



Emília Carolina Santana Teixeira Alves

Os grupos de Mathieu

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Nicolau Corção Saldanha

Rio de Janeiro
Abril 2012



Emília Carolina Santana Teixeira Alves

Os grupos de Mathieu

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Nicolau Corção Saldanha

Orientador

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Carlos Tomei

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Jairo Bochi

Departamento de Matemática — PUC-Rio

Prof. Miriam del Milagro Abdón

Instituto de Matemática —UFF

Prof. Said Najati Sidki

Departamento de Matemática — UnB

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 16 de abril de 2012

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Emília Carolina Santana Teixeira Alves

Graduou-se em Licenciatura e Bacharelado em Matemática na Universidade Federal Fluminense - UFF.

Ficha Catalográfica

Alves, Emília

Os grupos de Mathieu /
Emília Carolina Santana Teixeira Alves; orientador: Nicolau
Corção Saldanha. — Rio de Janeiro : PUC-Rio, Departa-
mento de Matemática, 2012.

v., 94 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade
Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Dissertação. 2. Grupos de Mathieu.
3. grupos esporádicos. 4. grupos simples. 5. código de Golay.
6. sistema de Steiner. I. Saldanha, Nicolau. II. Pontifícia
Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de
Matemática. III. Título.

CDD: 510

Dedico essa dissertação as pessoas que amo incondicionalmente e dão sentido à minha vida: a minha mãe Maria das Graças e ao meu irmão Rômulo.

Agradecimentos

À Deus, força e conforto em todos os momentos.

À minha mãe e ao meu irmão por todo amor e estímulo.

À todos os professores do DMAT em especial ao Professor Nicolau Saldanha pelo apoio e paciência de sempre e pelo incentivo para a realização desse trabalho.

À professora Miriam Abdón pelo suporte intelectual e emocional.

Aos meus amigos pela compreensão, incentivo e toda ajuda prestada na realização dessa dissertação.

Aos funcionários do DMat da PUC-Rio por toda a ajuda e disponibilidade, especialmente às queridas Creuza e Kátia.

Ao CNPq, a CAPES e à PUC-Rio pelo suporte dado, sem os quais não seria possível a realização deste trabalho.

Resumo

Alves, Emília; Saldanha, Nicolau. **Os grupos de Mathieu**. Rio de Janeiro, 2012. 94p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Os cinco grupos de Mathieu, M_{24} , M_{23} , M_{22} , M_{12} e M_{11} , compõem a primeira família de grupos esporádicos do Teorema de classificação dos grupos simples finitos. Neste trabalho apresentaremos os grupos de Mathieu e alguns objetos relacionados a construção deles como o Código de Golay e o Sistema de Steiner. Também, no decorrer do texto, surgiram espontaneamente alguns subgrupos dos grupos de Mathieu.

Palavras-chave

Grupos de Mathieu; grupos esporádicos; grupos simples; código de Golay; sistema de Steiner;

Abstract

Alves, Emília; Saldanha, Nicolau (advisor) . **The Mathieu groups**. Rio de Janeiro, 2012. 94p. M.Sc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The five Mathieu groups, M_{24} , M_{23} , M_{22} , M_{12} and M_{11} , form the first family of sporadic groups of Theorem classification of finite simple groups. In this paper we present the Mathieu groups and some objects related to building them as the Golay code and the Steiner system. Also, throughout the text, arose spontaneously some subgroups of groups of Mathieu.

Keywords

Mathieu groups; sporadic groups; simple groups; Golay code; Steiner systems;

Sumário

1	Introdução	12
2	Preliminares	14
2.1	Ação de Grupos	14
2.2	Transitividade	15
2.3	Primitividade	16
2.4	Grupo perfeito	17
2.5	Produtos diretos e semi-diretos	18
2.6	Grupo Linear Geral	19
2.6.1	Ordem dos Grupos Lineares	19
2.6.2	$PSL_2(q)$ e a linha projetiva	20
2.7	Transformações lineares e semi-lineares	20
2.7.1	Transformações lineares	20
2.7.2	Transformações lineares monomiais	21
2.7.3	Transformações semi-lineares	21
2.8	Formas bilineares	24
2.9	Códigos	25
2.10	Sistema de Steiner	28
3	Sistema de Steiner e Código de Golay	30
4	Hexacode, octads e sextets.	38
4.1	O Hexacode	38
4.1.1	Definições do Hexacode	38
4.1.2	Reconhecendo Hexacodewords	39
4.1.3	Completando um Hexacodeword	41
4.2	$C_{24}[24, 12, 8]$ e o MOG	43
4.3	Completando octads	47
4.4	Sextets	50
4.4.1	Como determinar um sextet	51
5	Os grupos de Mathieu	53
5.1	O Grupo M_{24}	53
5.1.1	O M_{24} , o Código de Golay e o $S(5, 8, 24)$	53
5.1.1.1	Grupo dos semi-automorfismos do hexacode	53
5.1.1.2	$3 \cdot S_6$ e o Código de Golay.	57
5.1.1.3	$2^6 : 3 \cdot S_6$ é o estabilizador do sextet base.	60
5.1.1.4	M_{24} e seu subgrupo maximal $2^6 : 3 \cdot S_6$	65
5.1.1.5	O estabilizador de uma octad	70
5.1.2	M_{24} a partir de $PSL_2(23)$	77
5.2	O grupo M_{23}	78
5.3	O grupo M_{22}	79
5.4	O grupo M_{12}	79
5.4.1	O M_{12} , o MINIMOG e o $S(5, 6, 12)$	81

5.5	O Grupo M_{11}	89
	Referências Bibliográficas	90
A	Uma Conta Trabalhosa	91

Lista de Figuras

2.1	O sistema de Steiner $S(2, 3, 7)$.	29
3.1	Triângulo das octads	31
3.2	Triângulo das dodecads	35
3.3	Sextet base	37
4.1	Octad base	47
4.2	Dodecad base	47
5.1	Dodecad intersectando uma octad em 2 ou 6 pontos.	80
5.2	Dodecad intersectando uma octad em 4 pontos.	80
5.3	Triângulo das hexads.	80
5.4	Como o MOG contém o MINIMOG.	88
5.5	Como um hexad torna-se uma octad.	88

Ainda que eu falasse as línguas dos homens e dos anjos, e não tivesse amor, seria como o metal que soa ou como o sino que tine. E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria.

Coríntios, 13, 1-2.