4
O Teorema de Ambrosetti-Prodi para não linearidades Lipschitz

Nesse capítulo, a partir do teorema 3.2.1, demonstramos o Teorema abaixo, que tem hipóteses mais fracas para f.

Teorema 4.0.4 *Seja f, Lipschitz tal que*

$$\lim_{t\to-\infty} f'(t) = a < \lambda_1 < b = \lim_{t\to\infty} f'(t) < \lambda_2 \tag{4-1}$$

$$x \leq y \implies f'(x) \leq f'(y), \tag{4-2}$$

onde f' esteja definida. Para todo $w \in W_Y$, existe t_c tal que a função h associada a w é crescente à sua esquerda e decrescente à sua direita.

Prova: A demonstração é um argumento de aproximação: a função F do enunciado será aproximada por funções F_n associadas a não linearidades regulares, para as quais vale o teorema de Ambrosetti-Prodi. Na verdade, se obtivermos uma sequência de funções $(f_n) \in C^2(\Omega)$, $0 < {f_n}'' \leq M$, $\overline{{f_n}'(\mathbb{R})} = [a, b]$ que converge uniformemente a f, o problema estará resolvido. Com efeito, considere as seguintes funções

$$F(u) = -\Delta u - f(u)$$
$$F_n(u) = -\Delta u - f_n(u).$$

Para w tal que $g = w + \tilde{t}\varphi_1$ considere a função h relativa à F e a sequência de funções (h_n) relativas a F_n. É suficiente demonstrar que a sequência (h_n) converge uniformemente a h: cada h_n tem a *propriedade assintótica* e admite um único ponto de máximo local. Segue, pela convergência uniforme $h_n \to h$, que h tem a propriedade assintótica e não admite ponto de mínimo local.

Seja f uma função real com a propriedade (4-1) e seja (f_n) uma sequência, também com a propriedade (4-1), que converge uniformemente a f. Naturalmente, definimos funções F e F_n como acima. Dada $w \in W_Y$, definimos a função altura h, referente a F, e uma sequência de funções altura (h_n), referente a F_n. Mostramos que h_n converge uniformemente a h.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012848/CA

Fixe $\epsilon > 0$. Existe N tal que $n \geq N$ implica que $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{\mu(\Omega)}$.

$$\begin{aligned}
|h_n(t) - h(t)| &\leq |\lambda_1 - \int_\Omega f_n(u_n(t)) - \lambda_1 + \int_\Omega f(u(t)) \ | \\
&\leq \int_\Omega |f_n(u_n(t)) - f(u(t))| \\
&\leq \int_\Omega |f_n(u_n(t)) - f_n(u(t))| + \int_\Omega |f_n(u(t)) - f(u(t))| \\
&\leq \max\{|a|, |b|\} \int_\Omega |u_n(t) - u(t)| + \int_\Omega |f_n(u(t)) - f(u(t))| \\
&< \max\{|a|, |b|\} \int_\Omega |u_n(t) - u(t)| \ + \ \epsilon
\end{aligned}$$

Como $u_n(t) - u(t) = w_n(t) - w(t)$, resta demonstrar que, para $n \geq N$,

$$\int_\Omega |w_n(t) - w(t)| < \epsilon$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

O resultado é consequência de uma aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Considere as funções,

$$\begin{aligned}
K_t^n(w) : W_Y \to W_Y \ , \quad w \mapsto P_Y \tilde{f}_n(T^{-1}w + t\varphi_1) \\
K_t(w) : W_Y \to W_Y \ , \quad w \mapsto P_Y \tilde{f}(T^{-1}w + t\varphi_1)
\end{aligned}$$

onde $T = -\Delta - \gamma$ para $\gamma = (b + a)/2$. Vimos, na demonstração do teorema 1.0.1, que cada uma das funções acima é contração cuja constante de contração c independe de t e, como $\overline{f_n{}'(\mathbb{R})} = [a, b]$, tal constante também independe de n.

Observamos que, $w + K_t^n$ e $w + K_t$ são contrações para todo n e t e, portanto, admitem ponto fixo; sejam $z_n(t)$ e $z(t)$ os respectivos. Tome $n \geq N$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon(1 - c)/2d\mu(\Omega)^{\frac{1}{2}}$. Segue que

$$\begin{aligned}
&\|z_n(t) - z(t)\|_0 \\
=&\|(w + K_t^n)(z_n(t)) - (w + K_t)(z(t))\|_0 \\
=&\|K_t^n(z_n(t)) - K_t(z(t))\|_0 \\
\leq&\|K_t^n(z_n(t)) - K_t^n(z(t))\|_0 + \|K_t^n(z(t)) - K_t(z(t))\|_0 \\
\leq&c\|z_n(t) - z(t)\|_0 + \|P_Y[\tilde{f}_n(T^{-1}z(t) - t\varphi_1) - \tilde{f}(T^{-1}z(t) + t\varphi_1)]\|_0 \\
\leq&c\|z_n(t) - z(t)\|_0 + \|\tilde{f}_n(T^{-1}z(t) - t\varphi_1) - \tilde{f}(T^{-1}z(t) + t\varphi_1)\|_0 \\
<&c\|z_n(t) - z(t)\|_0 + \epsilon(1 - c)/d,
\end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012848/CA

donde, $c < 1$ implica que, para todo t

$$\|z_n(t) - z(t)\|_0 < \epsilon/d.$$

Agora, $z_n(t) = (w + K_t^n)(z_n(t)) = w + K_t^n(z_n(t))$ implica que

$$w = z_n(t) - K_n(z_n(t)) = (I - K_n)(z_n(t)),$$

donde

$$z_n(t) = (I - K_t^n)^{-1}(w) = (F_{t\varphi_1}^n \circ T^{-1})^{-1}(w) = T{F_{t\varphi_1}^n}^{-1}(w) = Tw_n(t),$$

e $T^{-1}z_n(t) = w_n(t)$. Analogamente, $T^{-1}z(t) = w(t)$. Por fim,

$$\|w_n(t) - w(t)\|_2 = \|T^{-1}(z_n(t) - z(t))\|_2 \leq d\|z_n(t) - z(t)\|_0 < \epsilon.$$

Resta mostrar que existe uma sequência $(f_n) \in C^2(\mathbb{R})$, $0 < {f_n}'' \leq M$, $\overline{{f_n}'(\mathbb{R})} = [a, b]$ que converge uniformemente a f. Em verdade, obtemos uma sequência em $C^\infty(\mathbb{R})$.

Afirmação 4.0.5 *Seja f uma função real com as propriedades* (4-1) *e* (4-2). *Existe uma sequência (f_n) que converge uniformemente a f tal que $(f_n) \in C^2(\mathbb{R})$, $0 < {f_n}'' \leq M$, $\overline{{f_n}'(\mathbb{R})} = [a, b]$.*

Prova: Obtemos o resultado para f' estritamente crescente. Considere a sequência

$$\psi_n(x) = \begin{cases} c_n e^{\frac{1}{x^2 - \frac{1}{n^2}}} & \text{se } x \in (-1/n, 1/n) \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

onde c_n é escolhido de forma que $\displaystyle\int_{-1/n}^{1/n} \psi_n(x)dx = 1$. Afirmamos que a sequência de funções reais

$$f_n(x) := \int_{x-1/n}^{x+1/n} f(y)\psi_n(x - y)dy$$

é tal que, $f_n \to f$ uniformemente, $\overline{{f_n}'(\mathbb{R})} = [a, b]$ e $0 < {f_n}'' \leq M_n$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012848/CA

A convergência uniforme decorre da seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(y)\psi_n(x-y)\ dy - f(x)\int_{x-1/n}^{x+1/n} \psi_n(x-y)\ dy\ | \\
&\leq |\int_{x-1/n}^{x+1/n} (f(y)-f(x))\psi_n(x-y)\ dy\ | \\
&\leq \max\{|a|,|b|\}\int_{x-1/n}^{x+1/n} |y-x|\psi_n(x-y)\ dy \\
&\leq \max\{|a|,|b|\}\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Agora, demonstramos os seguintes limites assintóticos, independentes de $n \in \mathbb{N}$.

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{f_n(t)}{t} = a\ , \quad \lim_{t\to\infty} \frac{f_n(t)}{t} = b.$$

Fixe $\epsilon > 0$ e tome N tal que $t \geq N$ implica que

$$\begin{aligned}
\frac{2\max\{|a|,|b|\}}{t} &< \frac{\epsilon}{2} \\
\left|\frac{f(t)}{t} - b\right| &< \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Deste modo, para $t \geq N$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n(t)}{t} - b\right| &\leq \left|\frac{f_n(t)}{t} - \frac{f(t)}{t}\right| + \left|\frac{f(t)}{t} - b\right| \\
&\leq \frac{2\max\{|a|,|b|\}}{t} + \left|\frac{f(t)}{t} - b\right| < \epsilon
\end{aligned}$$

Concluimos demonstrando que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 < {f_n}'' \leq M_n$. Pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
0 &= f(y)\psi_n(x-y)]_{x-1/n}^{x+1/n} \\
&= \int_{x-1/n}^{x+1/n} f'(y)\psi_n(x-y)\ dy - \int_{x-1/n}^{x+1/n} f(y)\psi_n'(x-y)\ dy \\
&= \int_{x-1/n}^{x+1/n} f'(y)\psi_n(x-y)\ dy - {f_n}'(x).
\end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012848/CA

donde, para $u = x - y$,

$$\begin{aligned}
f_n''(x) &= \int_{x-1/n}^{x+1/n} f'(y)\psi_n'(x-y)\ dy \\
&= -\int_{-1/n}^{1/n} f'(x-u)\psi_n'(u)\ du \\
&= -\int_{-1/n}^{0} f'(x-u)\psi_n'(u)\ du - \int_{0}^{1/n} f'(x-u)\psi_n'(u)\ du \\
&= \int_{-1/n}^{0} f'(x-u)\psi_n'(-u)\ du - \int_{-1/n}^{0} f'(x+u)\psi_n'(-u)\ du \\
&= \int_{-1/n}^{0} [f'(x-u) - f'(x+u)]\psi_n'(-u)\ du.
\end{aligned}$$

Como f' é estritamente crescente e limitada,

$$0 < f_n''(x) \leq \frac{2\max\{|a|,|b|\}\max\psi_n'}{n} = M_n.$$

Para obter o resultado para f' crescente, considere uma sequência (ψ_n) de gaussianas e as contas são análogas.

■

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1012848/CA