

4 Modelos estocásticos de volatilidade

4.1 Modelos de Reversão à média

Em nossa análise, a volatilidade, assim como o retorno, é descrita por um processo estocástico. O tipo de equação mais adequada para modelar o comportamento dessa grandeza pode ser inferido através das características examinadas nos capítulos anteriores. Neste capítulo mostraremos alguns modelos estocásticos existentes na literatura que melhor se adaptaram à distribuição da volatilidade diária do IBOVESPA.

Um dos fatos estilizados da volatilidade é a reversão à média, também encontrada em outras grandezas do mercado, tais como volume negociado e taxa de juros [20]. Na figura 2.4.1 podemos observar com clareza que a volatilidade, apesar de apresentar desvios em alguns momentos, sempre retorna a um nível de referência.

É possível então inferir que o mercado tem comportamento auto-regulatório, mantendo a magnitude das variações de preços em um nível de equilíbrio a maior parte do tempo. A forma como essa auto-regulação acontece depende muito do mercado analisado e está relacionada com diversos fatores. Podemos modelar este efeito por uma “força de reversão a média”, não necessariamente linear, que tem a função de restaurar o sistema quando ocorrem grandes desvios do regime normal de negociação. Os modelos que descrevem processos com a propriedade de retornar a grandeza estocástica a um nível médio ou histórico são chamados de *modelos de reversão a média*.

Além disso, ela também apresenta efeitos de memória (*clustering*), apontando para uma modelagem que permita a persistência da magnitude das flutuações de preço.

Outra característica importante a ser considerada pelos modelos de volatilidade é a forma pela qual as novas informações que entram no mercado são processadas e replicadas pelos agentes. Notícias relevantes aparecem de maneira

imprevisível, e podem ter um impacto maior ou menor sobre a variação dos preços. Assim, as alterações de regime de mercado provocadas pelo fluxo de informações podem ser em geral modeladas por termos de ruído estocástico. Por outro lado, os investidores tomam decisões de compra e/ou venda baseados em condições e expectativas individuais. Dependendo da conjuntura atual do mercado, os agentes podem amplificar ou reduzir o impacto inicial das novas informações, e portanto, a modelagem deve incluir ruído com amplitude "state-dependent". É também essencial que o modelo consiga reproduzir os eventos extremos que eventualmente acontecem no mercado associado ao fenômeno de intermitência.

Consideramos os modelos de volatilidade estocástica que são representados por uma equação de Ito-Langevin do tipo:

$$dx = -\gamma(x - \theta)x^{r-1}dt + \xi x^s dW \quad (\text{eq. 4.1.1})$$

onde:

$x \rightarrow$ variável estocástica;

$dW \approx N(0, 2dt) \rightarrow$ processo de Wiener;

$\theta \rightarrow$ valor de referência;

$\gamma \rightarrow$ taxa de relaxação em relação ao valor de referência;

$\xi \rightarrow$ amplitude do ruído;

$r, s \rightarrow$ parâmetros que garantem a generalidade do modelo.

Esses modelos normalmente envolvem três parâmetros: θ é a média histórica, que representa o valor de equilíbrio; ξ é o valor da incerteza associada ao processo estocástico, que pode ser chamado de "volatilidade da volatilidade" ou uma "volatilidade de segunda ordem" [21]. O parâmetro ξ influencia na curtose da distribuição de probabilidade. Dependendo do valor desse parâmetro, a distribuição terá caudas mais longas e picos mais baixos, e vice-versa. Finalmente, o parâmetro γ mede a taxa no tempo com que a volatilidade dos preços é restaurada aos valores normais do mercado, estando portanto associado à duração dos *clusters* de volatilidade alta: quanto maior seu valor, menor a probabilidade de observação de um *cluster*.

Nos modelos apresentados aqui, os parâmetros θ e γ são constantes, porém, é sabido que eles podem variar devido às diferentes condições macroeconômicas. Estas condições, no entanto, tem ciclos característicos longos e assim, podemos considerar esses parâmetros sendo constantes neste horizonte temporal.

Analisando a eq. 4.1.1, o primeiro termo é o de reversão a média. Note que esta força restauradora corresponde a um potencial confinante, com mínimo em θ , para qualquer r . O valor de r define o mecanismo de relaxação não-linear: quanto maior for r , mais (menos) atrativo é o potencial para x grande (pequeno), e vice-versa. Esse mecanismo deve ser definido pelo fluxo de informações, liquidez dos ativos, nível de aversão ao risco, entre outros fatores particulares de cada mercado. Por essas razões, o valor ideal de r depende muito do mercado analisado.

O segundo termo da eq. 4.1.1 descreve a modulação do ruído externo pelo sistema, ou seja, as mudanças de volatilidade de preços causadas pela chegada de informações no mercado. O fator s está relacionado com o tipo de resposta cooperativa dos agentes com relação aos novos dados que entram no sistema. Se $s > 0$ ($s < 0$), as novas informações terão mais impacto no caso do mercado estar em regime de alta (baixa) volatilidade. Os modelos mais comuns na literatura consideram, em geral, $s \geq 0$. Isso é compreensível dado que características como o *efeito manada* indicam que os regimes de alta volatilidade exibem um comportamento cooperativo muito mais forte que os regimes de baixa volatilidade.

Desta forma a classe de modelos estocásticos descritos pela eq 4.1.1. potencialmente produz as propriedades de reversão à média e de memória observadas. Nas seções seguintes, vamos considerar parâmetros particulares de r e s associados aos diferentes modelos de volatilidade estocástica v . Todos eles admitem uma distribuição de probabilidade assintótica $P(v)$ e assim poderemos selecionar os que descrevem melhor a distribuição empírica do mercado brasileiro e fornecer uma estimativa dos respectivos valores de parâmetros.

As figuras 4.1.1 e 4.1.2 mostram a densidade de probabilidade de ocorrência dos valores de volatilidade diária do IBOVESPA obtidos de acordo com o estimador da eq. 2.3.7. Os valores de volatilidade foram normalizados pelo valor médio do período analisado. O primeiro está em escala linear, enquanto o segundo

está em escala semilogarítmica (que permite melhor visualização da cauda da distribuição).

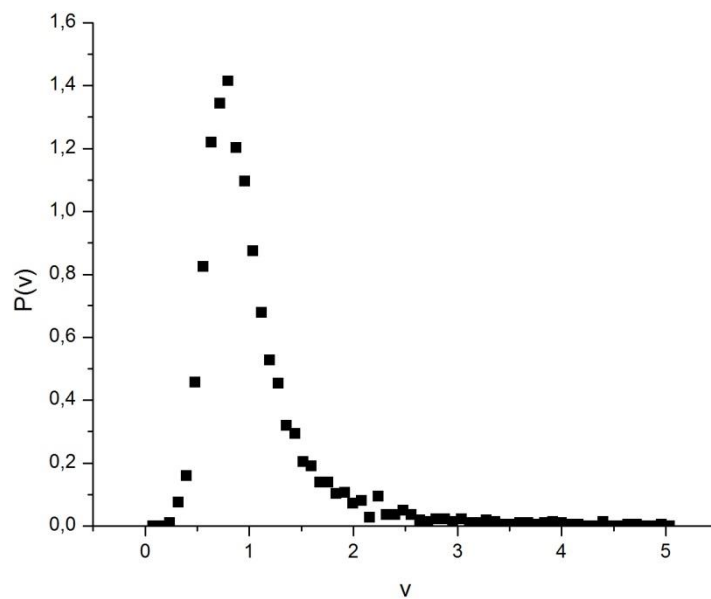


Figura 4.1.1: Distribuição de volatilidade diária (normalizada) do IBOVESPA em amostra de dados diários de mais de dez anos. O intervalo definido para o histograma foi 0,08.

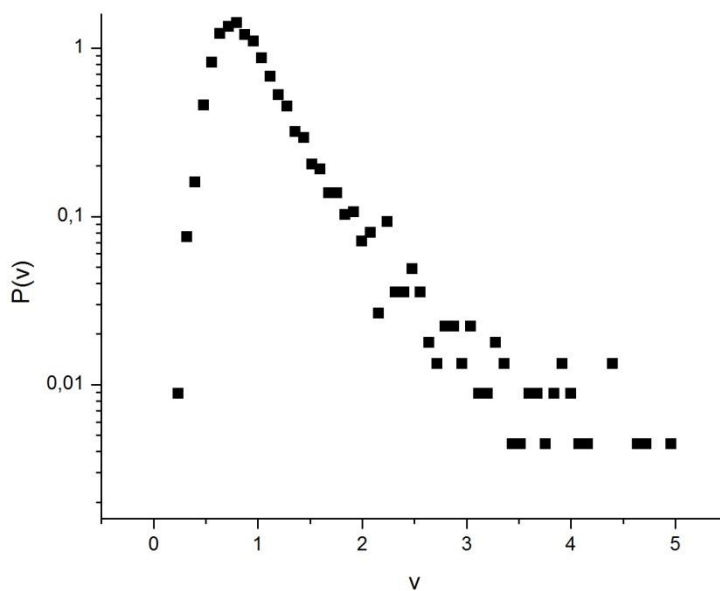


Figura 4.1.2: Distribuição de volatilidade diária (normalizada) do IBOVESPA na escala semilogarítmica.

Para caracterização da cauda, mostramos no gráfico abaixo o comportamento da distribuição acumulada da volatilidade normalizada em escala log-log. Vê-se claramente que o ajuste dessa cauda em escala log-log é linear, o

que é consistente com uma cauda em formato de lei de potência. Encontramos uma potência de -3.01 ± 0.04 . Esse resultado indica um decaimento em lei de potência com expoente próximo a -4.

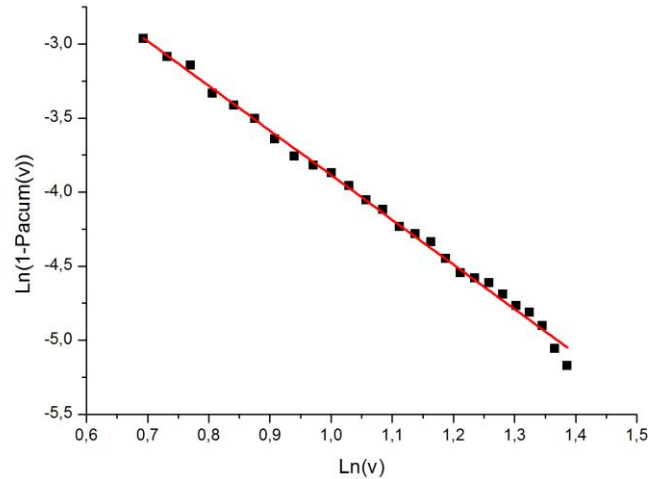


Figura 4.1.3: Ajuste linear da cauda da distribuição acumulada da volatilidade diária em escala logarítmica.

A evolução temporal da distribuição $P(x,t)$ da variável estocástica x descrita pela eq. 4.1.1 é dada pela equação de Fokker-Planck associada (ver apêndice 3, eq. A.3.7):

$$\frac{dP}{dt} = \gamma \frac{d}{dx} ([x - \theta] x^{r-1} P) + \xi^2 \frac{d^2}{dx^2} (x^{2s} P) \quad (\text{eq. 4.1.2})$$

Considerando as condições de contorno em $x=0$ e $x \rightarrow \infty$, o estado estacionário é dado por [22] (ver apêndice 4, eq. A.4.4) :

$$P(x) = \frac{A}{x^{2s}} \exp\left(-\gamma \xi \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} - \theta \frac{x^p}{p}\right]\right) \quad (\text{eq. 4.1.3})$$

com $\gamma, \xi, \epsilon, \theta > 0$ e $p = r - 2s \neq 0, -1$. A é uma constante de normalização e $\gamma_\xi = \gamma / \xi^2$. Esse último parâmetro pode ser interpretado como a amplitude de restauração efetiva, de forma que o parâmetro relacionado com a restauração da ordem (γ) é reduzido pelo parâmetro associado à desordem (ξ^2). Esse será o parâmetro relevante que vamos analisar na maior parte dos modelos.

A classe de processos estocásticos dada pela eq. 4.1.3 fornece em geral distribuições assintóticas com um comportamento exponencial generalizado (cujo

argumento tem potência arbitrária) nos valores extremos. A normalização no domínio $[0, \infty)$ restringe os possíveis valores de s apenas se $p > 0$ (para $s < 1/2$) ou se $p < -1$ (para $s > 1/2$). Por outro lado, se $p > 0$, para evitar a divergência na origem, temos que $s < 0$.

Para os casos particulares de $p = -1$ e $p = 0$ temos os seguintes resultados (ver apêndice 4):

1) Para $p = -1$, a distribuição se torna

$$P(x) = \frac{A}{x^{2s+\gamma\xi}} \exp\left(-\frac{\gamma\xi\theta}{x}\right), \quad (\text{eq. 4.1.4})$$

com $2s < 1 - \gamma\xi$ para que a normalização seja possível. Neste caso obtém-se cauda em lei de potência, independente do parâmetro θ .

2) Para $p = 0$, temos que a distribuição se torna:

$$P(x) = \frac{A}{x^{2s-\gamma\xi\theta}} \exp(-\gamma\xi x) \quad (\text{eq. 4.1.5})$$

com $2s < \gamma\xi\theta + 1$ para que seja normalizável, mas $2s < \gamma\xi\theta$ para evitar a divergência na origem. Em geral, $2s - \gamma\xi\theta > 0$ e neste caso obtém-se cauda em lei exponencial simples, independentemente de θ .

A classe de modelos descritos pela eq. 4.1.1, inclui vários modelos com ruído multiplicativo conhecidos da literatura, entre eles, o modelo de Ornstein-Uhlenbeck (O-U) exponencial ($r=1; s=0$), o modelo O-U geométrico ($r=2; s=1$), o modelo de Hull&White [23], ($r=1; s=1$) e de Heston [24] ($r=1; s=1/2$). Apresentaremos os que consideramos mais adequados para a distribuição de probabilidade da volatilidade diária do IBOVSPA que têm em comum decaimento da distribuição em lei de potência, que foi o comportamento observado na figura 4.1.3.

Incluiremos também em nossa análise o modelo (O-U) exponencial, cuja distribuição assintótica é a Lognormal, devido a esta distribuição ter sido a primeira utilizada na literatura para descrever as distribuições empíricas de volatilidade. Também incluímos o modelo de Heston, por ser muito utilizado na literatura.

A seguir apresentamos os ajustes dos modelos à distribuição empírica do IBOVESPA. Fizemos ajustes para a distribuição em escala linear e em escala logarítmica. Neste caso, privilegiamos o ajuste na cauda ao invés da região central da distribuição.

4.2 Modelo O-U exponencial

Estudos já mostraram [25] que a distribuição Lognormal é eficiente para descrever valores pequenos e intermediários de volatilidade, mas não descreve bem os valores maiores, ou seja, as caudas das distribuições empíricas. Uma das equações estocásticas que podem gerar distribuição assintótica Log-normal (visto que várias podem cumprir esse papel), é dada pela eq. 4.1.1, com parâmetros $r=1; s=0$ e ainda identificando a variável estocástica com o logaritmo da volatilidade ($x \equiv \ln v$):

$$dx = -\gamma (x - \theta)dt + \xi dW \quad (\text{eq. 4.2.1})$$

Esta equação descreve o processo OU-Aritmético, que é um dos processos estocásticos mais simples.

A distribuição de probabilidade estacionária do modelo da eq. 4.2.1 é uma distribuição Gaussiana:

$$P(x) = A \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{2}(x - \theta)^2\right) \quad (\text{eq. 4.2.2})$$

onde a constante de normalização é dada por $A = \sqrt{\frac{\gamma\xi}{2\pi}}$.

Da conservação da probabilidade sob mudança de variável, $P(v) = P(x)dx/dv$, encontramos a distribuição estacionária Log-normal para a volatilidade:

$$P(v) = \frac{A}{v} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{2}(\ln v - \theta)^2\right) \quad (\text{eq. 4.2.3})$$

Abaixo estão os gráficos com o ajuste obtido a partir dessa distribuição e a tabela com os parâmetros encontrados.

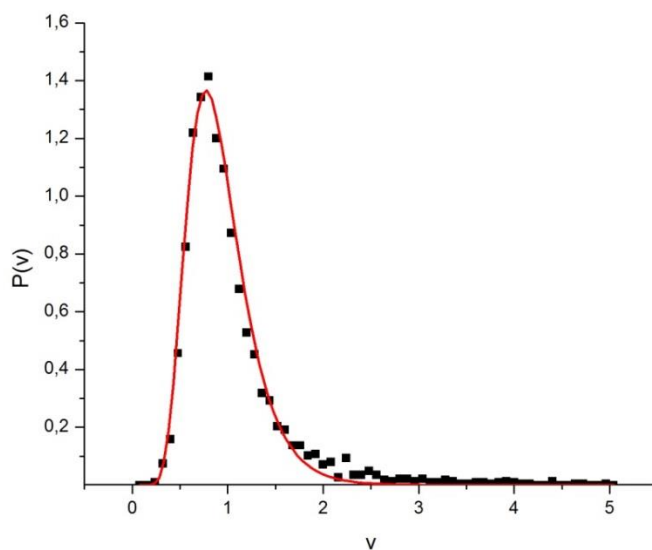


Figura 4.2.1: Ajuste da distribuição de volatilidade diária do IBOVESPA pela Distribuição Log-normal.

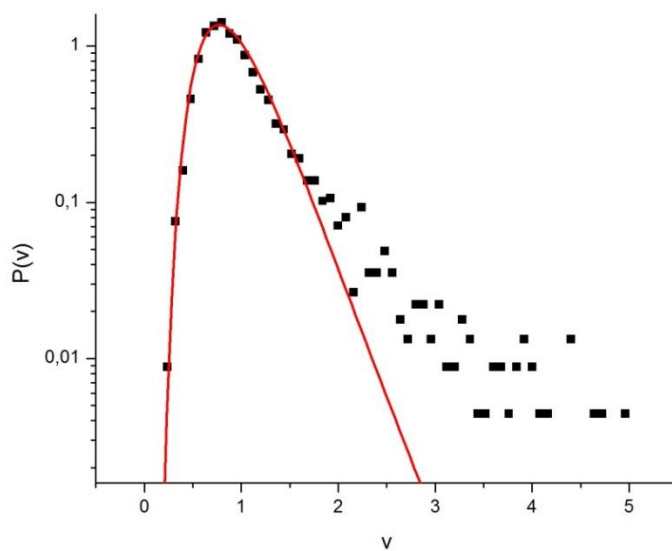


Figura 4.2.2: Reprodução da figura 4.2.1. em escala semi- logarítmica.

	Valor	Erro associado
Θ	-0,13302	0,00574
γ_{ξ}	7,93157	0,21185
R^2 Ajustado	0,9944	

Tabela 4.2.1: Parâmetros ótimos obtidos para o ajuste do modelo Lognormal.

Podemos ver claramente pelo gráfico na escala logarítmica que a cauda da distribuição empírica não está sendo muito bem descrita. Note também que o

valor do parâmetro θ negativo significa que a volatilidade de referência da volatilidade é menor do que a média do período analisado. Além disso, o parâmetro efetivo γ_ξ é bem grande, o que indica que a volatilidade volta aos seus valores normais principalmente pelo mecanismo de reversão à média.

4.3

Modelo de Heston

O modelo de Heston é obtido a partir da eq. 4.1.1 considerando-se os parâmetros $r=1$ e $s=1/2$:

$$dx = -\gamma(x - \theta)dt + \xi x^{1/2}dW \quad (\text{eq.4.3.1})$$

onde $x \equiv v^2$.

Considerando a solução assintótica para $p=2r-s = 0$ dada pela eq. 4.1.5, encontramos a Distribuição Gama :

$$P(x) = Ax^{\gamma_\xi\theta-1} \exp(-\gamma_\xi v^2) \quad (\text{eq. 4.3.2})$$

onde a constante de normalização é dada por $A = \frac{\gamma_\xi^{\gamma_\xi\theta}}{\Gamma(2\theta)}$ e $T(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Da conservação da probabilidade sob mudança de variável, $P(v)=P(x)dx/dv$, a distribuição de volatilidade é dada por:

$$P(v) = 2Av^{2\gamma_\xi\theta-1} \exp(-\gamma_\xi v^2) \quad (\text{eq. 4.3.3})$$

A eq. 4.4.3 é uma distribuição Gama Generalizada, e descreve um decaimento das caudas em formato exponencial. Abaixo mostramos o gráfico com o ajuste dessa distribuição.

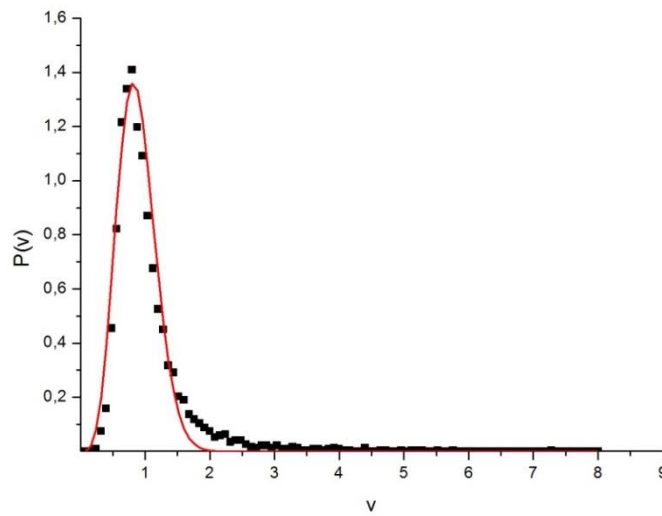


Figura 4.3.1: Ajuste da distribuição de volatilidade diária do IBOVESPA pela distribuição dada pela Eq. 4.3.3.

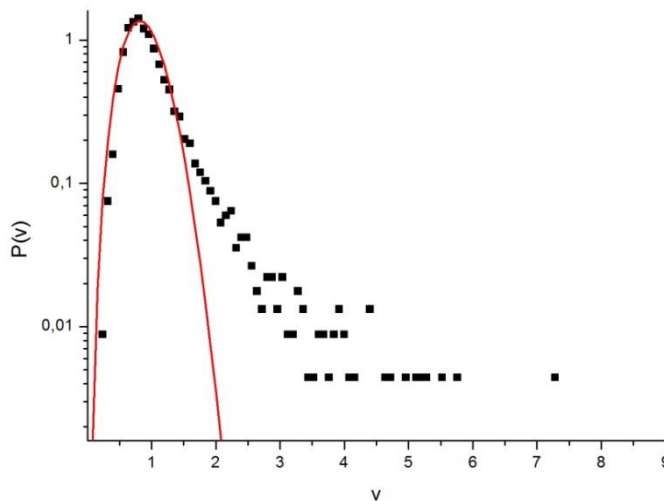


Figura 4.3.2: Reprodução da figura 4.3.1. em escala semi- logarítmica.

Abaixo mostramos os parâmetros obtidos a partir desses ajustes:

	Valor	Erro associado
Θ	0,8471	0,0133
γ_{ξ}	2,7868	0,1098
R^2 Ajustado	0,9648	

Tabela 4.3.1: Parâmetros ótimos obtidos para o modelo de Heston.

É possível verificar pela figura 4.3.2, que o modelo não descreve satisfatoriamente a distribuição de volatilidade do IBOVESPA principalmente os dados da cauda. Isso está de acordo com o resultado anterior mostrado de que a

cauda em formato exponencial não se adequam bem aos dados empíricos no período tratado.

4.4

Modelo harmônico com ruído multiplicativo linear (HRML)

A equação estocástica do modelo é construída considerando-se $x \equiv v$, $r=1$ e $s=1$:

$$dx = -\gamma(x - \theta)dt + \xi x dW \quad (\text{eq. 4.4.1})$$

Obtém-se a distribuição assintótica dada pela eq 4.1.4, para o caso $p= -1$:

$$P(x) = \frac{A}{x^{2+\gamma\xi}} \exp\left(-\frac{\gamma\xi\theta}{x}\right) \quad (\text{eq. 4.4.2})$$

com constante de normalização $A = \frac{(\gamma\xi\theta)^{\gamma\xi+1}}{\Gamma(\gamma\xi+1)}$. A probabilidade $P(v)$ encontrada para esse modelo é portanto :

$$P(v) = Av^{-(\gamma\xi+2)} \exp\left(\frac{-\gamma\xi\theta}{v}\right) \quad (\text{eq. 4.4.3})$$

que é uma distribuição Gama Inversa. Os resultados do ajuste para esse modelo podem ser observados nas figuras 4.4.1 (escala linear) e 4.4.2 (escala semi-logarítmica).

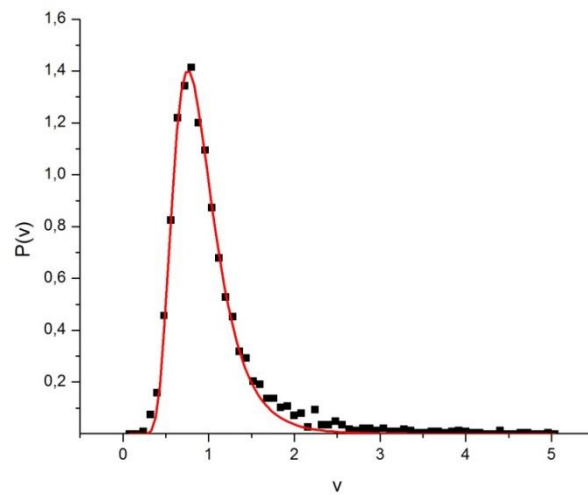


Figura 4.4.1: Ajuste da distribuição de volatilidade diária do IBOVESPA pela distribuição dada pela eq. 4.4.3.

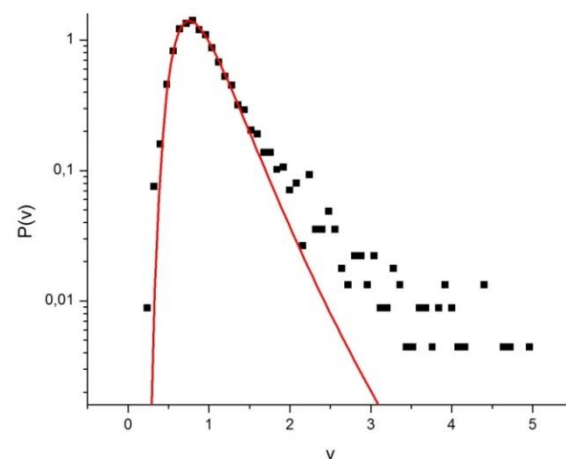


Figura 4.4.2: Reprodução da figura 4.4.1. em escala semi- logarítmica.

	Valor	Erro associado
θ	0,93768	0,00366
γ_{ξ}	8,37919	0,00794
R^2 Ajustado	0,9939	

Tabela 4.4.1: Parâmetros ótimos obtidos para o modelo HRML.

Podemos ver que, apesar do erro relativo dos parâmetros ser baixo (compare as tabelas 4.2.1, 4.4.1), o modelo HRML não é adequado para descrever a cauda da distribuição empírica. Este resultado está em contraste com o obtido para mercados desenvolvidos [26]. Uma característica digna de nota é que neste modelo o valor de γ_{ξ} também é alto.

4.5 Modelo de Hull&White

O modelo de Hull&White corresponde ao caso $r=1$ e $s=1$ descrito pelas equações 4.41 e 4.4.2, porém considera como variável estocástica $x \equiv v^2$.

Usando a eq. 4.4.2, e fazendo a transformação de variáveis e encontramos que a distribuição $P(v)$ é dada por:

$$P(v) = 2A \exp\left(\frac{-v\xi\theta}{v^2}\right) v^{-(2v\xi+3)} \quad (\text{eq. 4.5.1})$$

A eq. 4.5.1 é uma distribuição Gama Inversa Generalizada, e descreve um decaimento das caudas em lei de potência. Os valores dos parâmetros estão apontados na tabela 4.5.1.

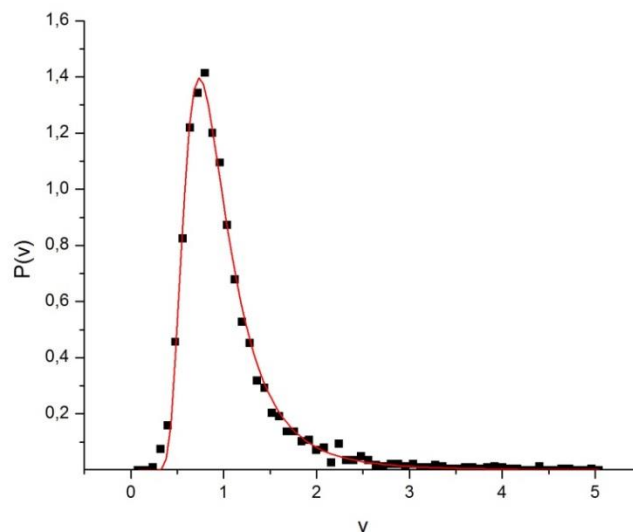


Figura 4.5.1: Ajuste da distribuição de volatilidade diária do IBOVESPA pela distribuição dada pela eq. 4.5.1.

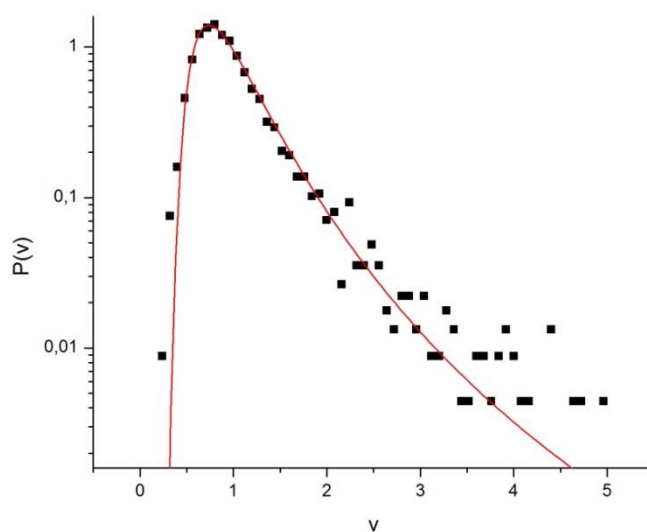


Figura 4.5.2: Reprodução da figura 4.5.1. em escala semi- logarítmica.

	Valor	Erro associado
θ	1,34728	0,02721
γ_{ξ}	1,01073	0,03649
R^2 Ajustado	0,9944	

Tabela 4.5.1: Parâmetros ótimos para o modelo de Hull&White.

Observa-se que a cauda da distribuição é descrita razoavelmente pelo modelo (dadas as flutuações empíricas), porém subestima a frequência de ocorrência dos valores de baixa magnitude.

4.6 Modelo com estrutura aditiva e multiplicativa

Analisaremos outra classe mais geral de modelos de volatilidade que apresenta um termo de ruído aditivo, além do termo multiplicativo nas equações estocásticas abordadas anteriormente. A motivação para investigarmos essa classe é poder descrever melhor a cauda e concomitantemente com os valores de baixa volatilidade. Além disso, é conhecido que processos aditivos-multiplicativos constituem um mecanismo eficiente para a formação de distribuições com caudas largas e dados correlacionados.

A adição desse ruído representa uma situação mais realista do mercado, dado que nem todos os estímulos externos são necessariamente modulados pela

interpretação dos agentes. Há estímulos externos cujos impactos sobre os preços são independentes da susceptibilidade dos agentes ou do nível de volatilidade presente no mercado, como por exemplo, a chegada de informações públicas¹, (disponíveis a todos os participantes do mercado simultaneamente). Supondo que estas informações são geradas de forma aleatória, podemos representá-las por um ruído extra aditivo na equação da volatilidade.

Incluindo flutuações puramente aditivas na eq. 4.1.1, temos a equação de Ito-Langevin:

$$dx = -\gamma(x - \theta)x^{r-1}dt + \xi x^s dW_1 + \zeta dW_2 \quad (\text{eq. 4.6.1})$$

onde W_1 e W_2 são dois processos de Wiener independentes, e ξ e ζ são as amplitudes desses processos. A equação de Fokker-Planck correspondente é dada por (ver apêndice 3, eq. A.3.10):

$$\frac{dP}{dt} = \gamma \frac{d}{dx} ([x - \theta]x^{r-1}P) + \frac{d^2}{dx^2} ([\xi^2 x^{2s} + \zeta^2]P) \quad (\text{eq. 4.6.2})$$

Modelos que incluem o ruído aditivo possuem um espectro maior de distribuições assintóticas, dependendo dos parâmetros r e s . Consideraremos a seguir um caso particular em que $r=0$ e $s=1/2$, no qual a distribuição estacionária tem comportamento em lei de potência, tanto no limite de magnitudes baixas quanto na de magnitudes altas.

¹Por informações públicas entende-se, por exemplo, divulgação de balanço de empresas ou anúncios governamentais sobre as políticas de juros e monetária. As reuniões do Comitê de Política Monetária (Copom) e as medidas do Banco Central para manter a taxa de câmbio em níveis pré-determinados são exemplos de ações governamentais que impactam diretamente o mercado brasileiro.

4.6.1 Modelo AM quadrático

Dados os parâmetros, $r=0$ e $s=1/2$, temos a seguinte equação estocástica:

$$dx = -\gamma(x - \theta)x^{-1}dt + \xi x^{1/2}dW_1 + \zeta dW_2 \quad (\text{eq. 4.6.3})$$

Este modelo corresponde a um potencial confinante assimétrico (ver apêndice 5), cuja solução assintótica é (ver apêndice 6):

$$P(x) = A \frac{x^{\gamma_\zeta \theta}}{(1 + \lambda^2 x)^{\gamma_\zeta \theta + \gamma_\xi + 1}} \quad (\text{eq. 4.6.4})$$

onde $\gamma_\xi \equiv \gamma/\xi^2$, $\gamma_\zeta \equiv \gamma/\zeta^2$ e $\lambda^2 \equiv \gamma_\zeta/\gamma_\xi = (\xi/\zeta)^2$. A constante de normalização A é dada por:

$$A = \frac{\Gamma(\gamma_\xi + \gamma_\zeta \theta + 1)}{\Gamma(\gamma_\xi)\Gamma(\gamma_\zeta \theta + 1)} (\lambda^2)^{\gamma_\zeta \theta + 1}$$

O ajuste da distribuição de volatilidade diária do IBOVESPA pela distribuição dada pela eq. 4.6.4 nos leva aos seguintes parâmetros ótimos:

	Valor	Erro Associado
γ_ξ	2,414	0,107
γ_ζ	18,11	3,81
θ	0,649	0,007

Tabela 4.6.1: Parâmetros ótimos obtidos para o modelo AM quadrático.

É conveniente descrever a distribuição com os parâmetros transformados:

$$\varphi = \gamma_\zeta \theta \quad (\text{eq. 4.6.5)(A)}$$

$$\frac{1}{q-1} = 1 + \gamma_\zeta \theta + \gamma_\xi = 1 + \varphi + \gamma_\xi \quad (\text{eq. 4.6.5)(B)}$$

$$x_0 = \frac{\gamma_\xi}{\gamma_\zeta(1 + \gamma_\zeta \theta + \gamma_\xi)} = (q - 1) \frac{\gamma_\xi}{\gamma_\zeta} \quad (\text{eq. 4.6.5)(C)}$$

A partir deles, a distribuição de densidade de probabilidade dada pela eq. 4.6.4 será descrita por:

$$P(x) = A \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^\varphi}{[1+(q-1)(x/x_0)]^{\frac{1}{q-1}}} \quad (\text{eq. 4.6.6})$$

cuja constante de normalização é dada por: $A = \frac{1}{x_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}-\varphi-1\right)\Gamma(\varphi+1)} (q-1)^{\varphi+1}$.

Essa distribuição também é conhecida como q-Gamma, pois generaliza a expressão da distribuição Gamma para $q \neq 1$. Esta distribuição decaimento em lei de potência tanto para $x \rightarrow 0$ quanto para $x \rightarrow \infty$.

Considerando $x \equiv v^2$, obtemos a função de distribuição de volatilidade $P(v)$ para o modelo AM quadrático:

$$P(v) = 2A \frac{(v/v_0)^{2\varphi+1}}{\left(1+(q-1)(v/v_0)^2\right)^{\frac{1}{q-1}}} \quad (\text{eq. 4.6.7})$$

com $x_0 = v_0^2$. A constante A se rescreve como:

$$A = \frac{1}{v_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}-\varphi-1\right)\Gamma(\varphi+1)} (q-1)^{\varphi+1} \quad (\text{eq. 4.6.8})$$

Os parâmetros q , φ e v_0 obtidos através do ajuste dessa distribuição dada pela eq. 4.6.7 estão descritos na tabela abaixo:

	Valor	Erro Associado
q	1,07898	0,0013
φ	9,12895	0,3134
v_0	0,1186	0,0061
R^2 Ajustado	0,9958	

Tabela 4.6.2: Parâmetros transformados ótimos obtidos para o modelo AM quadrático.

A partir da tabela 4.6.2 vemos que o R^2 Ajustado está melhor nesse modelo em relação aos modelos tratados nas seções anteriores. Com base nos parâmetros transformados, obtemos os valores de $\gamma_\xi=2.53$, $\gamma_\zeta=14.21$ e $\theta=0.64$, que são consistentes com os apresentados na tabela 4.6.1.

Uma métrica interessante de observar é o valor de γ_ζ/γ_ξ . Comparando-se os dois ajustes (nos parâmetros originais e transformados) encontra-se que a razão entre eles se mantém alta (7.1 e 5.6 respectivamente). Esse valor indica que o fator de desordem multiplicativo é mais relevante que o fator de desordem aditivo para o mercado brasileiro. Note que não estamos considerando a influência da magnitude da volatilidade nesta análise. Diante de um cenário de alta volatilidade, o ruído multiplicativo corresponderá a uma resposta ainda maior dos agentes, dado que $s>0$, enquanto o ruído aditivo ficará inalterado. Por outro lado, para um nível de baixa volatilidade, com a atenuação do ruído pelos agentes, é possível observar um ruído aditivo mais relevante.

É importante ressaltar que neste modelo, $r=0$, ou seja, a capacidade de restauração para o nível médio é maior para cenários de baixa volatilidade. De certa forma, r e s se complementam: a resposta cooperativa dos agentes é mais intensa em altas volatilidades, enquanto a determinística de retorno a média é maior em baixas volatilidades.

Abaixo colocamos os ajustes nas escalas linear e semi-logarítmica para que seja possível observar a qualidade do modelo.

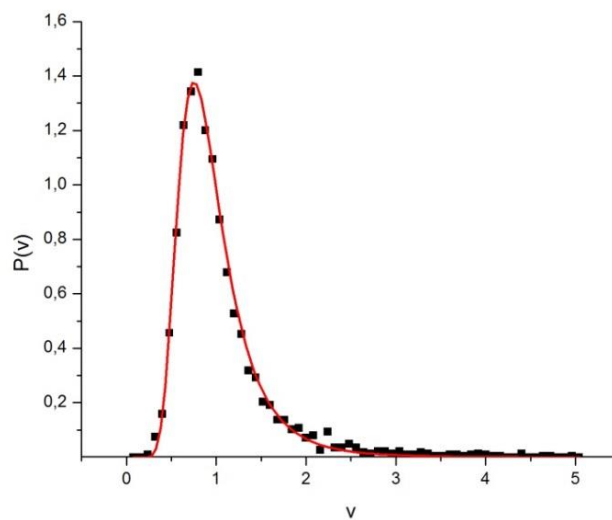


Figura 4.6.1.: Ajuste da distribuição de volatilidade diária do IBOVESPA pela distribuição dada pela eq. 4.6.7.

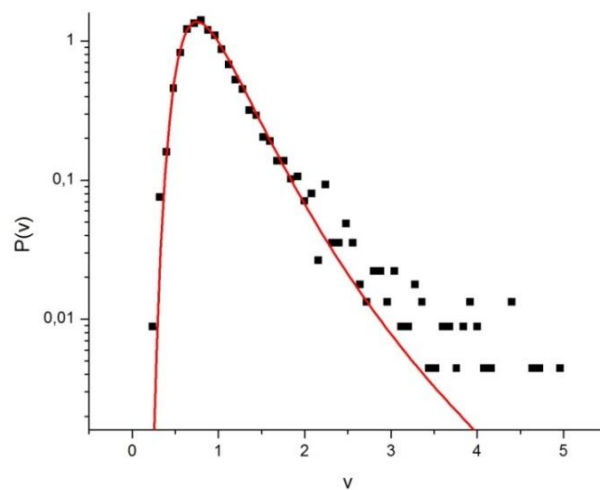


Figura 4.6.2: Reprodução da figura 4.6.1. em escala semi-logarítmica.

4.7 Comparação entre os modelos

Nessa seção faremos uma comparação entre os ajustes de cada modelo. Observando as figuras, podemos afirmar que uns são melhores do que outros para descrever volatilidades mais altas (a cauda da distribuição), baixas e as típicas (a região central da distribuição). Abaixo seguem figuras comparando os três melhores modelos analisados:

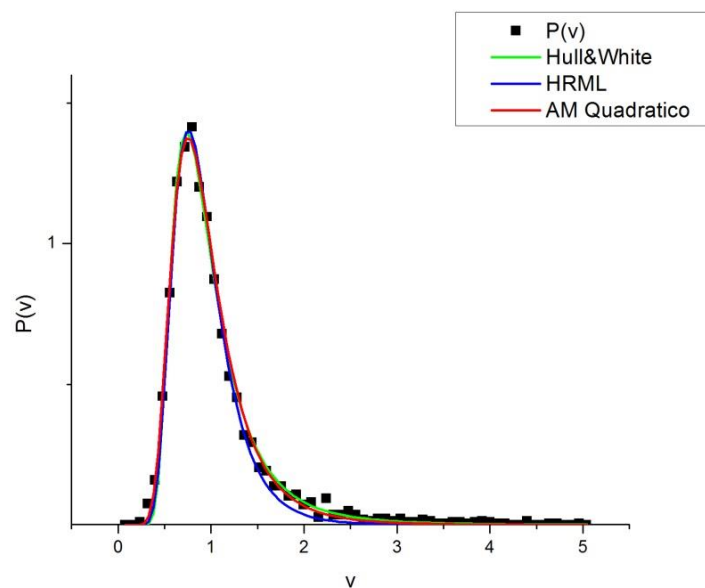


Figura 4.7.1: Comparação dos ajustes dos modelos para a distribuição da volatilidade diária do IBOVESPA em escala linear.

Abaixo apresentamos uma tabela com o resumo dos parâmetros ótimos de cada modelo. É importante ressaltar que não se deve comparar diretamente os valores de cada modelo, pois eles têm um papel diferente na forma da respectiva distribuição assintótica.

	AM Quadratico	H&W	HRML
γ_{ξ}	2,53	1,01	8,38
θ	0,64	1,34	0,94
γ_{ζ}	14,21		

Tabela 4.7.1: Resumo dos parâmetros ótimos dos modelos para distribuição da volatilidade diária do IBOVESPA, obtidos a partir do ajuste da distribuição em escala linear.

Para efeito de comparação das caudas, reproduzimos o gráfico 4.7.1 em escala logarítmica na figura abaixo. Aqui, o modelo de Hull&White foi o que ajustou melhor na cauda.

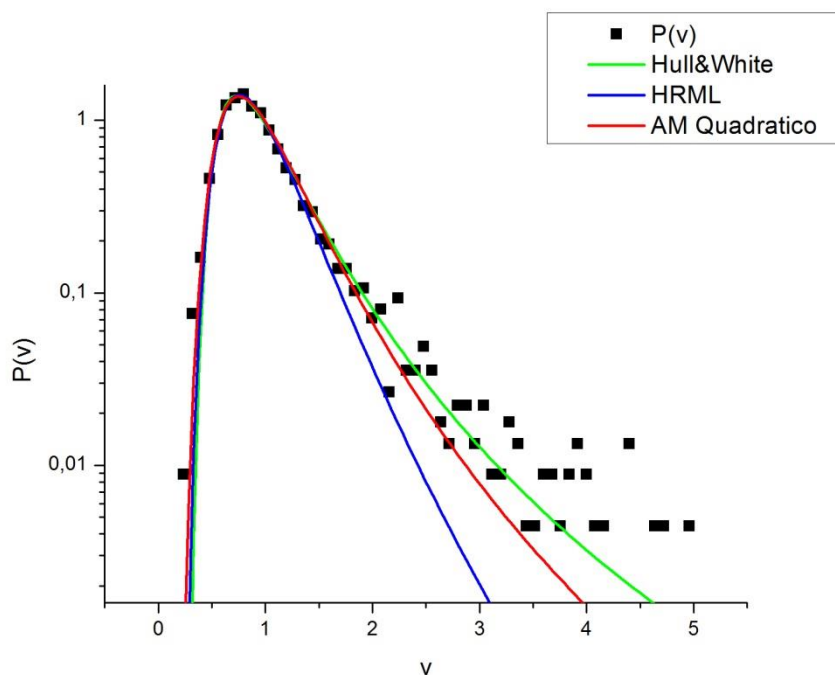


Figura 4.7.2: Reprodução da figura 4.7.1 em escala semi-logarítmica

Com o objetivo de modelar os eventos extremos, ou seja, as altas volatilidades, fizemos também ajustes da distribuição empírica em escala logarítmica, de forma a privilegiar a cauda. Os resultados estão apresentados abaixo.

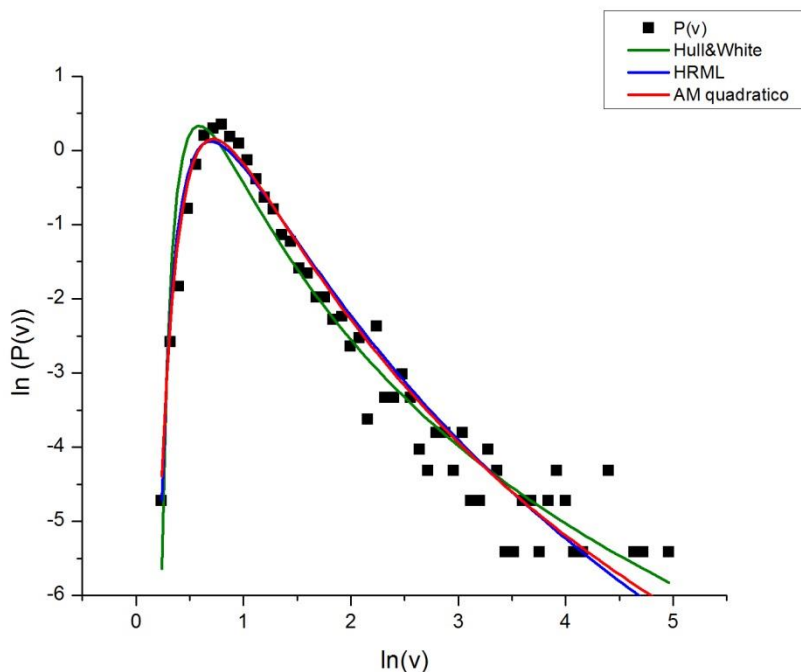


Figura 4.7.3: Comparação dos ajustes dos modelos para a distribuição de volatilidade diária do IBOVESPA em escala logarítmica.

Esses ajustes levaram a novos parâmetros ótimos, cujos valores centrais estão resumidos na tabela a seguir:

	AM Quadrático	H&W	HRML
γ_{ξ}	1,82	0,37	3,8
θ	0,60	1,72	1,06
γ_{ζ}	8,91		
R^2 Ajustado		0,931	0,933

Tabela 4.7.2: Parâmetros ótimos dos modelos obtidos a partir do ajuste da distribuição da volatilidade diária do IBOVESPA em escala logarítmica.

Os parâmetros originais do modelo AM quadrático apresentados na tabela 4.7.2 foram obtidos através do ajuste com os parâmetros transformados, cujos valores ótimos estão mostrados na tabela a seguir:

	Valor	Erro Associado
q	1,1226	0,0018
Φ	5,3389	1,1738
v_0	0,1582	0,0329
R^2 Ajustado	0,9958	

Tabela 4.7.3: Parâmetros transformados ótimos obtidos para o modelo AM quadrático obtidos a partir do ajuste da distribuição empírica em escala logarítmica.

Observamos pela figura 4.7.3 que o modelo de Hull&White não produziu um bom resultado para a parte central da distribuição empírica a partir. Já os modelos HRML e AM quadrático tem ajustes equivalentes. Porém, comparando-se as tabelas 4.7.2 e 4.7.3 vê-se que o R^2 ajustado do AM quadrático está melhor.

Como se pode notar comparando a tabela 4.7.2 com a tabela 4.7.1, os parâmetros dos modelos são ligeiramente diferentes em relação aos obtidos em escala linear, devido a maior importância estatística das caudas no ajuste em escala logarítmica.

Além disso, também comparamos a lei de potência para o decaimento das caudas que resulta de cada modelo. Na seção 4.1, inferimos que a lei de potência da distribuição de densidade de probabilidade da volatilidade é aproximadamente -4 (ver figura 4.1.3).

Vamos agora utilizar o melhor ajuste obtido para cada modelo:

- Utilizando os dados da tabela 4.5.1 e a distribuição estacionária do modelo Hull&White dada pela eq. 4.5.1, obtem-se para as caudas que $P(v) \approx v^{-(2\gamma_\xi+3)}$, com $2\gamma_\xi + 3 \simeq 5.0$;
- Utilizando os dados da tabela 4.7.2 e a distribuição estacionária do modelo HRML dada pela eq. 4.4.1, obtem-se para as caudas $P(v) \approx v^{-(\gamma_\xi+2)}$ com $\gamma_\xi + 2 \simeq 5.8$;
- Utilizando os dados da tabela 4.7.2, e a distribuição estacionária do modelo AM quadrático dada pela eq. 4.6.7, $P(v) \approx v^{-(2\gamma_\xi+1)}$, com $2\gamma_\xi + 1 \simeq 4.64$.

A partir dessa análise, concluímos que o modelo AM quadrático é o mais consistente com os dados empíricos do índice BOVESPA.