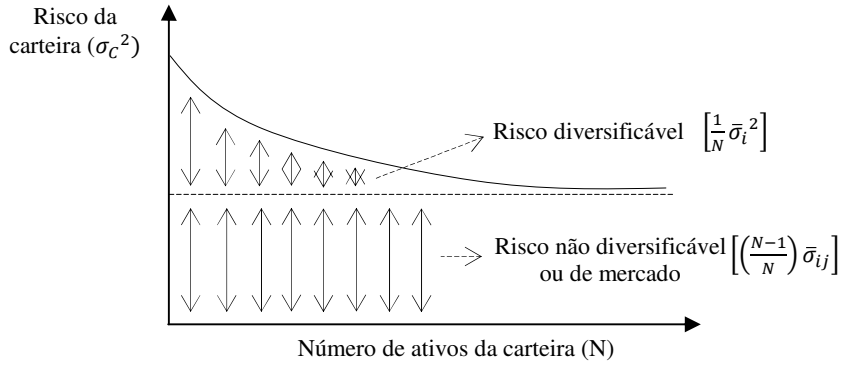
$$\sigma_C{}^2 = Lim_{N\to\infty}\left\{\underbrace{\frac{1}{N}\bar{\sigma}_i{}^2}_{0} + \underbrace{\left(\frac{N-1}{N}\right)}_{1}\bar{\sigma}_{ij}\right\} = \bar{\sigma}_{ij}$$

Nota-se, portanto, que, por meio da utilização de vários ativos para composição da carteira, o risco oriundo do primeiro termo da equação 22 reduz-se a zero. Então, esta parcela se denomina risco diversificável, já que pode ser eliminada por meio de diversificação.

Já o segundo termo não pode ser eliminado com a composição de uma carteira com uma infinita quantidade de ativos e por isso é chamado de risco não diversificável (ou de mercado). Quando o número de ativos da carteira é bastante elevado e tende a infinito, esta parcela converge à covariância média dos ativos.

A Figura 3 auxilia na visualização dos efeitos da diversificação de carteira. Quanto maior for o número de ativos (deslocamento no eixo positivo da abscissa), menor será o risco diversificável (deslocamento no eixo negativo da ordenada).

Figura 3 – Efeito da diversificação de carteira



Fonte: Elaboração própria.

2.1.3. Modelo de Markowitz de diversificação de carteira

Markovitz (1952), com base na abordagem de média-variância, destacou que uma carteira de ativos deverá ser suficiente diversificada para que se minimize o risco total da mesma. Ou seja, para cada nível de risco possível, deverá haver uma composição de carteira ótima que se maximize o retorno total da carteira, formando uma fronteira eficiente de pares de risco-retorno.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Para atingir este objetivo, pode-se estabelecer o seguinte modelo de programação linear (PL) de modo a obter tais proporções ótimas:

$$\text{MIN} \quad \sum_{i=1}^{N} {w_i}^2 {\sigma_i}^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} - {\sigma_c}^2 \qquad (PL1)$$

$$\text{s.a.} \quad \bar{R}_c = \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{R}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$0 \leq w_i \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

A função objetivo da PL1 representa a equação de risco de uma carteira dado certo nível de variância (${\sigma_c}^2$). As restrições da PL1 representam a equação de retorno de uma carteira de ativos (ver Seção 2.1.1.4) e as condições básicas para a composição de uma carteira com N ativos com pesos relativos w_i.

Para cada nível de variância informado, a PL1 retornará um par de retorno e risco (σ_c *e* R_c), formando carteiras eficientes que maximizam o retorno para cada nível de risco. Plotando-as num gráfico de risco (σ_c) e retorno (R_c)[12], obtém-se o que Markowitz (1952) denominou de fronteira eficiente.

2.1.3.1. Efeito da correlação no delineamento da fronteira eficiente

Para um melhor entendimento do efeito da correlação entre os retornos dos ativos de uma carteira no delineamento da fronteira eficiente, seguem três exemplos de otimização de uma carteira composta por dois ativos de risco (σ_1 e σ_2, sendo $\sigma_1 < \sigma_2$). No primeiro exemplo, a correlação é perfeitamente positiva ($\rho_{12} = +1$). No segundo exemplo, a correlação é perfeitamente negativa ($\rho_{12} = -1$). No terceiro exemplo, a correlação está situada entre o intervalo menos e mais um ($-1 < \rho_{12} < +1$).

Em todos os casos, o retorno da carteira deverá ser uma média ponderada dos retornos dos dois ativos ($\bar{R}_1$ e $\bar{R}_2$, sendo $\bar{R}_1 < \bar{R}_2$), dependendo das suas respectivas proporções (w_1 e w_2). Assim, o foco da análise será o efeito da correlação no risco total da carteira.

[12] Esta representação gráfica é chamada de Linha de Mercado de Capitais e será discutida na Seção 2.1.5.1.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

A fundamentação das próximas seções serão as equações de retorno esperado e risco de uma carteira (ver Seções 2.1.1.6 e 2.1.2.3). Ou seja,

Retorno esperado: $E(R_c) = \bar{R}_c = w_1\bar{R}_1 + w_2\bar{R}_2$ (7)

Risco: $\sigma_c = \sqrt{{w_1}^2{\sigma_1}^2 + {w_2}^2{\sigma_2}^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}$ (15)

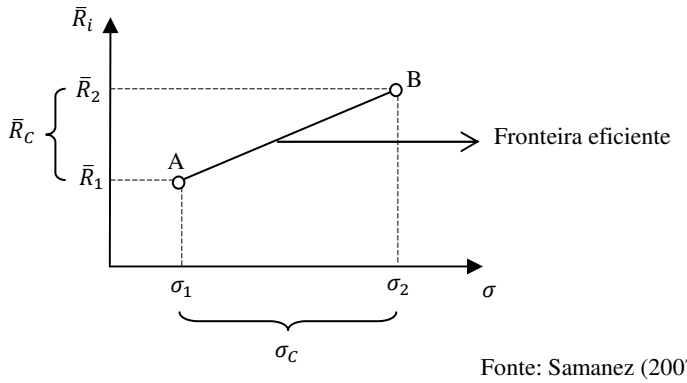
2.1.3.1.1. Correlação perfeitamente positiva

Substituindo o valor da correlação (+1) na equação 15, tem-se:

$$\sigma_c = \sqrt{{w_1}^2{\sigma_1}^2 + {w_2}^2{\sigma_2}^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2 \times 1}$$
$$= \sqrt{(w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2} = w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2 \quad (23)$$

Nota-se, portanto, que o risco desta carteira possui relação linear com os desvios-padrão dos dois ativos que a compõem, dependendo somente das proporções w_1 e w_2. Esta característica pode ser verificada na Figura 4. Além disso, cabe ressaltar que, por meio da análise da fórmula 23, fica evidente que o risco de uma carteira com essa característica nunca será nulo (considerando que ambos os ativos que a compõe possuem algum risco, conforme já exposto).

Figura 4 – Fronteira eficiente (dois ativos de correlação perfeitamente positiva)



Fonte: Samanez (2007) adaptado.

2.1.3.1.2. Correlação perfeitamente negativa

Substituindo o valor da correlação (-1) na equação 15, e considerando que $w_2 = 1 - w_1$, tem-se:

$$\sigma_c = \sqrt{{w_1}^2{\sigma_1}^2 + (1-w_1)^2{\sigma_2}^2 + 2w_1(1-w_1)\sigma_1\sigma_2 \times (-1)}$$
$$= \sqrt{[w_1\sigma_1 - (1-w_1)\sigma_2]^2} = w_1\sigma_1 - (1-w_1)\sigma_2 \quad (24)$$

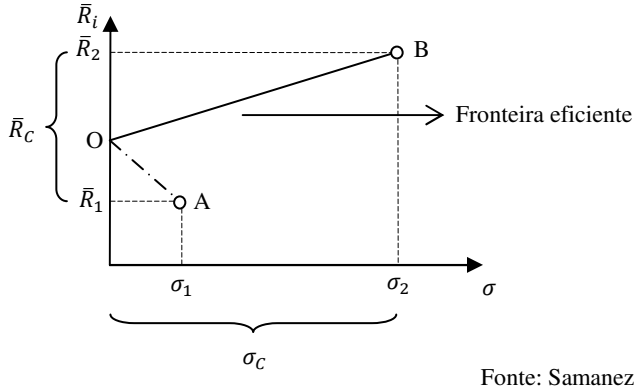
Ou

$$= \sqrt{[-w_1\sigma_1 + (1-w_1)\sigma_2]^2} = -w_1\sigma_1 + (1-w_1)\sigma_2 \quad (25)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Nota-se, portanto, que o risco da carteira possui relação linear com os desvios-padrão dos dois ativos que a compõem, dependendo somente das proporções w_1 e w_2. Esta característica pode ser verificada na Figura 5. Verifica-se ainda que as combinações das proporções dos ativos situadas na linha tracejada com pontos (trecho OA) não são eficientes, pois para cada nível de risco destas haverá outra combinação que resulta em um retorno superior.

Figura 5 – Fronteira eficiente (dois ativos de correlação perfeitamente negativa)



Fonte: Samanez (2007) adaptado.

Entretanto, cabe ressaltar que, neste caso, sempre haverá uma combinação dos ativos ($w_1{}^*$ e $w_2{}^*$) que resultará em uma carteira de risco nulo (ponto O da Figura 5), conforme exposto nos cálculos abaixo.

Utilizando a equação 24:

$$\sigma_c = w_1\sigma_1 - (1 - w_1)\sigma_2 = 0 \;\therefore\; w_1\sigma_1 - \sigma_2 + w_1\sigma_2 = 0 \;\therefore\; w_1(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_2$$

$$w_1{}^* = \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad e \quad w_2{}^* = 1 - w_1{}^*$$

Utilizando a equação 25:

$$\sigma_c = -w_1\sigma_1 + (1 - w_1)\sigma_2 = 0 \; - w_1\sigma_1 + \sigma_2 - w_1\sigma_2 = 0 \;\therefore\; w_1(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_2$$

$$w_1{}^* = \frac{\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad e \quad w_2{}^* = 1 - w_1{}^*$$

2.1.3.1.3. Correlação não perfeita

Considerando que $w_2 = 1 - w_1$, e reescrevendo a equação 15, tem-se:

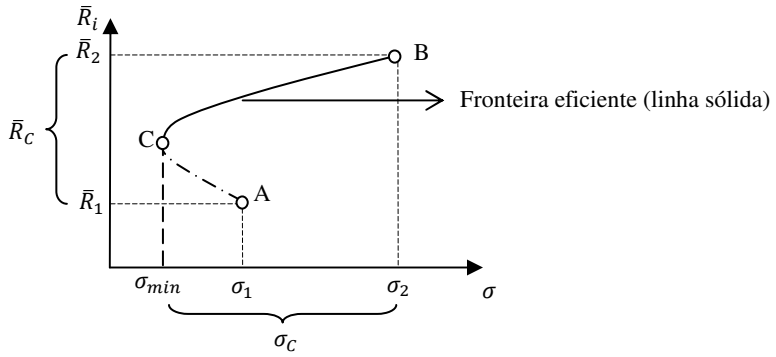
$$\sigma_c = \sqrt{w_1{}^2\sigma_1{}^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2{}^2 + 2w_1(1 - w_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \qquad (26)$$

Nota-se, portanto, que o risco da carteira possui relação não-linear com os desvios-padrão dos dois ativos que a compõem. Esta característica pode ser

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

verificada na Figura 6. Verifica-se ainda que as combinações das proporções dos ativos situadas na linha tracejada com pontos (trecho AC) não são eficientes, pois para cada nível de risco destas haverá outra combinação que resulta em um retorno superior.

Figura 6 – Fronteira eficiente (dois ativos de correlação não perfeita)



Fonte: Elaboração própria.

Cabe ressaltar que, neste caso, nunca haverá uma combinação dos ativos que resultará em uma carteira de risco nulo. Entretanto, torna-se útil a análise da composição de carteira onde esta obterá seu risco mínimo (ponto C da Figura 6), conforme exposto nos cálculos abaixo. Para se atingir o risco mínimo e alcançar as proporções ótimas dos ativos ($w_1{}^*$ e $w_2{}^*$), basta realizar a derivação parcial da equação 26, em relação a w_1, e igualá-la a zero.

$$\frac{\partial \sigma_c}{\partial w_1} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{2w_1\sigma_1{}^2 - 2(1-w_1)\sigma_2{}^2 + 2(1-w_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 2w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sqrt{w_1{}^2\sigma_1{}^2 + (1-w_1)^2\sigma_2{}^2 + 2w_1(1-w_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}} = 0 \quad \therefore$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\frac{2w_1\sigma_1{}^2 - 2\sigma_2{}^2 + 2w_1\sigma_2{}^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sqrt{w_1{}^2\sigma_1{}^2 + (1-w_1)^2\sigma_2{}^2 + 2w_1(1-w_1)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}} = 0 \quad \therefore$$

$$2w_1\sigma_1{}^2 - 2\sigma_2{}^2 + 2w_1\sigma_2{}^2 + 2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 4w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 0 \quad \therefore$$

$$w_1\sigma_1{}^2 - \sigma_2{}^2 + w_1\sigma_2{}^2 + \sigma_1\sigma_2\rho_{12} - 2w_1\sigma_1\sigma_2\rho_{12} = 0 \quad \therefore$$

$$w_1(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + -2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}) = \sigma_2{}^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \quad \therefore$$

$$w_1{}^* = \frac{\sigma_2{}^2 - \sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + -2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}} \quad e \quad w_2{}^* = 1 - w_1{}^* \tag{27}$$

No caso particular de correlação nula, utilizando a equação 27, as proporções dos ativos ($w_1{}^*$ e $w_2{}^*$) nas quais se atingiria o risco mínimo seriam:

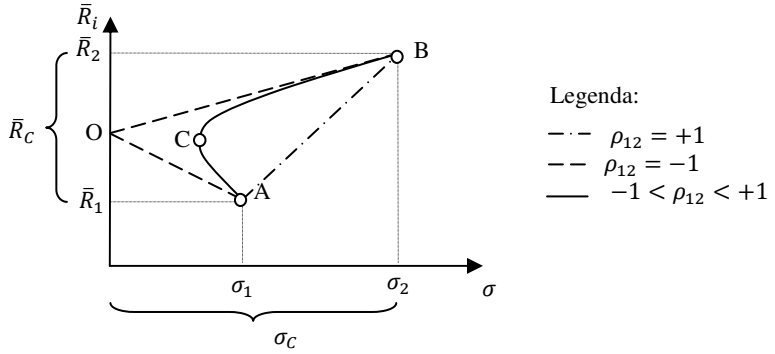
$$w_1{}^* = \frac{\sigma_2{}^2}{\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2} \quad e \quad w_2{}^* = 1 - w_1{}^*$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

2.1.3.1.4. Resumo dos resultados

Com base no exposto nas seções anteriores, verifica-se que uma carteira composta por dois ativos com diferentes correlações de retorno poderá obter variados níveis de risco, podendo inclusive anulá-lo. A Figura 7 e Tabela 1 auxiliam na visualização desta constatação.

Figura 7 – Fronteira eficiente (dois ativos de diferentes correlações)



Fonte: Elaboração própria.

Tabela 1 – Retorno esperado e risco de uma carteira composta por dois ativos de risco

Correlação	Retorno esperado	Desvio padrão
Perfeitamente positiva ($\rho_{12} = +1$)	$[\bar{R}_1; \bar{R}_2]$	$[\sigma_1; \sigma_2]$
Perfeitamente negativa ($\rho_{12} = -1$)	$[\bar{R}_1; \bar{R}_2]$	$[0; \sigma_2]$
Demais casos ($-1 < \rho_{12} < +1$)	$[\bar{R}_1; \bar{R}_2]$	$[\sigma_{min} \neq 0; \sigma_2]$

Fonte: Elaboração própria.

2.1.4. Modelo de índice único

O modelo de índice único tem como objetivo estimar o retorno esperado de um ativo ou uma carteira de ativos, relacionando-o com o desempenho de um índice *benchmark* que representa o retorno do mercado. A sua vantagem em relação ao proposto por Markowitz é a sua simplicidade na otimização de carteiras quando compostas por vários títulos. No modelo de Markowitz, a quantidade de covariâncias necessárias para se calcular o risco de uma carteira com muitos títulos tende a crescer exponencialmente (na ordem de $N^2 - N$), conforme exposto na Seção 2.1.2.3.3, e para otimizá-la poderá ser necessário um esforço computacional razoavelmente elevado.

Portanto, estabelecendo uma relação direta com o retorno de um ativo com o retorno de mercado, tem-se a seguinte equação:

$$R_i = \mathrm{a}_i + \beta_i R_m \tag{28}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

onde a_i é a componente do retorno do ativo i que independe das oscilações de mercado, β_i é a constante que mede a variação esperada no retorno do ativo i, dada uma variação no índice que representa o mercado e R_m é o retorno do *benchmark* que representa o mercado.

Considerando que a componente do modelo a_i é uma variável aleatória sujeita a erro, pode-se substituí-la na equação 28 por $\alpha_i + e_i$, onde α_i é o valor esperado de a_i e e_i é o seu componente aleatório ou incerto (ou seja, a parte do retorno do ativo não explicada pelo mercado) obtendo-se a seguinte equação:

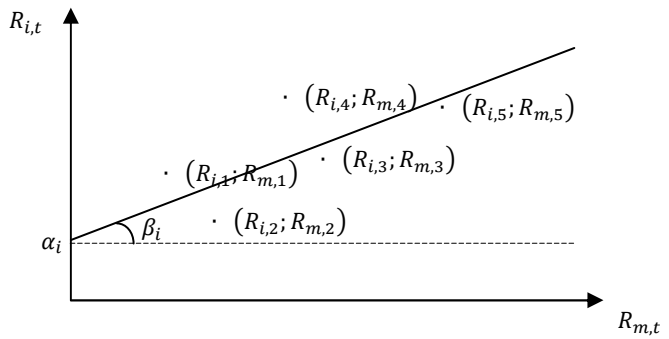
$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \tag{29}$$

Utilizando o conceito de regressão linear em uma série de retornos do ativo i e do mercado, tem-se:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{m,t} + e_{i,t} \tag{30}$$

A Figura 8 representa a reta de regressão linear com base no modelo de índice único.

Figura 8 – A reta de regressão linear no modelo de índice único



Fonte: Elaboração própria.

Tendo em vista que o processo gerador dos retornos do ativo do modelo é descrito por uma equação de regressão linear que relaciona os retornos do ativo aos retornos de um índice de mercado, deve-se considerar, portanto, as seguintes premissas:

(i) o erro aleatório é normalmente distribuído e com média igual a zero. Ou seja, o valor esperado do erro aleatório da regressão é zero: $E(e_i) = \bar{e}_i = 0$;

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

(ii) o erro aleatório não é correlacionado com o mercado, ou seja, a covariância entre seu erro e o retorno da carteira de mercado é igual a zero: $E[(e_i - \bar{e}_i)(R_m - \bar{R}_m)] = 0$;

(iii) os retornos dos ativos relacionam-se somente por meio da carteira de mercado. Isso significa que o único motivo pelo qual os retornos das ações variam conjuntamente e de forma sistemática é a relação desses retornos com o retorno da carteira de mercado. Estatisticamente, isso significa que a covariância entre os erros aleatórios da regressão de qualquer par de ativos é igual a zero: $COV(e_i, \bar{e}_i) = 0$.

2.1.4.1. Retorno esperado de um ativo no modelo de índice único

Utilizando a equação 29 e a primeira premissa exposta na seção anterior, tem-se:

$$E(R_i) = \bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{R}_m \tag{31}$$

onde $\bar{R}_m$ é o retorno médio do *benchmark* que representa o mercado.

2.1.4.2. Retorno esperado de uma carteira no modelo de índice único

O retorno esperado de uma carteira no modelo de índice único é representado também pela equação 7:

$$E(R_c) = \bar{R}_c = \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{R}_i \tag{7}$$

2.1.4.3. Risco de um ativo no modelo de índice único

Utilizando o conceito de variância exposto na Seção 2.1.2.2 e as equações 29 e 31, tem-se:

$$\begin{aligned}
{\sigma_i}^2 &= E(R_i - \bar{R}_i)^2 = E(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i - \alpha_i - \beta_i \bar{R}_m)^2 \\
&= E(\beta_i (R_m - \bar{R}_m) + e_i)^2 \\
&= {\beta_i}^2 \underbrace{E(R_m - \bar{R}_m)^2}_{{\sigma_m}^2} - \underbrace{2\beta_i E(R_m - \bar{R}_m) E(e_i)}_{0} + \underbrace{E(e_i)^2}_{{\sigma_{e_i}}^2} = \\
&= {\beta_i}^2 {\sigma_m}^2 + {\sigma_{e_i}}^2
\end{aligned} \tag{32}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Nota-se, portanto, que no modelo de índice único o risco de um ativo é composto por duas parcelas. A primeira $\left({\beta_i}^2{\sigma_m}^2\right)$ diz respeito ao risco sistêmico e a segunda $\left({\sigma_{e_i}}^2\right)$ representa a variabilidade dos retornos do ativo que não é explicada pela variabilidade do retorno do mercado.

2.1.4.4. Risco de uma carteira de ativos no modelo de índice único

O risco de uma carteira de ativos no modelo de índice único é representado pela equação abaixo:

$$ {\sigma_c}^2 = {\beta_c}^2{\sigma_m}^2 + {\sigma_{e_c}}^2 \tag{33} $$

Para: $\beta_c = \sum_{i=1}^{N} w_i\beta_i$ e ${\sigma_{e_c}}^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i{\sigma_{e_i}}^2$

onde β_c é o *beta* da carteira c.

2.1.4.4.1. Covariância de retorno de ativos no modelo de índice único

Desenvolvendo a equação 12 da covariância de retorno de ativos com as equações 29 e 31 do modelo de índice único, tem-se:

$$ \begin{aligned} \sigma_{ij} &= E\{[R_i - \bar{R}_i][R_j - \bar{R}_j]\} \\ &= E\{[\alpha_i + \beta_i R_m + e_i - \alpha_i - \beta_i\bar{R}_m][\alpha_j + \beta_j R_m + e_j - \alpha_j - \beta_j\bar{R}_m]\} \\ &= E\{[\beta_i(R_m - \bar{R}_m) + e_i][\beta_j(R_m - \bar{R}_m) + e_j]\} \\ &= E\{[\beta_i\beta_j(R_m - \bar{R}_m)^2 + \beta_i(R_m - \bar{R}_m)e_j + e_i\beta_j(R_m - \bar{R}_m) + e_ie_j]\} \\ &= \underbrace{E\{\beta_i\beta_j(R_m - \bar{R}_m)^2\}}_{\beta_i\beta_j{\sigma_m}^2} + \underbrace{E\{\beta_i(R_m - \bar{R}_m)e_j\} + E\{e_i\beta_j(R_m - \bar{R}_m)\} + E\{e_ie_j\}}_{0} \\ &= \beta_i\beta_j{\sigma_m}^2 \end{aligned} \tag{34} $$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

2.1.4.4.2. Diversificação de carteira no modelo de índice único

Utilizando a mesma abordagem da Seção 2.1.2.3.3, considerando uma carteira composta por N títulos em proporções iguais, ou seja, $w_i = \frac{1}{N}$, tem-se:

$$\sigma_{e_c}{}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\sigma_{e_i}{}^2 \tag{35}$$

Substituindo a equação 35 na equação 33, e considerando um N extremamente elevado, tem-se:

$$\sigma_c{}^2 = \beta_c{}^2\sigma_m{}^2 + \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{N}\sigma_{e_i}{}^2}_{0} = \beta_c{}^2\sigma_m{}^2 \tag{36}$$

Considerando que σ_m é constante, no modelo de índice único, o risco de uma carteira amplamente diversificada está relacionada diretamente com o *beta* dos seus ativos (β_i) e, portanto, este indicador pode ser considerado como o risco sistemático.

2.1.4.5. Otimização de carteira no modelo de índice único

Assim como exposto na Seção 2.1.3, onde se utilizou uma programação linear para otimização de carteira no contexto do princípio de Markowitz, a seguir, se encontra a programação linear para otimização de carteiras no contexto do modelo de índice único, considerando as equações 32 e 34.

$$\text{MIN} \quad \sum_{i=1}^{N} w_i{}^2\left(\beta_i{}^2\sigma_m{}^2 + \sigma_{e_i}{}^2\right) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{N} w_i w_j\left(\beta_i\beta_j\sigma_m{}^2\right) - \sigma_c{}^2 \qquad (PL2)$$

$$\text{s.a.} \quad \bar{R}_c = \sum_{i=1}^{N} w_i\bar{R}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$0 \leq w_i \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

A função objetivo da PL2 representa a equação de risco de uma carteira dado certo nível de variância ($\sigma_c{}^2$).

As restrições da PL2 representam a equação de retorno de uma carteira de ativos (ver Seção 2.1.1.4) e as condições básicas para a composição de uma carteira com N ativos com pesos relativos w_i.

2.1.4.6. Estimativa do *beta*

O *beta* de um ativo, conforme exposto na equação 30, é a inclinação da reta de regressão linear que explica o retorno de um ativo. Utilizando, portanto, o método de minimização dos quadrados dos erros aleatórios, tem-se:

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R_m)}{\sigma_m{}^2} = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m{}^2} \tag{37}$$

onde σ_{im} é a covariância dos retornos do ativo i e da carteira de mercado.

2.1.4.6.1. Variáveis de determinação do *beta*

A seguir, serão comentadas as variáveis que determinam o *beta* de uma empresa, na visão de Samanez (2007):

(i) risco do negócio – está associado à ciclicidade das receitas e custos operacionais da empresa (alavancagem operacional). Evidências mostram que empresas cujas receitas são mais dependentes do ciclo dos negócios têm *betas* mais altos;

(ii) risco financeiro – está relacionado à alavancagem financeira da empresa. Quanto maior for o endividamento da empresa maior será o seu risco financeiro e, consecutivamente, seu *beta*.

No que tange aos ativos financeiros negociados em bolsa de valores, quanto maior for a sua liquidez menor será o seu risco e, portanto, menor será o seu *beta*. Isto significa que um investidor exigirá um retorno mais elevado para aquelas ações de baixa liquidez.

2.1.5. Linhas de equilíbrio de mercado

A representação gráfica de retorno e risco é de grande importância para a avaliação de ativos e para a visualização da fronteira eficiente. Neste sentido, dois principais gráficos são amplamente utilizados. A principal diferença entre eles é

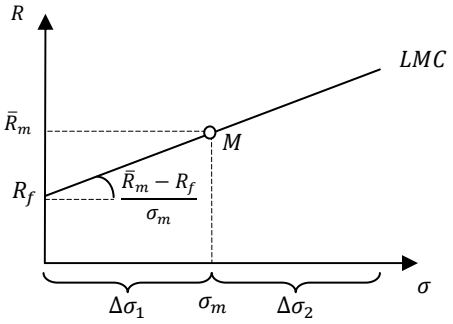
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

que um considera o risco total dos ativos e o outro considera apenas o risco de mercado. Tais gráficos serão apresentados a seguir.

2.1.5.1. Linha de mercado de capitais (LMC)

A LMC é a curva que relaciona o retorno esperado de certo ativo com o seu risco total, conforme indicado na Figura 9. O investidor, por meio dela, para compor um portfólio, poderá aplicar seus recursos no ativo livre de risco (com rentabilidade R_f e risco nulo) e na carteira de mercado M (com rentabilidade $\bar{R}_m$ e risco σ_m).

Figura 9 – Linha de mercado de capitais (LMC)



Fonte: Elaboração própria.

Dependendo do apetite ao risco do investidor, este poderá escolher entre os níveis de risco $\Delta\sigma_1$ ou $\Delta\sigma_2$. O investidor poderá obter o primeiro nível de risco (menor que o risco da carteira de mercado) investindo tanto no ativo livre de risco como na carteira de mercado M. Já para obter o segundo nível de risco (maior que o risco da carteira de mercado), o investidor deverá tomar recursos emprestados à taxa livre de risco e aplicá-los na carteira de mercado, alavancando-se.

Tendo em vista que se parte do suposto que a carteira de mercado é composta por todos os ativos que a compõe, pode-se dizer que ela é extremamente diversificada. Em um mercado eficiente[13] e em equilíbrio, os investidores valoram seus ativos tomando como referência carteiras eficientes altamente correlacionadas como esta (SAMANEZ, 2007).

[13] Mercado com as seguintes características: muitos investidores pequenos, todos dispondo das mesmas informações e expectativas a respeito dos títulos; nenhuma restrição ao investimento, nenhum imposto e nenhum custo de transação, e investidores racionais, que encaram os títulos de maneira semelhantes e são avessos ao risco (GITMAN, 2004).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Assim, os investidores operam da mesma maneira na LMC, onde todos os ativos obterão a mesma rentabilidade esperada por unidade de risco assumido. Ou seja:

$$\frac{\bar{R}_i - R_f}{\sigma_i} = \frac{\bar{R}_m - R_f}{\sigma_m} \quad para\ \ i = 1\,, 2\,, \dots, N$$

Portanto, a equação da LMC pode ser dada por:

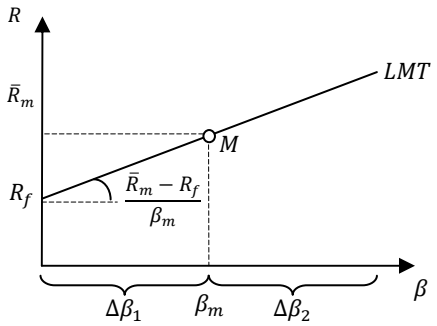
$$\bar{R}_i = R_f + \frac{\bar{R}_m - R_f}{\sigma_m}\sigma_i \tag{38}$$

Por fim, somente em um mercado em desequilíbrio, poderia existir um ativo que estivesse posicionado acima da LMC, oferecendo, portanto, um retorno superior ao ativo de mesmo risco localizado na LMC. Este ativo seria alvo de aquisição dos investidores e sofreria uma redução do seu retorno esperado.

2.1.5.2. Linha de mercado de títulos (LMT)

A LMT é a curva que relaciona o retorno esperado de certo ativo com o risco sistêmico, conforme indicado na Figura 10. Assim como na LMC, o investidor, por meio da LMT, poderá aplicar seus recursos no ativo livre de risco ou na carteira de mercado e comporá uma carteira altamente diversificada (eficiente).

Figura 10 – Linha de mercado de títulos (LMT)



Fonte: Elaboração própria.

Da mesma maneira que ocorre com a LMC, dependendo do apetite ao risco do investidor, este poderá escolher entre os níveis de risco $\Delta\beta_1$ ou $\Delta\beta_2$. O investidor poderá obter o primeiro nível de risco (menor que o risco da carteira de mercado) investindo tanto no ativo livre de risco como na carteira de mercado M. Já para obter o segundo nível de risco (maior que o risco da carteira de mercado),

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

o investidor deverá tomar recursos emprestados à taxa livre de risco e aplicá-los na carteira de mercado, alavancando-se.

Assim, os investidores operam da mesma maneira na linha de mercado de capitais, onde todos os ativos obterão a mesma rentabilidade esperada por unidade de risco assumido.

Ou seja[14]:

$$\frac{\bar{R}_i - R_f}{\beta_i} = \frac{\bar{R}_m - R_f}{\beta_m} = \bar{R}_m - R_f \quad para\ \ i = 1\,, 2\,, \dots, N$$

Portanto, a equação da LMT pode ser dada por:

$$\bar{R}_i = R_f + \frac{\bar{R}_m - R_f}{\beta_m}\beta_i = R_f + \beta_i\left(\bar{R}_m - R_f\right) \tag{39}$$

De acordo com Gitman (2004) a LMT pode ser deslocada principalmente por dois motivos:

(i) mudanças nas expectativas inflacionárias – modificações no ambiente macroeconômico podem impactar as expectativas inflacionárias e com isso alterar a taxa livre de risco[15]. Tendo em vista que a taxa livre de risco é o ponto da LMT que intercepta o eixo vertical, reduções ou incrementos da taxa deslocam a LMT para baixo ou para cima, respectivamente;

(ii) variações da aversão ao risco – quanto mais avesso ao risco for o investidor (ver Seção 2.1.2.1), maior será o prêmio de risco exigido por este. Portanto, tendo em vista que a inclinação da LMT é dada pelo prêmio de risco do mercado, quanto mais avesso for o investidor, maior será a inclinação da LMT. De forma análoga, tal movimento se aplica às reduções de aversão ao risco, ocasionando a redução da inclinação da LMT.

A Figura 11 exemplifica os deslocamentos acima expostos.

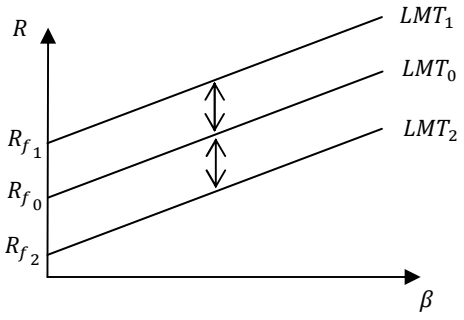
[14] Note que $\beta_m = 1$, pois conforme equação 37: $\beta_m = \frac{COV(R_m, R_m)}{\sigma_m{}^2} = \frac{\sigma_m{}^2}{\sigma_m{}^2} = 1$

[15] Considere que $R_f = k^* + PI$. Ou seja, o retorno do ativo livre de risco é formado pela soma da taxa real de juros (k^*) e do prêmio de inflação (PI).

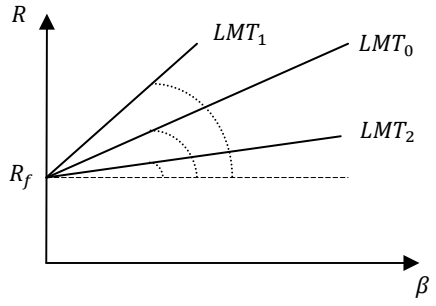
PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Figura 11 – Deslocamentos da LMT

a) mudanças nas expectativas inflacionárias



b) variações da aversão ao risco



Fonte: Elaboração própria.

2.1.6. *Capital asset pricing model* (CAPM)

O *capital asset pricing model* (CAPM) é um modelo de precificação de ativos criado por Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966) e está fundamentado na premissa de equilíbrio de mercado. O CAPM estabelece que o retorno esperado de um ativo é a soma de dois fatores: o primeiro refere-se à rentabilidade do ativo livre de risco (R_f) e o segundo refere-se ao prêmio de risco. A expressão abaixo resume este raciocínio:

$$Retorno\ esperado = Taxa\ livre\ de\ risco + Prêmio\ de\ risco$$

O modelo, portanto, parte da premissa que o investidor é racional e diversifica seus investimentos, a fim de evitar o risco diversificável de sua carteira. Portanto, somente o risco de mercado é considerado nesta abordagem. A equação 40 representa o modelo CAPM:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i(\bar{R}_m - R_f) \tag{40}$$

Portanto, quanto maior for o *beta* do ativo maior será o retorno esperado deste. Além disso, nota-se que o *beta* utilizado na equação 40 é calculado da mesma forma que o *beta* utilizado no modelo de índice único, ou seja, é a inclinação da reta de regressão linear entre os retornos do ativo analisado e o retorno da carteira de mercado (ver Seção 2.1.4.6).

Uma das principais características do CAPM é a sua simplicidade, tal fato que o tornou um dos modelos mais utilizados entre empresas, investidores e analistas (SAMANEZ, 2007).

O fato do CAPM considerar os *betas* constantes ao longo do tempo é uma das principais críticas relativas ao modelo e, por isso, sua utilização fica restrita a

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

análises uniperiódicas. Na prática, os *betas* podem mudar ao longo do tempo, à medida que as empresas mudam seu risco de negócio e seu risco financeiro (ver Seção 2.1.4.6.1). Portanto, um período muito grande de análise invalida a suposição de um *beta* constante e proporciona estimadores muito pobres ou sem sentido econômico ou estatístico (SAMANEZ, 2007).

2.1.6.1. Premissas básicas do CAPM

De acordo com Jensen (1968), o CAPM está baseado em cinco principais premissas:

(i) todos os investidores são avessos ao risco e são maximizadores de suas curvas uniperiódicas de utilidade marginal da riqueza;

(ii) todos os investidores têm decisões idênticas e expectativas homogêneas em relação a investimentos futuros;

(iii) todos os investidores estão capacitados para escolher portfólios somente com base nas expectativas de retorno e risco dos ativos;

(iv) não há restrição ao investimento, imposto e custo de transação;

(v) todos os ativos são infinitamente divisíveis.

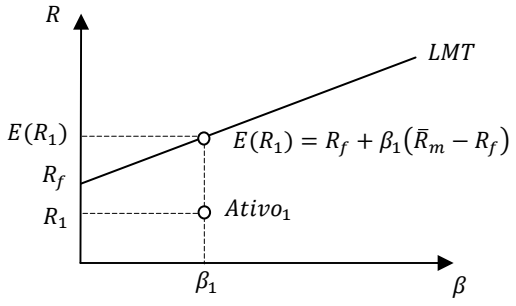
2.1.6.2. O CAPM e a LMT

Como se pode observar por meio das equações 39 e 40, a fórmula do CAPM é a reta da LMT. Utilizando o CAPM como modelo para precificação de ativos, os investidores adquiririam os ativos localizados acima da LMT, pois, por meio destes, conseguiriam retorno superior ao ativo de mesmo risco. De forma análoga, ativos localizados abaixo da LMT deveriam ser rejeitados, pois haveria um ativo de risco idêntico com retorno superior ao destes. A Figura 12 auxilia na visualização desta análise.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

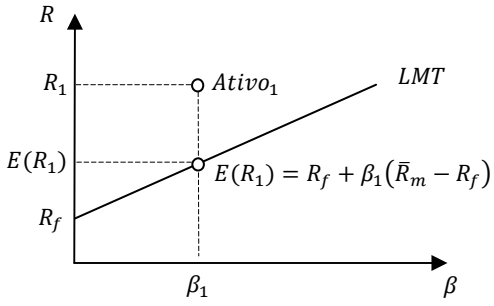
Figura 12 – O CAPM e a LMT

a) ativos localizados abaixo da LMT



Conclusão: não investe no ativo 1, pois $R_1 < E(R_1)$

b) ativos localizados acima da LMT



Conclusão: investe no ativo 1, pois $R_1 > E(R_1)$

Fonte: Elaboração própria.

2.2. Avaliação de desempenho de carteiras de ativos

2.2.1. Tipos de dados para avaliação

A avaliação de desempenho de carteiras de ativos exige coleta e tratamento de dados e, portanto, pode ser considerada uma abordagem econométrica. Neste sentido, Gujarati (2006) ressalta que os tipos de dados disponíveis para avaliação empírica econométrica são: séries temporais, dados em corte transversal e combinados.

2.2.1.1. Séries temporais

Uma série temporal é um conjunto de observações dos valores que uma variável assume em diferentes momentos do tempo. Esses dados podem ser coletados a intervalos regulares, como diariamente (por exemplo, preço de ações), semanalmente, mensalmente, trimestralmente, anualmente ou decenalmente (GUJARATI, 2006).

2.2.1.2. Dados em corte transversal

Dados em corte transversal são aqueles em que uma ou mais variáveis foram coletadas no mesmo espaço de tempo (GUJARATI, 2006).

2.2.1.3. Dados combinados

Nos dados combinados, há elementos tanto de séries temporais, quanto de corte transversal. Um tipo especial de dados combinados são os dados em painel, longitudinais ou de micropainel, nos quais a mesma unidade em corte transversal

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

é pesquisada ao longo do tempo. Exemplo: num censo habitacional, cada domicílio é entrevistado para verificar se houve alguma alteração nas condições da residência e das finanças desse domicilio desde o último levantamento (GUJARATI, 2006).

2.2.2. Principais índices de desempenho

Os principais índices de desempenho identificados no estado da arte de finanças podem ser categorizados por duas abordagens.

O primeiro grupo de índices de desempenho está baseado na abordagem clássica de finanças, tais como o índice de Sharpe (1966), de Treynor (1965) e de Jensen (1968).

O segundo grupo de índices de desempenho está baseado na abordagem moderna de finanças, tais como o índice de Sortino (SORTINO; PRICE, 1994), índice de Modigliani e Modigliani (1997) e o índice Omega (KEATING; SHADWICK, 2002a e 2002b).

As próximas seções apresentam detalhadamente cada um dos índices acima citados.

2.2.2.1. Índice de Sharpe (*ISh*)

O índice de Sharpe representa o diferencial de retorno por unidade de risco de uma carteira. O ISh é dado pela razão entre o seu prêmio de risco (diferença entre o retorno da carteira analisada e do retorno do ativo livre de risco) e o seu risco total. Logo, o índice de Sharpe pode ser representado pela equação 41:

$$ISh_c = \frac{\bar{R}_c - R_f}{\sigma_c} \tag{41}$$

onde ISh_c é o índice de Sharpe da carteira c.

Nota-se, portanto, que o ISh é a inclinação da LMC (ver Seção 2.1.5.1).

2.2.2.2. Índice de Treynor (*IT*)

O índice de Treynor representa o diferencial de retorno por unidade de risco sistemático de uma carteira. O IT é calculado por meio da divisão do prêmio de risco (diferença entre o retorno da carteira analisada e do retorno do ativo livre de risco) e o risco sistemático β. O autor parte do pressuposto de que os

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

administradores possuem carteiras bem diversificadas, estando, assim, sujeitos apenas ao risco de mercado medido pelo *beta*. Este índice se difere do ISh pelo fato de trabalhar com o *beta* (β) do ativo e não o com o desvio-padrão (σ) de seus retornos. Logo, o índice de Treynor pode ser representado pela equação 42:

$$IT_c = \frac{\bar{R}_c - R_f}{\beta_c} \tag{42}$$

onde IT_c é o índice de Treynor da carteira c.

Nota-se, portanto, que o IT é a inclinação da LMT (ver Seção 2.1.5.2).

2.2.2.3. Índice de Jensen (*IJ*)

Jensen (1968) ressalta que, na avaliação de desempenho de uma carteira de ativos, devem-se considerar duas principais dimensões:

(i) habilidade do gestor da carteira em obter retornos crescentes com base na sua capacidade de previsão de resultados futuros sobre os preços dos ativos;

(ii) habilidade do gestor da carteira em minimizar os riscos da carteira por meio de diversificação eficiente.

O índice proposto pelo autor (também conhecido como *alfa* de Jensen) está fundamentado na primeira dimensão exposta e representa o excesso de retorno obtido pelo portfólio, considerando o seu valor esperado, com base no modelo de CAPM (ver Seção 2.1.6), conforme exposto na equação 43:

$$IJ_c = \bar{R}_c - \left[R_f + \beta_c\left(\bar{R}_m - R_f\right)\right] \tag{43}$$

onde IJ_c é o índice de Jensen da carteira c.

Logo, se o IJ é positivo, o gestor de carteira possui a habilidade de previsão e se o IJ é negativo, o gestor da carteira não a possui.

2.2.2.4. Índice de Sortino (*ISor*)

O índice de Sortino aborda o conceito de risco denominado *downside risk* (σ_{DR}), que considera no cálculo da variância dos retornos da carteira apenas as perdas financeiras, definidas a partir de um retorno mínimo aceitável (R_{min}), conforme representado na equação 44:

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

$$\sigma_{DR_c} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{T} MIN\left[0; \left(R_{c,t} - R_{min}\right)\right]^2}{T}} \tag{44}$$

onde σ_{DR_c} é o *downside risk* da carteira c.

O $ISor$ é calculado por meio da divisão do prêmio de risco (com base no R_{min}) pela unidade de risco de perda, representada pelo desvio de *downside risk*, conforme exposto na equação 45:

$$ISor_c\left(R_{min}\right) = \frac{\bar{R}_c - R_{min}}{\sigma_{DR_c}} \tag{45}$$

onde $ISor_c\left(R_{min}\right)$ é o índice de Sortino da carteira c, em função do R_{min}.

2.2.2.5. Índice de Modigliani & Modigliani (*M²*)

Modigliani e Modigliani (1997) propõem uma maneira diferenciada de se comparar uma carteira de ativos com o *benchmark* de mercado. Os autores introduzem o conceito de *risk-adjusted performance* (RAP) que representa o retorno da carteira analisada ajustado ao nível de risco do *benchmark*.

Por estarem no mesmo nível de risco, o RAP e o retorno da carteira de mercado podem ser comparados. A diferença destes retornos representa o quanto o portfólio analisado superou o *benchmark*, caso esta seja positiva, ou o quanto o portfólio obteve retorno inferior ao *benchmark*, caso esta seja negativa. Esta diferença foi intitulada pelo mercado de índice M^2, em referência ao nome dos autores desta teoria e pode ser representada por meio da equação 46:

$$M^2{}_c = RAP_c - R_m \tag{46}$$

Entretanto, para se obter o RAP, deve-se alavancar a carteira analisada a certa proporção d_i com um ativo livre de risco, compondo uma nova carteira c'. Assim, o risco desta nova carteira c' será:

$$\sigma_{c'} = (1 + d_i)\sigma_c \tag{47}$$

Como o risco da nova carteira c' deverá ser igual ao risco da carteira de mercado (σ_m), tem-se:

$$\sigma_{c'} = (1 + d_i)\sigma_c = \sigma_m \qquad \therefore \qquad d_i = \frac{\sigma_m}{\sigma_c} - 1 \tag{48}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Logo, o retorno da carteira c', também chamado de RAP_c, será:

$$RAP_c = R_{c'} = (1 + d_i)R_c - d_i R_f \tag{49}$$

Utilizando a equação 48 na equação 49, tem-se:

$$RAP_c = R_{c'} = \frac{\sigma_m}{\sigma_c} R_c - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_c} - 1\right) R_f = \frac{\sigma_m}{\sigma_c} R_c - \frac{\sigma_m}{\sigma_c} R_f + R_f$$

$$= \frac{\sigma_m}{\sigma_c}\left(R_c - R_f\right) + R_f = \sigma_m \frac{\left(R_c - R_f\right)}{\sigma_c} + R_f \tag{50}$$

Verifica-se que o RAP_c é função do índice de Sharpe da carteira c (ISh_c) e, portanto, pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$RAP_c = \sigma_m ISh_c + R_f \tag{51}$$

Assim, a análise de desempenho de uma carteira com base no conceito de RAP e com a utilização do índice de Sharpe retornam os mesmos resultados. O grande diferencial do índice M^2 é a utilização de uma taxa como medida de análise, o que é mais compreensível por não especialistas financeiros. Além disso, Securato (1998) observa outra vantagem do índice M^2 em relação ao índice de Sharpe. Há casos onde este último índice apresenta valor negativo e, portanto, não possui significado útil para análise. Tal fato não ocorre com aquele índice.

Como ${M^2}_c$ é a diferença entre o RAP_c e o retorno de mercado, podemos reescrever a equação 46:

$${M^2}_c = RAP_c - R_m = \sigma_m ISh_c + R_f - R_m \tag{52}$$

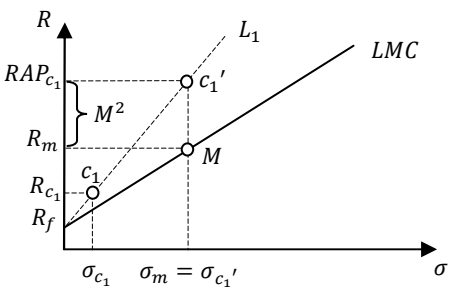
Tendo em vista, portanto, que nesta abordagem considera-se o risco de se obter um retorno inferior ao retorno do mercado, Modigliani e Modigliani (1997) ressaltam que o conceito do RAP está em consonância com a teoria de *downside risk*.

A Figura 13 representa o índice M^2 para duas carteiras: uma carteira c_1 com retorno inferior ao do mercado e uma carteira c_2 com retorno superior ao do mercado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

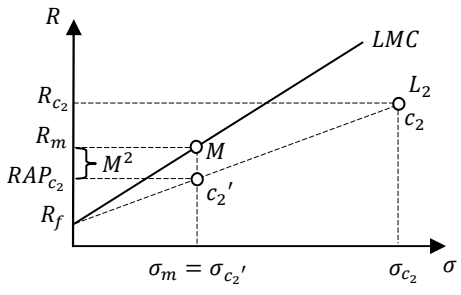
Figura 13 – Índice *M²*

a) Carteira c_1 com retorno inferior à do mercado



Conclusão: índice M^2 positivo

b) Carteira c_2 com retorno superior à do mercado



Conclusão: índice M^2 negativo

Fonte: Modigliani e Modigliani (1997) adaptado.

As linhas L_1 e L_2 representam, respectivamente, as carteiras c_1 e c_2 alavancadas a vários níveis de d_i. Os pontos localizados nesta linha à esquerda das respectivas carteiras originais representam a redução do risco destas por meio da incorporação de ativos livre de risco. E os pontos localizados nesta linha à direita das respectivas carteiras originais representam o aumento do risco destas por meio da alavancagem ocasionada pelo empréstimo de recursos à taxa livre de risco.

Nota-se, ainda na Figura 13, que a inclinação de quaisquer das linhas L_1, L_2 e LMC representam os seus respectivos índices de Sharpe, ou seja, da carteira c_1, da carteira c_2 e da carteira de mercado. Assim, fica fácil evidenciar a carteira com maior retorno por unidade de risco.

Em suas notas finais Modigliani e Modigliani (1997) chamam atenção para o fato de que as taxas livres de risco podem variar com o tempo. Ou seja, embora estas sejam livres de risco em termos de liquidez e resgate, visto que se baseiam em títulos do governo, elas apresentam variabilidade em relação ao tempo, significando que $\sigma_f \neq 0$. Por conta deste fato, Securato (1998) criou o índice Modigliani Modificado (MM), incorporando ao índice M^2 a componente de variância dos retornos do ativo livre de risco.

Além disso, Pádua et al. (1998) criaram os índices G e GA que, em contraponto ao índice M^2, ajustam o risco da carteira de mercado ao risco da carteira analisada ao invés de ajustar o risco da carteira analisada ao risco de mercado, retornando, entretanto, resultados similares ao do índice M^2 e ao do índice de Sharpe.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Posteriormente, Securato e Málaga (2003) criaram o índice M^3 que incorpora os riscos referentes à correlação dos ativos que compõe a carteira analisada e o *benchmark*. Segundo os autores, o M^3 é mais indicado para análise de seleção de novas carteiras.

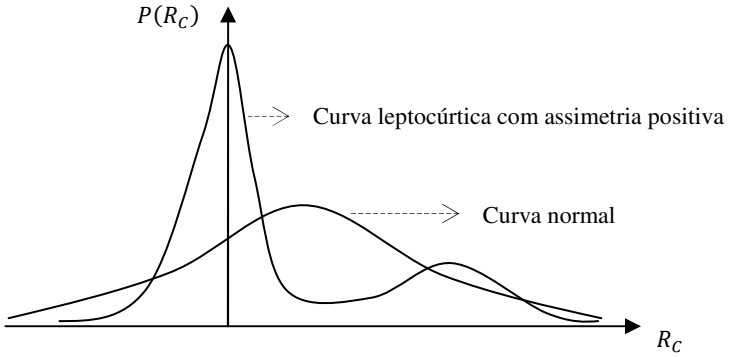
2.2.2.6. Índice Omega (Ω)

O índice Omega foi criado por Keating e Shadwick, em contraponto à premissa assumida pelos cinco anteriores índices analisados, de que os dois primeiros momentos da distribuição dos retornos dos ativos financeiros (média e variância) a descrevem totalmente. Os autores ressaltam a fragilidade desta premissa quando afirmam que os retornos dos ativos nem sempre seguem uma distribuição normal e, portanto, os demais momentos da distribuição dos retornos, tais como assimetria e curtose, devem ser considerados na análise de ativos.

Favre-Bulle e Pache (2003) reforçam esta idéia e demonstram, por meio da expansão da série de Taylor, que a função utilidade do investidor não é quadrática (ou seja, não depende somente da média e da variância) e, portanto, para a resolução de problemas de maximização de utilidade, há necessidade de se incorporar os demais momentos de sua distribuição, tais como os de terceira e quarta ordem.

Para melhor visualização desta afirmação, a Figura 14 representa duas distribuições de retorno de carteiras com média e desvios-padrão iguais, porém se diferenciam no que tange às suas simetrias (momento de terceira ordem) e curtoses (momento de quarta ordem).

Figura 14 – Distribuição de retornos com simetria e curtose diferentes



Fonte: Keating e Shadwick (2002a e 2002b) adaptado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Para análise de uma carteira na perspectiva do índice Omega, deve-se primeiramente estabelecer um retorno mínimo aceitável (R_{min}), em consonância, portanto, com a abordagem de *downside risk*. Nota-se, além disso, que o R_{min} é uma função da preferência do investidor.

Após esta definição, o índice calcula a razão da probabilidade de se obter um retorno superior a este limite, sobre a probabilidade de se obter um retorno inferior ao mesmo, conforme pode ser observado na equação 53.

$$\Omega_c(R_{min}) = \frac{\int_{R_{min}}^{b} [1 - F(x)]dx}{\int_{a}^{R_{min}} F(x)dx} \tag{53}$$

onde $\Omega_c(R_{min})$ é o índice Omega da carteira c em função de R_{min} e $F(x)$ é a função acumulada da distribuição de probabilidade de R_c definida no intervalo de retorno $[a; b]$[16].

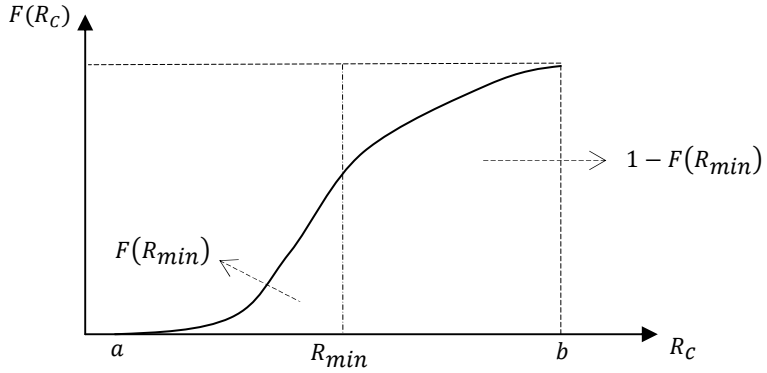
Nota-se, por meio da equação 53, que o único ponto onde Omega possui valor unitário é aquele onde R_{min} coincide com a média da distribuição de probabilidade dos retornos. Ou seja, neste caso a probabilidade de ganhos é igual à probabilidade de perdas.

A Figura 15 representa as áreas das integrais que compõem o índice Omega. Nota-se, por meio dela, que todas as informações disponíveis na distribuição de probabilidade do retorno da carteira c (incluindo todos os momentos, tais como assimetria e curtose) são incorporadas pelo índice.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

[16] Caso o intervalo seja infinito em alguma das caldas da distribuição, a respectiva integral não existirá. Entretanto, segundo os autores do índice, este fato não ocorre na prática, pois as observações dos retornos dos ativos são discretas.

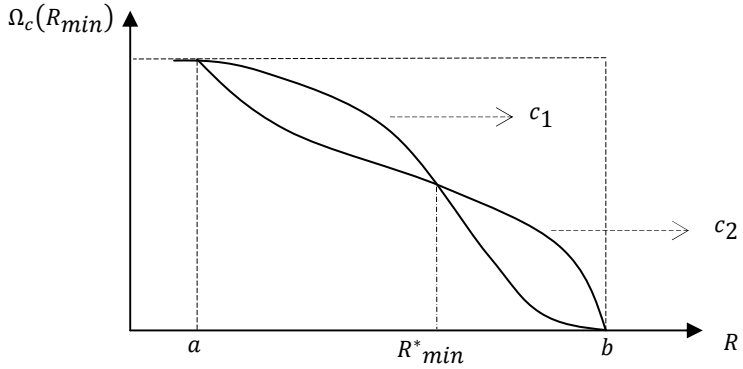
Figura 15 – Índice Omega



Fonte: Keating e Shadwick (2002a) adaptado.

A Figura 16 representa a sensibilidade do índice Omega – em relação ao risco mínimo aceitável – referente a duas carteiras distintas com distribuições normais de probabilidade de retornos, porém com médias e variâncias iguais. Nota-se que, até o nível de retorno $R^*{}_{min}$, a carteira c_1 seria a escolhida na perspectiva do índice Omega. Entretanto, no caso da adoção de um retorno mínimo aceitável superior a este ponto, a carteira c_2 seria a escolhida. Este efeito da percepção de ganho e perda do investidor não seria capturado na análise do índice Sharpe, demonstrando, portanto, que o índice Omega oferece mais informações inclusive nos casos onde a distribuição dos retornos é normal. Além disso, a Figura 16 demonstra a relação negativa entre a função Omega e o nível de R_{min}.

Figura 16 – Sensibilidade do índice Omega ao retorno mínimo aceitável



Fonte: Keating e Shadwick (2002a) adaptado.

Quanto à sensibilidade e ao erro do índice Omega em relação ao tamanho da amostra analisada, Favre-Bulle e Pache (2003) ressaltam que a quantidade mínima satisfatória para se obter resultados precisos e consistentes é de 200 observações.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Por fim, o teste de Jarque e Bera (1987) é, geralmente, utilizado em conjunto com a análise do índice Omega. Por meio deste teste, pode-se observar o quão próxima uma distribuição de probabilidade está da normalidade. Segue a forma de cálculo da estatística Jarque-Bera (JB_c) para avaliação da normalidade de uma distribuição de retorno de uma carteira c.

$$JB_c = T\left[\frac{\left({S_c}^2\right)}{6} + \frac{(K_c - 3)^2}{24}\right] \tag{54}$$

onde S_c e K_c são os coeficiente de assimetria e de curtose, respectivamente, da distribuição de probabilidade dos retornos da carteira c.

O Quadro 1 informa o método de cálculo destes coeficientes, expõe os seus possíveis resultados e respectivas interpretações.

Quadro 1 – Coeficientes de assimetria e curtose

Coeficiente	Fórmula de cálculo	Resultados
Assimetria	$S_c = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} \dfrac{\left(R_{c,t} - \bar{R}_c\right)^3}{T}}{(\sigma_c)^3}$	Se $S_c = 0$, então a distribuição é simétrica ($média = mediana = moda$). Se $S_c > 0$, então a distribuição é assimétrica positiva ($média > mediana > moda$). Se $S_c < 0$, então a distribuição é assimétrica negativa ($média < mediana < moda$).
Curtose	$K_c = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} \dfrac{\left(R_{c,t} - \bar{R}_c\right)^4}{T}}{(\sigma_c)^4}$	Se $K_c = 3$, então a distribuição é mesocúrtica (normal). Se $K_c > 3$, então a distribuição é leptocúrtica. Se $K_c < 3$, então a distribuição é platicúrtica.

Fonte: Gujarati (2006) adaptado.

Portanto, tendo em vista que uma distribuição normal possui $S = 0$ e $K = 3$, o valor esperado da sua estatística JB é igual a zero.

Segundo Gujarati (2006), a estatística JB segue assintoticamente (ou seja, para grandes amostras) uma distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade. Assim, por meio do teste de hipótese abaixo, rejeita-se a hipótese nula com $(1 - \alpha)$ de confiança caso a distribuição analisada não possua características normais.

$$H_0: JB = {\chi^2}_{\alpha,2}$$
$$H_1: JB > {\chi^2}_{\alpha,2}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Na prática, calcula-se o p-valor da estatística JB e verifica-se se este é maior ou menor que o nível de confiança pretendido.

2.2.2.7. Resumo, vantagens e desvantagens dos índices apresentados

O Quadro 2 resume as equações dos índices apresentados nesta seção e expõe suas principais vantagens e desvantagens.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012710/CA

Quadro 2 – Resumo, vantagens e desvantagens dos índices de desempenho

	Índices	Fórmula	Vantagens	Desvantagens
Abordagem clássica	Índice de Sharpe	$ISh_c = \frac{\bar{R}_c - R_f}{\sigma_c}$	- De fácil aplicação.	- Possui medida pouco compreensível para não especialistas financeiros. - Perde significado quando retorna valor negativo.
	Índice de Treynor	$IT_c = \frac{\bar{R}_c - R_f}{\beta_c}$	- O resultado é medido em taxa, bastante compreensível para não especialistas financeiros.	- Somente considera o risco sistemático. - Ajusta a carteira de mercado ao invés de ajustar a carteira analisada ao risco de mercado. - Perde significado quando retorna valor negativo.
	Índice de Jensen	$IJ_c = \bar{R}_c - [R_f + \beta_c(\bar{R}_m - R_f)]$	- Amplamente conhecido pelo mercado. - É medido em taxa, bastante compreensível para não especialistas financeiros.	- Somente considera o risco sistemático. - Ajusta a carteira de mercado ao invés de ajustar a carteira analisada ao risco de mercado.
Abordagem moderna	Índice de Sortino	$ISor_c(R_{min}) = \frac{\bar{R}_c - R_{min}}{\sigma_{DR_c}}$	- Considera apenas o risco de perda, por meio do *downside risk*.	- Perde significado quando retorna valor negativo.
	Índice de Modigliani & Modigliani	$M^2{}_c = \sigma_m IS_c + R_f - R_m$	- O resultado é medido em taxa, bastante compreensível para não especialistas financeiros.	- A metodologia pode ser de difícil compreensão para não especialistas financeiros, no sentido que tenta nivelar o risco da carteira analisada ao risco do *benchmark*.
	Índice Omega	$\Omega_c(R_{min}) = \frac{\int_{R_{min}}^{b} [1 - F(x)]dx}{\int_{a}^{R_{min}} F(x)dx}$	- Incorpora as informações de todos os momentos da distribuição de probabilidade dos retornos.	- Apresenta dificuldades para obtenção da curva de distribuição de probabilidade dos retornos.

Fonte: Autores citados na Seção 2.2.2. Elaboração própria.