

5 Efeito de alavancagem – assimetria temporal entre retorno e volatilidade

5.1 Princípios teóricos

O termo alavancagem (*leverage*) significa, na linguagem financeira, a razão entre a quantidade de dinheiro que uma empresa toma emprestado e o valor em que ela é avaliada. A dívida é feita com o objetivo de realizar um re-investimento que proporcione um retorno maior que os juros pagos para admiti-la, a fim de maximizar os ganhos. Apesar de ter um potencial de retorno positivo, a alavancagem é bastante arriscada porque é possível que a meta de retorno do investimento não seja alcançada. Nesse cenário, a empresa ficaria com uma dívida maior que seu próprio valor.

Atentando para os movimentos de preço no mercado financeiro, é possível dizer que se as ações de uma empresa diminuíssem de valor (retornos negativos), ela está alavancada, uma vez que o valor da empresa decresceu passivamente.

Essa é a origem do nome *efeito leverage*, um fato estilizado obtido a partir da correlação entre volatilidade e retorno: se o preço do ativo cai, automaticamente a razão entre ativos e passivos da empresa aumenta, a companhia se torna mais arriscada e, conseqüentemente, a volatilidade sobe. Assim, esse efeito se reflete em valor negativo para a correlação entre retorno e volatilidade.

Esse fato estilizado já é bastante documentado na literatura sobre volatilidade, principalmente se tratando de mercados desenvolvidos. O efeito leverage é um fenômeno assimétrico no tempo porque a correlação negativa ocorre apenas entre retorno passado e volatilidade futura. Quando se trata de retorno futuro e volatilidade passada, a correlação é insignificante.

A chamada “hipótese de alavancagem financeira” [01] presume corretamente que a queda do retorno causa o aumento da volatilidade. No entanto,

ela explica satisfatoriamente o fenômeno para o nível das ações individuais, mas no caso de índices, ela não é aplicável.

Compreender as causas do efeito *leverage* tem sido objetivo tanto de pesquisadores quanto de agentes do próprio mercado, dado que as estratégias de negociação com opções e outros derivativos com exposição à volatilidade precisam considerar essa característica.

Bouchaud *et al* fez uma análise dos sete maiores índices do mercado mundial (S&P 500, NASDAQ, CAC 40, FTSE, DAX Nikkei e Hang Seng) e de 437 ações dos mercados americano, japonês e europeu, comparando a forma e intensidade do efeito de alavancagem para esses dois tipos de ativos [27]. Constatou-se que os índices exibem um *leverage* de intensidade bem maior, porém, com decaimento mais rápido. No caso de índices de mercado, a volatilidade do índice expressa tanto a volatilidade dos ativos que o compõe como a correlação da volatilidade entre esses ativos. Assim, ele aponta para a teoria comportamental: no caso dos índices, o efeito está relacionado ao fenômeno de pânico no mercado, como explicado a seguir.

A teoria comportamental [28] estabelece, em linhas gerais, que se o preço cai, há mais incerteza no mercado e isso aumenta receio dos agentes de que haja uma nova queda. Dessa forma o *efeito manada* se inicia, e quanto mais agentes vendem a ação de uma empresa, maior o risco atribuído àquele ativo, mesmo que objetivamente nada tenha se modificado na empresa. Isso pode ser estendido ao mercado inteiro, dependendo das notícias que levaram à queda inicial, se os indicadores macroeconômicos estiverem ruins, por exemplo. Em [28], Hibbert argumenta da seguinte forma:

We postulate that market returns influence the fear and exuberance of investors such that negative returns create fears of additional declines in the market, while positive returns create the exuberance of potential additional increases in the market (...).

Nesse estudo é utilizado o índice S&P 500 e do VIX (índice de volatilidade implícita do S&P 500)¹ para demonstrar essa correlação negativa. Como pode ser observado claramente na figura 5.1.1, a queda do S&P está sempre acompanhada por uma alta no VIX, e que a recíproca não acontece na mesma intensidade.

¹ O VIX é calculado a partir das opções de S&P 500. Em linhas gerais, ele é a volatilidade média de opções de SPX negociadas no mercado que preenchem os critérios necessários para entrar na formação do índice. É possível acessar o paper da Chicago Board Exchange com a explicação detalhada do cálculo do índice em <http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf>.

Analisar a volatilidade implícita também seria bom no caso do mercado brasileiro, mas o número de opções negociadas na BM&F Bovespa ainda é muito limitado e não tem liquidez, impedindo a utilização de uma medida como o VIX, que é um tipo de volatilidade implícita, como mencionado no Capítulo 2.

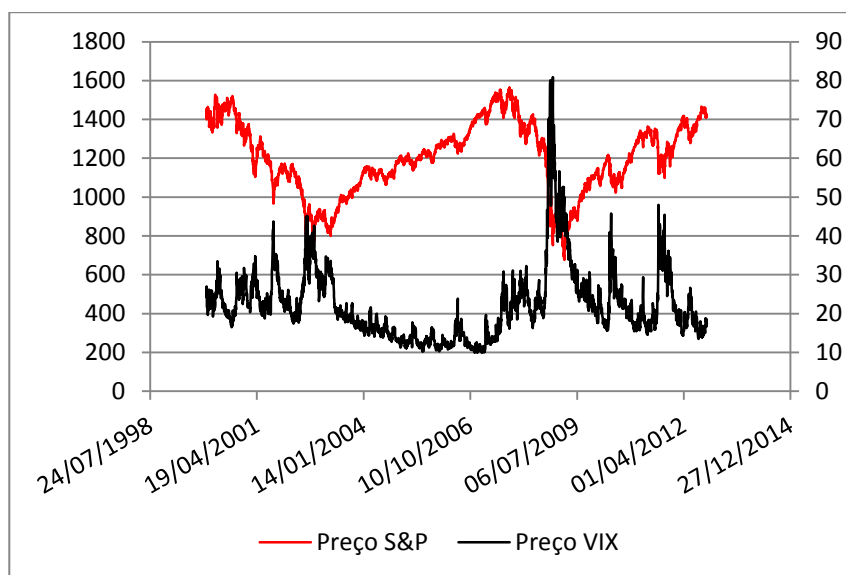


Figura 5.1.1: Comparação entre o preço do S&P 500 e o preço de seu índice de volatilidade, o VIX.

Há também estudos mostrando que, para o mercado americano, o medo dos investidores não é injustificado. *Madan et al* [29] analisa cem anos de retornos do índice DJIA e conclui que as quedas no *bear market* são significativamente mais severas que as altas no *bull market*: enquanto a maior queda diária dos preços foi 28%, a maior alta foi 14%. Dessa forma, é possível dizer que o *efeito leverage* está associado à assimetria negativa da distribuição de retornos [27].

Realizamos uma análise similar para o Ibovespa abrangendo os dados de preços diários no intervalo 1995-2012 (4412 dias de pregão) e encontramos resultados semelhantes. Apesar do número de retornos positivos ser 12% maior que o número de retornos negativos, os últimos têm, em média, maior magnitude que os primeiros. A maior queda (alta) de um dia foi 16% (13%). Encontramos uma distribuição assimétrica (assimetria de -0.23) e leptocúrtica (curtose de 4.6).

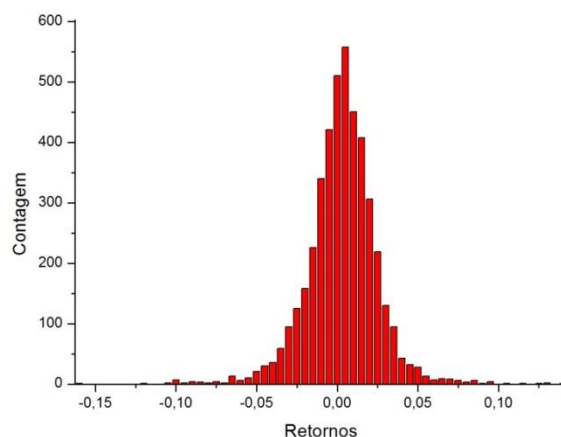


Figura 5.1.2: Histograma dos retornos logarítmicos diários do Ibovespa entre 05/1995 e 03/2012.

Além disso, observando as séries de preço do Ibovespa (figura 2.1.1), vê-se que entre 2008 e 2012 as quedas acumuladas foram maiores que as altas. Durante o ano de 2008 o Ibovespa perdeu cerca de 50% de seu valor, e entre 2009 e 2012 o índice havia valorizado apenas 35%. Assim, também temos evidências de que há um grande potencial de perdas no mercado brasileiro, o que justifica o “pânico no mercado”, que está na origem da correlação negativa entre preço e volatilidade. Dessa forma, espera-se que o mercado brasileiro também apresente o fenômeno *leverage*.

5.2 Efeito leverage de índices de mercado

A correlação *leverage* é usualmente dada pela seguinte equação:

$$L(\tau) = \langle r(t)v^2(t + \tau) \rangle \quad (\text{eq. 5.2.1})$$

onde $r(t)$ é o retorno logarítmico e $v(t)$ é a volatilidade estimada na mesma grade temporal dos retornos. Para essa correlação, é conveniente usar o retorno de média zero definido na eq. 2.3.2 :

$$dx'(t) = r(t) - \mu dt \quad (\text{eq. 5.2.2})$$

Os primeiros estudos da literatura utilizaram o estimador da volatilidade quadrática dado pela eq. 2.3.1B. A partir dele, a função de correlação *leverage* tem a seguinte forma:

$$L(\tau) = \frac{1}{Z} \langle dx'(t) | dx'(t + \tau) |^2 \rangle \quad (\text{eq. 5.2.3})$$

onde Z é uma constante de normalização:

$$Z = \langle dx'(t)^2 \rangle^2 \quad (\text{eq. 5.2.4})$$

Na figura 5.2.1 reproduzimos os resultados do efeito *leverage* para a série histórica de retornos diários entre 1900-2000 do índice DJIA [30] com a formulação dada pela eq. 5.2.3.

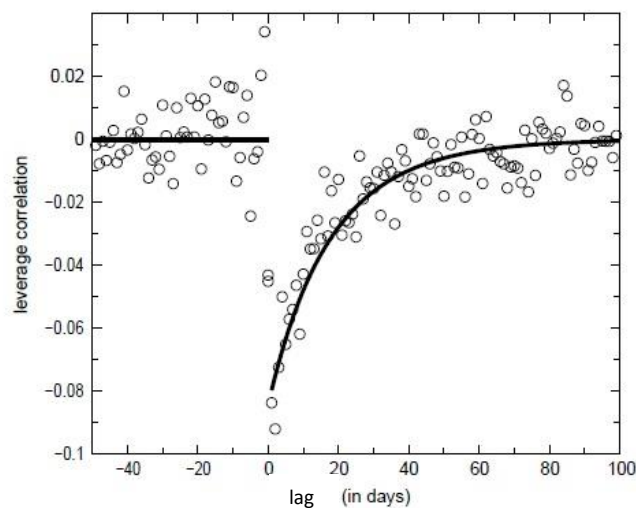


Figura 5.2.1: Efeito *leverage* para o índice DJIA com a formulação dada pela eq. 5.2.3 [30].

É possível observar que o efeito tem uma direção temporal definida. Vemos uma correlação negativa apenas entre retorno e volatilidade futura, caso contrário a correlação é próxima a zero (a não ser para intervalos bem curtos). Esse resultado corrobora a discussão da seção 5.1: se o preço cai, a volatilidade aumenta porque a sensação de risco dos investidores se torna mais forte, gerando maior contribuição negativa para esta correlação.

Na figura 5.2.1 também está mostrado um ajuste com a expressão ($A, b > 0$):

$$L(\tau) = \begin{cases} -Ae^{-b\tau} & \text{se } \tau > 0 \\ 0 & \text{se } \tau < 0 \end{cases} \quad (\text{eq. 5.2.5})$$

A figura abaixo mostra dados recentes para a média da correlação leverage para $\tau > 0$ de 4 índices, S&P500, BE500, Nikkei e FTSE [31], segundo a formulação da eq. 5.2.3.

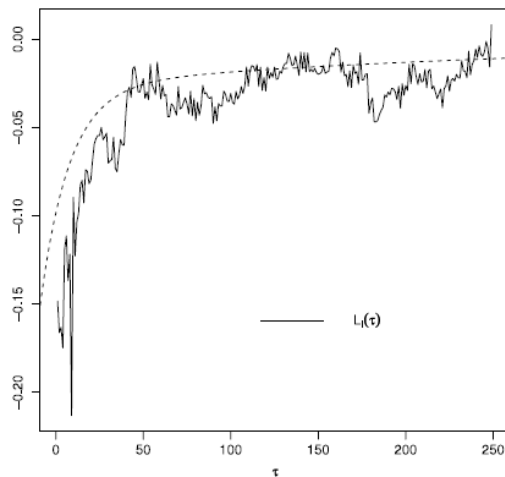


Fig .5.2.2: Média da correlação leverage dos índices S&P500, BE500, Nikkei e FTSE, para dados diários entre 01/2000 e 04/2010 [31].

O cálculo da correlação *leverage* via eq. 5.2.3 para os dados empíricos do Ibovespa compreendidos no período de 05/1995 e 03/2012, usando o mesmo estimador (eq. 2.3.1), levou ao seguinte resultado:

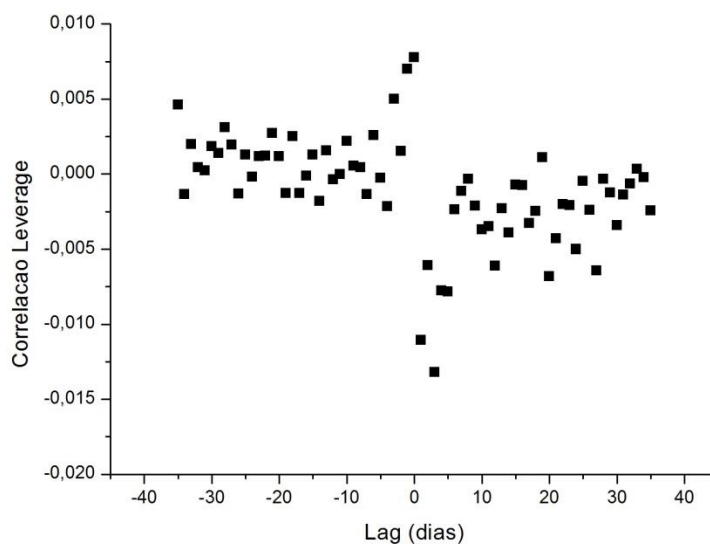


Figura 5.2.3: Correlação leverage usando formulação dada pela eq. 5.2.3 para os dados diários do IBOVESPA entre 1995-2012 e estimador de volatilidade dado pela eq. 2.3.1.

Vemos que, com a volatilidade dada pelo estimador da eq. 2.3.1, o efeito *leverage* é mensurado de forma fraca no mercado brasileiro. Resultado análogo foi obtido para o estimador de volatilidade dado pela eq. 2.3.7. Consideramos

então uma nova formulação, levando-se em conta a correlação entre retorno e volatilidade:

$$L(\tau) = \frac{1}{Z'} \langle dx'(t)v(t + \tau) \rangle \quad (\text{eq. 5.2.6})$$

onde Z' é uma constante de normalização mais adequada para esse caso, dada por:

$$Z' = \langle v(t) \rangle^2 \quad (\text{eq. 5.2.7})$$

A partir da eq. 5.2.6, usando a definição da eq. 2.3.1 para $v(t)$, chegamos ao resultado mostrado na figura 5.2.3, que apresenta de forma muito mais visível a correlação negativa entre retorno e volatilidade. No caso do mercado brasileiro, o problema do cálculo do efeito *leverage* com a formulação anterior, que utiliza o valor quadrático v^2 , é a falta de relevância estatística dos dados de volatilidade alta na série histórica utilizada.

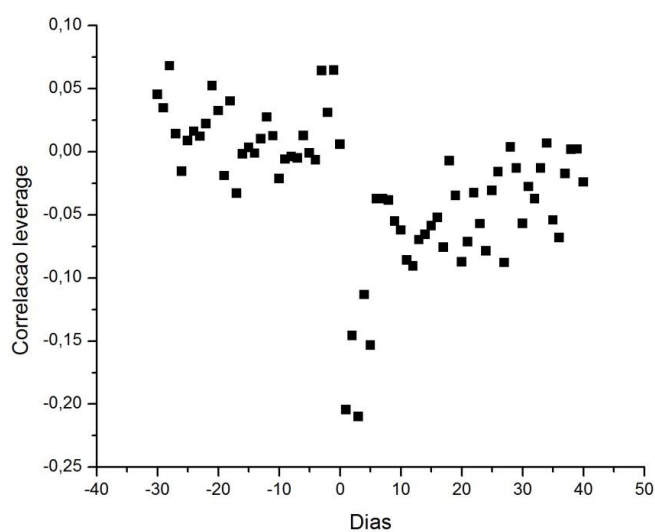


Figura 5.2.4: Correlação *leverage* para os dados diários do IBOVESPA entre 1995-2012, usando a formulação dada pela eq. 5.2.6 e estimador de volatilidade dado pela eq. 2.3.1.

Também calculamos a correlação *leverage* dada pela eq. 5.2.6 para os dados de volatilidade diária $v(t)$ de acordo com o estimador da eq. 2.3.7. Neste caso, o tamanho da amostra é menor pois não existem dados intra-diários do Ibovespa antes de 2002. A figura. 5.2.5 mostra que para $\tau > 0$ a correlação negativa é significativa até $\tau = 10$ dias.

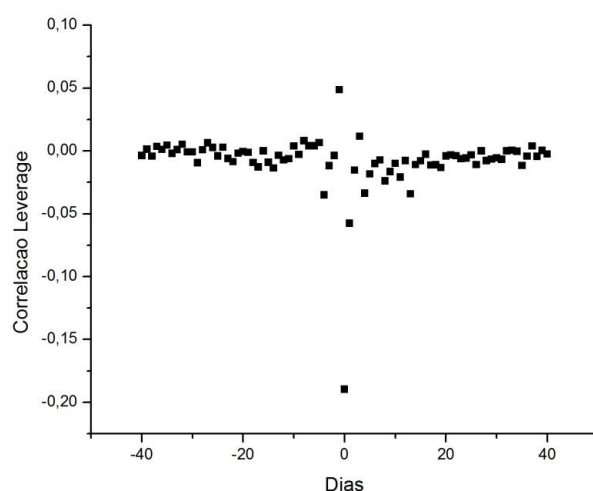


Figura 5.2.5: Correlação *leverage* para os dados de volatilidade diária do IBOVESPA na formulação dada pela eq. 5.2.6 e estimador de volatilidade dado pela eq. 2.3.7.

Da figura 5.2.5, vemos que nosso estimador também leva a um formato de correlação *leverage* consistente com os obtidos nas figuras 5.2.3 e 5.2.4. Isso nos leva à conclusão de que, independentemente do estimador e da formulação de correlação utilizados, o efeito *leverage* pode ser observado no mercado brasileiro.

A exponencial simples, apresentada na eq. 5.2.5, tem sido considerada como ajuste para a correlação *leverage* para $\tau > 0$ em praticamente toda literatura sobre mercados desenvolvidos. Em nosso estudo, consideramos duas funções de ajuste, a exponencial simples, com nova definição dos parâmetros:

$$y(\tau) = -A_1 e^{-\frac{\tau}{\tau_1}} \quad (\text{eq. 5.2.8})(A)$$

e a exponencial dupla, apresentada na equação abaixo:

$$y(\tau) = - (A_1 e^{-\frac{\tau}{\tau_1}} + A_2 e^{-\frac{\tau}{\tau_2}}) \quad (\text{eq. 5.2.8})(B)$$

Reproduzimos na figura 5.2.6 os resultados empíricos da figura 5.2.5 para $\tau > 0$ com os dois ajustes. É interessante estabelecermos um paralelo entre as tabelas 2.4.1 e 5.2.1. Considerando o ajuste com a dupla exponencial, as constantes temporais do efeito *leverage* são semelhantes às encontradas para a autocorrelação da volatilidade. Em ambas, a escala curta é intradiária próxima a 4h e a escala longa é de aproximadamente um mês, sendo a escala intradiária a de maior peso. Dessa forma, este resultado reforça o anterior de que há pelo menos

duas constantes temporais envolvidas na dinâmica da volatilidade no mercado brasileiro.

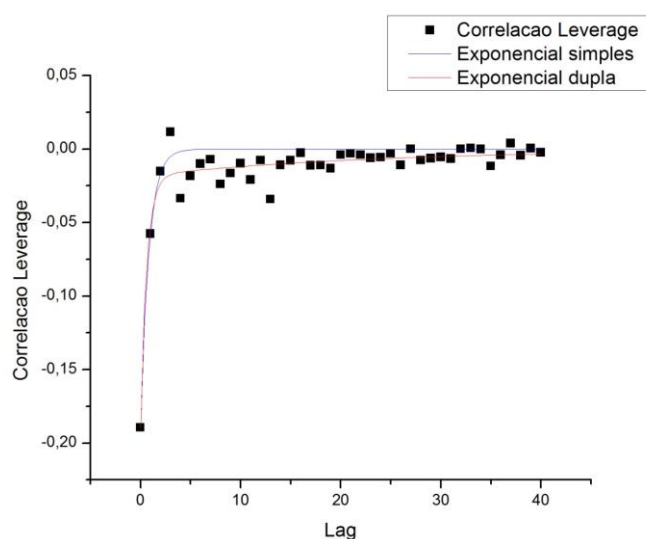


Figura 5.2.6: Reprodução da figura 5.2.5 para $\tau > 0$ e ajustes com as funções dadas pelas eqs. 5.2.8(A) e 5.2.8(B).

Mostramos na tabela abaixo os parâmetros encontrados para cada modelo no ajuste da figura 5.2.6:

	Exponencial Simples		Exponencial Dupla	
	Valor	Erro	Valor	Erro
A1	0,1895	0,0119	0,1719	0,0048
A2			0,0182	0,0095
τ_1	0,8255	0,1258	0,6166	0,1021
τ_2			23,5836	9,542
R^2	0,8453		0,9257	

Tabela 5.2.1: Parâmetros obtidos com o ajuste mostrado na figura 5.2.6.

Pelos dados mostrados na tabela 5.2.1 encontramos que o modelo de exponencial dupla descreve melhor o efeito leverage. No entanto, independentemente do ajuste considerado, o horizonte temporal de curto prazo é equivalente (4-6 horas). No caso da dupla exponencial, embora, a constante característica de longo prazo τ_2 não fique bem definida, sua relevância é muito pequena em relação à constante de curto prazo τ_1 (o peso de τ_2 representa apenas 10% da contribuição total).

Também procedemos ao ajuste dos dados da figura 5.2.4 para $\tau > 0$, a fim de analisarmos a influência do estimador de volatilidade sobre o efeito leverage.

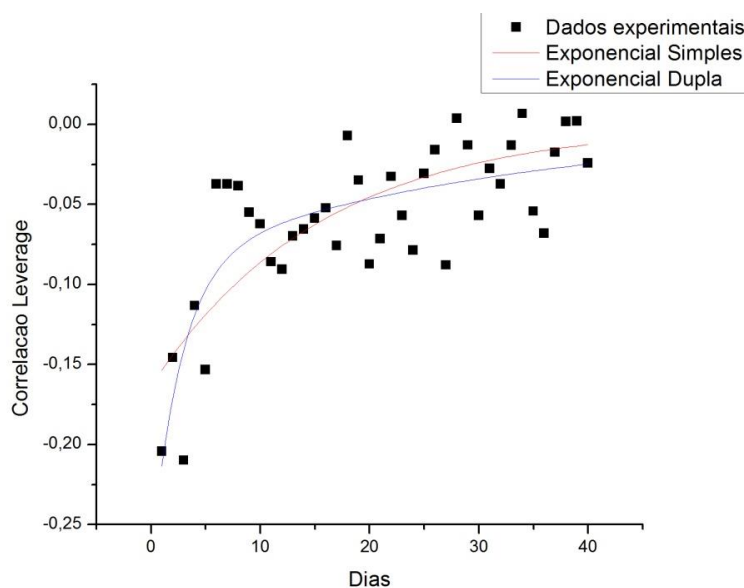


Figura 5.2.7: Reprodução da figura 5.2.4 para $\tau > 0$ e ajustes com as funções dadas pelas eqs. dadas nas eqs. 5.2.8(A) e 5.2.8(B).

Comparativamente, o efeito é mais bem visualizado na figura 5.2.7, se dissipando de forma mais lenta do que na figura 5.2.6. Na tabela abaixo apresentamos os parâmetros encontrados para cada função de ajuste da figura 5.2.6:

	Exponencial Simples		Exponencial Dupla	
	Valor	Erro	Valor	Erro
A1	0,1630	0,0191	0,1873	0,0580
A2			0,0865	0,0360
τ_1	15,6000	2,6369	2,7026	1,6341
τ_2			32,0693	18,4322
R^2	0,5442		0,6261	

Tabela 5.2.2: Parâmetros resultantes do ajuste da correlação *leverage* usando a formulação dada pela eq. 5.2.6 e estimador de volatilidade dado pela eq. 2.3.1.

Nesse caso há uma dispersão bem maior nos dados, o que torna o R^2 muito pior em relação ao anterior. Notamos ainda que a constante temporal τ_1 é bem maior na tabela 5.2.2 (aproximadamente 15 dias) enquanto na tabela 5.2.1, $\tau_1 < 1$ dia. Novamente, esta diferença ocorre devido ao estimador da eq. 2.3.1 não conter informações intradiárias da mesma forma que o estimador da eq. 2.3.7. No entanto, é interessante notar que para o ajuste de dupla exponencial, encontramos a constante temporal τ_2 da ordem de um mês em ambos casos. Além disso, ressaltamos também que encontramos um resultado consistente com o valor $L(0) = -0.19$ (amplitude inicial do efeito), encontrado em [01] para o mercado brasileiro.

Para estabelecer um paralelo entre os resultados para o mercado brasileiro e a literatura de mercados desenvolvidos, comparamos os fittings da correlação leverage de acordo com a formulação 5.2.3. Na figura a seguir, reproduzimos a figura 5.2.3 para $\tau > 0$ com as funções de ajuste dadas nas eqs. 5.2.8(A) e 5.2.8(B).

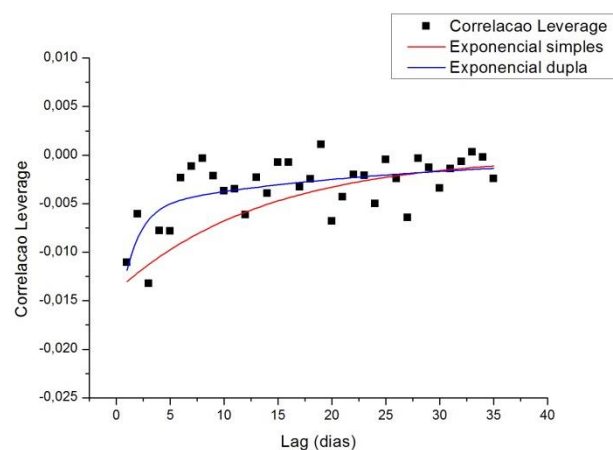


Figura 5.2.8: Reprodução da Figura 5.2.3 para $\tau > 0$ e ajustes com as funções dadas nas eqs. 5.2.8(A) e 5.2.8(B).

	Exponencial simples		Exponencial dupla	
	Valor	Erro	Valor	Erro
A_1	0,014	0,002	0,01262	0,00575
A_2			0,0056	0,00165
τ_1	13,8	2,87	1,5	0
τ_2			24,78321	11,6648

Tabela 5.2.3: Parâmetros resultantes do ajuste da correlação *leverage* usando a formulação dada pela eq. 5.2.3 e estimador de volatilidade dado pela eq. 2.3.1.

Ajustes com a exponencial simples fornecem, por exemplo, constante temporal característica $\tau_1 \approx 9$ dias para índices de diversos mercados [27] e $\tau_1 \approx 20$ para a série histórica do DJIA [30], enquanto da tabela 5.2.3, $\tau_1 \approx 14$ dias para o IBOVESPA, ou seja, o efeito *leverage* tem decaimento na escala diária equivalente aos outros mercados. Nota-se também pela figura 5.2.1 que no caso do DJIA a exponencial simples tem um ajuste bastante eficiente, o que não acontece com os dados do IBOVESPA. Uma explicação possível é que os dados do DJIA compreendem a série de preços entre 1900-2000, o que representa, além de maior número de dados, maior número de cenários² de mercado.

² Por cenários de mercado entendemos cenários de *bear market* (mercados com tendência de queda) e *bull markets* (cenários com tendência de alta).

No entanto, nossos resultados estão de acordo com estudos que mostram que a correlação *leverage* acontece de maneira distinta nos mercados emergentes, com alguns mercados tendendo a apresentar correlação *leverage* menos negativa, ou até mesmo positiva, quando são considerados apenas os períodos de *bull market* [01].

5.3

Modelagem matemática do Efeito Leverage

Pode-se justificar matematicamente a existência do efeito *leverage* através de uma grande classe de modelos de volatilidade estocástica que incluem os modelos por nós abordados.

Foi demonstrado que a dependência temporal da correlação *leverage* dada pela eq. 5.2.3, na qual a volatilidade é estimada como módulo do retorno, exibe comportamento dado pela eq. 5.2.5 para uma ampla classe de modelos estocásticos [32]. Apresentamos a seguir uma demonstração mais geral na qual a correlação dada pela eq. 5.2.1 é obtida para um estimador genérico de volatilidade.

Considera-se a equação de difusão para os retornos logarítmicos em dado intervalo temporal, segundo o modelo padrão dos preços:

$$r(t) = \mu dt + v(t)dW_1(t) \quad (\text{eq. 5.3.1})$$

e os retornos de preços sem tendência dada pela eq. 5.2.2. A volatilidade é função de variável estocástica $Y(t)$ cuja dinâmica é descrita por um processo de reversão à média:

$$dY = -\gamma(Y - m)dt + g(Y)dW_2(t) \quad (\text{eq. 5.3.2})$$

onde $g(Y)$ é uma função de $Y(t)$. Dessa forma, a volatilidade $v(Y(t))$ segue um processo generalizado de reversão à média. Nessas equações, $dW_i(t) = \xi_i(t)dt$ ($i = 1,2$) onde $\xi_i(t)$ são ruídos gaussianos correlacionados:

$$\langle \xi_1(t)\xi_2(t') \rangle = \rho \delta(t - t') \quad (\text{eq. 5.3.3})$$

O cálculo da eq. 5.2.1 leva à seguinte expressão para o efeito *leverage* (ver apêndice 7):

$$L(\tau) = \rho\theta(\tau)B(\tau)e^{-\gamma\tau} \quad \tau > 0 \quad (\text{eq. 5.3.4)(A)}$$

$$L(\tau) = 0 \quad \tau < 0 \quad (\text{eq. 5.3.4)(B)}$$

com

$$B(\tau) = \frac{2\langle v(t)v(t+\tau)v'(t+\tau)G(t,t+\tau) \rangle}{z} \quad (\text{eq. 5.3.5)(A)}$$

$$G(t, t + \tau) = g(Y(t)) \exp \left[\int_t^{t+\tau} g'(Y(s)) \xi_2(s) ds \right] \quad (\text{eq. 5.3.5)(B)}$$

Assim, através da eq. 5.3.4(A), esperamos obter um comportamento exponencial dominante tempo característico dado pelo parâmetro $1/\gamma$ para a correlação *leverage* na formulação da eq. 5.2.1, a partir de modelos de reversão à média para a volatilidade estocástica $v(Y(t))$. Em [33] são apresentadas as soluções para alguns modelos.

A forma exata da eq. 5.3.4(A) dependerá do modelo escolhido (naturalmente em alguns casos não haverá uma solução analítica fechada), mas a partir dela já é possível inferir algumas propriedades. Em primeiro lugar, a correlação *leverage* depende da correlação ρ existente entre os ruídos que regem o processo estocástico do retorno e da volatilidade. Para $v'(Y) > 0$, a forma da correlação *leverage* nos indica que $\rho < 0$.

Por outro lado, na eq. 5.3.5(A), o termo $B(\tau)$ inclui o produto $v(t)v(t + \tau)$, cujo valor médio, assumindo que a volatilidade alcançou o regime estacionário, a autocovariância (eq. 2.3.6) acrescida do quadrado da volatilidade média. Ou seja, a existência de comportamento duplo exponencial obtido na seção 2.4.1 sugere um comportamento equivalente para correlação *leverage*.

A existência de dependência temporal exponencial para a correlação *leverage* em $\tau > 0$, segundo a formulação da eq. 5.2.6, também pode ser justificada matematicamente. No apêndice 7 mostramos que neste caso,

$$L(\tau) = \rho\theta(\tau)J(\tau)e^{-\gamma\tau} \quad (\text{eq. 5.3.6)(A)}$$

com

$$J(\tau) = \frac{\langle v(t)v'(t+\tau)G(t,t+\tau) \rangle}{Z} \quad (\text{eq. 5.3.6})(B)$$

Dessa forma, podemos prever a existência de dependência temporal exponencial da correlação *leverage*, independentemente da formulação utilizada. Este resultado está de acordo com as evidências empíricas encontradas para o IBOVESPA segundo as formulações apresentadas nas eqs. 5.2.3 e 5.2.6.

Por outro lado, o melhor ajuste da correlação *leverage* com dupla exponencial sugere a procura por modelos estocásticos que contemplem ao menos duas escalas temporais características. Uma proposta que reproduz a dinâmica de múltiplas escalas observada consiste em introduzir parâmetros com dependências temporais intrínsecas. Em particular, o nível de volatilidade de equilíbrio pode evoluir suavemente de acordo com as condições macroeconômicas do mercado. Por exemplo, a extensão da eq. 5.3.2 [32] na qual tanto a volatilidade quanto o valor de equilíbrio m seguem um processo O-U aritmético levam à correlação *leverage* com duas escalas características, sendo o comportamento dominante de curto prazo determinado pelo parâmetro de reversão do processo da volatilidade $1/\gamma$. No entanto tal modelo gera distribuição de volatilidade Gaussiana, o que é totalmente inadequado.

Considerando o processo estocástico dado pela eq. 4.6.3, o mecanismo de reversão à média pode ser interpretado como estocástico, ou seja, $\gamma_{\text{eff}} = \frac{\gamma}{x(t)}$. Tomando uma aproximação *de ordem zero*, consideramos o valor médio $\gamma_{\text{eff}}^0 \equiv \gamma \langle \frac{1}{x(t)} \rangle$. Assim, o processo estocástico passa a ser descrito por:

$$dx = -\gamma_{\text{eff}}^0(x - \theta)dt + \xi x^{1/2}dW_2 + \zeta dW_3 \quad (\text{eq. 5.3.7})$$

onde os processos W_2 e W_3 são independentes.

Considerando o modelo AM quadrático, no qual $x \equiv v^2$, obtém-se para o processo estocástico da volatilidade (ver apêndice 8):

$$dv = \frac{1}{2} \left\{ \left[-\gamma(v^2 - \theta)v^{-3} - \frac{1}{2}\xi^2 \left[v^2 + \left(\frac{\zeta}{\xi} \right)^2 \right] v^{-3} \right] dt + \xi dW_2 + \zeta v^{-1} dW_3 \right\} \quad (\text{eq. 5.3.8})(A)$$

$$dv = \frac{1}{2} \left\{ \left[-\gamma v^{-2} \left(v - \frac{\theta}{v} \right) - \frac{1}{2} \xi^2 v^{-2} \left[v + \left(\frac{\zeta}{\xi} \right)^2 \frac{1}{v} \right] \right] dt + \xi dW_2 + \zeta v^{-1} dW_3 \right\} \quad (\text{eq. 5.3.8})(B)$$

Logo, podemos escrever (ver apêndice 8):

$$dv = -\gamma_{eff}^0 (v - \theta_{eff}^0) dt + \xi dW_2 + \zeta v^{-1} dW_3$$

com:

$$\gamma_{eff}^0 = \frac{\gamma + \xi^2/2}{2} \langle v^{-2} \rangle = \frac{\xi^2 (\frac{1}{2} + \gamma_\xi)}{2} \langle v^{-2} \rangle \quad (\text{eq. 5.3.9})(A)$$

e

$$\theta_{eff}^0 = \langle v^{-1} \rangle \left(\gamma \theta - \frac{1}{2} \zeta^2 \right) / \left(\gamma + \frac{1}{2} \xi^2 \right) \quad (\text{eq. 5.3.9})(B)$$

O ajuste da exponencial simples apresentado na figura 5.2.6 fornece a constante temporal $\tau_1 \approx 0,83$, ou seja, $\gamma_{eff}^0 = 1/\tau_1 = 1.2$. Usando a eq. 5.3.9(A), a partir do valor empírico de $\langle 1/x(t) \rangle \equiv \langle 1/v^2(t) \rangle = 1,89$ e dos parâmetros obtidos no capítulo 4 (tabela 4.7.2), $\gamma_\xi = 1.82$ e $\gamma_\zeta = 8.91$, encontramos os parâmetros naturais $\gamma = 1.00$, $\xi^2 = 0.55$ e $\zeta^2 = 0.11$.

Note que, de acordo com resultados anteriores obtidos na seção 4.6.1, encontra-se que a amplitude quadrática do ruído multiplicativo é mais relevante do que a do ruído aditivo (fator 5), consistente com distribuição não-Gaussiana de volatilidade.