

## 2

### Métodos de apreçamento de ativos e modelagem por opções reais

#### 2.1

##### Apreçamento de ativos por fluxo de caixa descontado

*Apreçamento (valuation) é a estimação do valor de um ativo baseado nas variáveis consideradas relevantes para o retorno futuro de investimentos, na comparação com ativos similares ou, quando pertinente, na estimativa de renda gerada pela liquidação imediata. [CFA Program Level II Curriculum, Equity, página 9].*

Um apreçamento adequada de ativos é uma preocupação de diversos agentes econômicos - investidores, pesquisadores, reguladores, analistas, diretores de empresas etc. – pois impacta diretamente as análises empreendidas pelos mesmos e, assim, suas recomendações e tomadas de decisões. Como a própria definição acima indica, existem diversas técnicas empregadas nesse processo e em muitos casos mais de uma técnica pode ser empregada. No entanto, na avaliação de projetos e de participações em empresas, uma das abordagens mais populares é o *fluxo de caixa descontado (FCD)*, que considera o valor de um ativo equivalente à soma do valor presente dos fluxos de caixa futuros dele esperados. Um maior detalhamento sobre técnicas de apreçamento - dentre elas, as diversas de fluxo de caixa descontado - assim como a determinação de uma taxa de desconto adequada fogem ao escopo desse trabalho, mas pode ser encontrado em outras referências como Damodaran (2006), Titman & Martin (2007), dentre outros. Ainda assim, vale ressaltar que uma taxa de desconto é considerada apropriada se reflete adequadamente o risco inerente ao ativo em análise, isto é, projetos com maior incerteza devem ser descontados as taxas de desconto maiores e vice-versa.

$$\text{Valor}_{\text{FCD}} = \sum_{t=0}^n \frac{E[FC_t]}{(1+k)^t} \quad (2-1)$$

“ $t$ ” é variável de tempo que assume valores discretos de  $1 \dots n$

“ $FC_t$ ” é o fluxo de caixa no tempo “ $t$ ”

“ $k$ ” é a taxa de desconto ajustada ao risco dos fluxos de caixa.

## 2.2

### **Apreçamento de ativos por equivalente certo**

Outra técnica para o apreçamento de ativos é do “equivalente certo”. Neste caso, em vez do valor de um ativo ser determinado pela soma dos fluxos de caixa por ele gerados descontados a uma taxa que expresse adequadamente seu risco - “ajuste no denominador” - os fluxos de caixa esperados são substituídos por seus “equivalentes certos” e sua soma é descontada à taxa livre de risco. Dessa forma, há um “ajuste no numerador” para considerar o risco inerente ao ativo. Um artigo clássico nesse tema é dado por Robichek & Myers (1966). Dixit & Pindyck (1994) abordam o tema no contexto de opções reais, enquanto Titman & Martin (2007) trazem exemplos de fácil compreensão.

## 2.3

### **Apreçamento de ativos por probabilidades neutras a risco**

Uma terceira possibilidade de ajuste ao risco é nas probabilidades atribuídas aos diversos estados possíveis da natureza. O trabalho mais emblemático nesse campo é dado por Cox & Ross (1976). Mais detalhes em Brandão (2002) e em Shreve (2004), este com uma abordagem bastante didática para descrever o método em tempo discreto.

## 2.4

### **Apreçamento de ativos por opções reais**

Desde os trabalhos pioneiros de Black & Scholes (1973) e Merton (1973) para a avaliação de opções financeiras, buscou-se estender a metodologia para a análise de ativos reais - reservas petrolíferas e minerais, concessões, patentes etc. Sua base teórica/matemática é, porém, consideravelmente mais complexa do que aquela de FCD e será detalhada nesta seção.

### 2.4.1

#### **Limitações do método de fluxo de caixa descontado**

Lemme (2000) destaca as diferenças entre ativos financeiros e ativos reais - conforme Brandão (2002) página 23 - e, assim, problemas para o uso do método de fluxo de caixa descontado para ativos reais, conforme mostra a Tabela 1 (em versão adaptada da original):

Ativos Financeiros	Ativos Reais	Comentário
Divisibilidade	Indivisibilidade	Projetos não são divisíveis; valor do controle faz com que o todo não corresponda a soma das partes
Repetição de Eventos	Eventos únicos	Não replicabilidade reduz utilidade de medidas estatísticas
Alta liquidez	Baixa Liquidez	Baixa liquidez aumenta o risco
Baixo custo de transação	Alto custo de transação	Viola premissas de diversos modelos
Informações amplamente difundidas	Assimetria de informação entre investidores	Permite ganhos de arbitragem
Existe Mercado	Mercado ilíquido ou pouco líquido	Sem preço de mercado
Risco de Mercado	Risco de Mercado e Risco Privado	Risco Privado não correlacionado com o Mercado
Curto Prazo	Longo Prazo	Tempo para expiração

**Tabela 1:** Diferenças entre Ativos Financeiros e Reais segundo Lemme (2000)

Outro problema do uso de fluxo de caixa descontado para opções reais conforme destacado por Brandão (2002; página 24) é:

*Ao considerar que projetos de investimento são operados de forma passiva, sem nenhuma interferência ou flexibilidade gerencial após o seu início, o método do FCD ignora o valor de opção existente nessa oportunidade de investimento, e pode levar a decisões de investimento não ótimas.*

#### 2.4.2

#### Técnicas de Otimização Dinâmica sob Incerteza

Dixit & Pindyck (1994) destacam duas técnicas matemáticas adequadas para a análise de investimentos sob incerteza: programação dinâmica e método de ativos contingentes. Tais abordagens baseiam-se em hipóteses distintas sobre mercados financeiros e as taxas de desconto adequadas para avaliar fluxos de caixa futuros, mas ainda assim conduzem a resultados idênticos ou bastante próximos em muitos casos.

## Programação Dinâmica

A programação dinâmica desmembra a sequência de decisões (temporais) de um projeto: uma decisão imediata e uma função de apreçamento para todas as decisões subseqüentes - a partir daquela resultante da escolha imediata - conhecida como valor de continuação (*continuation value*). Isso permite um apreçamento de trás para frente: a última escolha determina a função de apreçamento na penúltima etapa, o que por sua vez é empregado na decisão da antepenúltima etapa e assim sucessivamente.

O método para o caso de horizonte finito pode ser resumido *pela equação de Bellman*:

$$F_t(x_t) = \max_{u_t} \left\{ \pi_t(x_t, u_t) + \frac{1}{1 + \rho} E_t[F_{t+1}(x_{t+1})] \right\} \quad (2-2)$$

$x_t$  representa a variável de estado no instante  $t$

(por ex.: preço do ativo objeto)

$u_t$  representa a variável de decisão no instante  $t$

(por ex.: exercer ou não a opção)

$\rho$  é a taxa de desconto exógena ao projeto

(custo de oportunidade do investidor)

$F_t(x_t)$  é o valor da opção no instante  $t$

$\pi_t(x_t, u_t)$  é o lucro imediato no instante  $t$

$E_t[F_{t+1}(X_{t+1})]$  é o valor de continuação

Essa equação pode ser simplificada em tempo contínuo conforme Dixit & Pindyck (1994) página 105:

$$\rho F_t(x, t) = \max_u \left\{ \pi(x, u, t) + \frac{1}{dt} E[dF] \right\}. \quad (2-3)$$

A intuição por trás dessas fórmulas está no princípio de Bellman de otimização conforme a seguinte tradução livre de Dixit & Pindyck (1994):

*A estratégia ótima tem a propriedade de, qualquer que seja a escolha inicial, as escolhas remanescentes constituírem uma estratégia ótima em relação ao subproblema iniciado no estado resultante das ações iniciais.*

Uma célebre aplicação da lógica de programação de dinâmica foi o desenvolvimento do algoritmo de Monte Carlo de Mínimos Quadrados por Longstaff & Schwartz (2001), que será descrito em seção posterior.

## Ativos Contingentes

O método por ativos contingentes considera que, caso os fluxos de caixa gerados por um ativo possam ser replicados por uma combinação (portfólio) de ativos negociáveis, então - assumindo a ausência de oportunidades de arbitragem - o valor desse derivativo deve ser idêntico àquele do portfólio que o replica. Usualmente, constrói-se um portfólio sem risco com o ativo cujo valor se deseja determinar, o que possibilita o uso da taxa livre de risco como taxa de desconto. Caso o retorno do portfólio sem risco seja diferente da taxa livre de risco, seria possível obter ganhos por arbitragem.

A condição de replicabilidade do ativo por outros negociáveis restringe a aplicação desse método. Como a taxa livre de risco é usualmente conhecida (ou facilmente determinada), o apreçamento por ativos contingentes tornou-se bastante popular em finanças. Seu uso mais célebre foi por Black & Scholes (1973) e Merton (1973) na determinação de uma solução analítica para uma opção do tipo europeia, o que será detalhado em seções subsequentes.

### 2.4.3 Cálculo estocástico

#### Definições

**Processo Estocástico:** Um processo estocástico  $X$  é uma coleção de variáveis aleatórias

$$(X_t, [0, T]) = (X_t(\omega, t \in [0, T], \omega \in \Omega)) \quad (2-4)$$

definidas em algum espaço amostral  $\Omega$  que contém todos os estados da natureza  $\omega$ . O conjunto  $[0, T]$  representa um conjunto infinito de instantes de tempo.

**Ruído Branco:** Seja  $\{\varepsilon_t\}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) com média zero e variância  $\sigma_\varepsilon^2$ . Esta sequência é denominada ruído branco (RB). Assim temos  $\varepsilon_t \sim iid$  tal que

$$E(\varepsilon_t) = 0; \quad Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2; \quad cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+k}) = 0 \quad \forall k \neq 0. \quad (2-5)$$

**Passeio Aleatório:** Considere  $\varepsilon_t$  um RB tal que  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Considere  $y_t$  tal que

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (2-6)$$

O processo descrito por  $y_t$  define um passeio aleatório (*random walk*).

**Processo de Incrementos Estacionários:** Seja  $X_t$ ,  $t \in [0, T]$  um processo estocástico.  $X_t$  é dito ser um processo com incrementos estacionários se

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h}. \quad (2-7)$$

para todo  $t, s \in [0, T]$  e  $t + h, s + h \in [0, T]$ .

A igualdade  $\stackrel{d}{=}$  significa igualdade em distribuição, ou seja, os processos definidos em ambos os lados da igualdade possuem a mesma distribuição.

**Processo de Incrementos Independentes:** Seja  $X_t, t \in [0, T]$  um processo estocástico.  $X_t$  é dito ser um processo com incrementos independentes se

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \quad (2-8)$$

são variáveis aleatórias independentes.

**Processo Browniano Padrão:** Um processo  $Z_t, t \in [0, \infty)$  é denominado Browniano padrão ou processo padrão de Wiener se:

- (i)  $Z_0 = 0$ ,
- (ii) Tem incrementos estacionários e independentes,
- (iii) Para todo  $t > 0, Z_t \sim N(0, t)$ ,
- (iv) As realizações são contínuas, isto é, sem saltos.

**$\sigma$ -álgebra:** Define-se  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$ , por uma coleção de subconjuntos de  $\Omega$  satisfazendo:

- (i) Não é vazio:  $\phi \in \mathcal{F}$  e  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
- (ii) Se  $A \in \mathcal{F}$ , então  $A^C \in \mathcal{F}$ ,
- (iii) Se  $A_1, A_2, \dots, \in \mathcal{F}$ , então  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$  e  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

**Medida de Probabilidade:** Considere que  $\mathcal{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra definida em  $\Omega$ . A medida de probabilidade  $P$  é uma função  $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  tal que

- (i)  $P(\Omega) = 1$
- (ii)  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i \neq j$ , então

$$P(A_1 \cup A_2 \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots \quad (2-9)$$

A tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  é denominada de espaço de probabilidade e os conjuntos pertencentes a  $\mathcal{F}$  são denominados eventos.

**Medidas de Equivalentes:** Duas medidas de probabilidade  $P$  e  $Q$  em  $(\Omega, \mathcal{F})$  são equivalentes se concordam em quais conjuntos de  $\mathcal{F}$  tem probabilidade zero.

**Medida Neutra ao Risco:** A medida de probabilidade  $Q$  é neutra ao risco se  $P$  e  $Q$  são equivalentes e se sob  $Q$  os processos de preços descontados de cada ativo do mercado é martingal.

**Filtração:** Uma coleção de  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_t$  em  $\Omega$  é denominada filtração se, para todo  $0 \leq s \leq t$ , tem-se que  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ .

**$\mathcal{F}$ -mensurável:** Seja  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra, então qualquer conjunto de  $\mathcal{F}$  é dito  $\mathcal{F}$ -mensurável. Uma função  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita  $\mathcal{F}$ -mensurável se  $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ .

**Processo Adaptado:** Diz-se que um processo estocástico  $Z_t$  é adaptado à filtração  $\mathcal{F}_t$  se a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $Z$  está contida em  $\mathcal{F}$ , ou seja,  $\sigma(Z_t) \subset \mathcal{F}_t$ . Todo processo estocástico  $Z$  é sempre adaptado a sua filtração natural, ou seja,  $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_s)$  para  $s \leq t$ . Um processo estocástico  $Z$  é adaptado se, para todo  $t$ ,  $Z_t$  é  $\mathcal{F}$ -mensurável.

**Processo Martingal:** Um processo estocástico  $Y = (Y_t, t \geq 0)$  é denominado martingal com respeito à filtração  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  se:

- (i)  $E(|Y_t|) < \infty$  para  $t \geq 0$ ,
- (ii)  $Y$  é adaptado a  $\mathcal{F}_t$ ,
- (iii)  $E(Y_t | \mathcal{F}_s) = Y_s$  para  $0 \leq s < t$ .

**Processos Submartingal e Supermartingal:** Considere um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e seja  $Y_t$  um processo estocástico adaptado e  $U \leq t \leq T$ :

- (i)  $E(Y_t | \mathcal{F}_s) \geq Y_s$  para  $0 \leq s \leq t$ , diz-se que o processo é submartingal,
- (ii)  $E(Y_t | \mathcal{F}_s) \leq Y_s$  para  $0 \leq s \leq t$ , diz-se que o processo é supermartingal.

**Integral de Itô de um Processo Generalizado:** Considere um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  e uma partição  $\delta_n$

$$\delta_n: 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T \quad (2-10)$$

Seja  $Z$ ,  $0 \leq t \leq T$  um processo Browniano padrão e  $\sigma_t$  um processo estocástico atendendo a:

- (i)  $\sigma_t$  é um processo adaptado a  $\mathcal{F}_t$ , em que  $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_s, s \leq t)$ ,
- (ii)  $\left[ \int_0^T \sigma_u^2 du \right] < \infty$ .

A integral de Itô  $\int_0^T \sigma_u dZ_u$  é o limite médio quadrático quando  $n \rightarrow \infty$ , ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ E \left[ \sum_{i=1}^n \sigma_{i-1} \Delta_i Z - \int_0^T \sigma_u dZ_u \right]^2 \right\} = 0 \quad (2-11)$$

com  $\Delta_i Z = Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}$ .

### Processos de Itô

São processos estocásticos do tipo:

$$dS(t) = \mu(S(t), t) \times dt + \sigma(S(t), t) \times dZ(t). \quad (2-12)$$

**Observação:** aqui  $\sigma$  é uma parâmetro/função para a volatilidade do processo e não uma sigma-álgebra como na seção anterior.

Notar que os termos  $\mu$  e  $\sigma_s$  na notação acima são funções da variável aleatória  $S(t)$ . A primeira é a função do valor esperado de  $S(t)$  descrevendo assim sua “tendência”. A outra é a função de sua volatilidade, logo relacionada à aleatoriedade da variável aleatória. A seguir, alguns exemplos de processos de Itô.<sup>1</sup>

### Processo Browniano Padrão ou Processo Padrão de Wiener

$$\mu(S(t), t) = 0 \quad \text{e} \quad \sigma(S(t), t) = 1$$

$$dS(t) = dZ(t). \quad (2-13)$$

### Movimento Aritmético Browniano

$$\mu(S(t), t) = a \quad \text{e} \quad \sigma(S(t), t) = b \quad \text{com } a \text{ e } b \quad \text{constantes}$$

$$dS = a \times dt + b \times dZ \quad (2-14)$$

### Movimento Geométrico Browniano

$$\mu(S(t), t) = \mu \times S(t) \quad \text{e} \quad \sigma(S(t), t) = \sigma \times S(t) \quad (2-15)$$

$$dS(t)/S(t) = \mu \times dt + \sigma \times dZ(t) \quad (2-16)$$

### Processo de Ornstein-Uhlenbeck (Reversão à Média)

$$\mu(S(t), t) = \eta \times [\overline{S(t)} - S(t)] \quad \text{e} \quad \sigma(S(t), t) = \sigma \quad (2-17)$$

$$dS(t) = \eta \times [\overline{S(t)} - S(t)] \times dt + \sigma \times dZ(t) \quad (2-18)$$

$\eta$  é a velocidade de reversão  $\overline{S(t)}$  é o valor de equilíbrio no long prazo.

<sup>1</sup>Observação: uma discussão mais detalhada das vantagens e desvantagens de cada modelo pode ser encontrada em Dias (2005).



**Processo de Reversão à Média com Tendência (Pindyck,1999; Ozorio, Pinto, Baidya e Brandão, 2012)**

$$Y(t) = \ln(S(t)) \quad (2-19)$$

$$\mu(Y(t), t) = k \times (C(t) - Y(t)) \times dt + dC(t) \quad \text{e} \quad \sigma(Y(t), t) = \sigma \times dZ(t) \quad (2-20)$$

$$dY(t) = k \times (C(t) - Y(t)) \times dt + dC(t) + \sigma \times dZ(t) \quad (2-21)$$

$C(t)$  é a tendência de longo prazo linear em  $t$ , determinística e não observável em  $Y(t)$ .  $k$  é o parâmetro de reversão

**Observação:** aqui foi empregada a nomenclatura original de Ozorio, Pinto, Baidya e Brandão (2012) para  $C(t)$  e  $Y(t)$ , diferente daquela utilizada no restante deste texto.

Dentre os diversos processos de Itô, o mais comumente empregado para expressar a trajetória dos retornos dos preços de ativos é o MGB, uma vez que e é o modelo que melhor se adequa às observações empíricas de lognormalidade dos retornos dos ativos. É possível provar que uma variável aleatória que segue um MGB apresenta distribuição lognormal do tipo:

$$\ln[S(T)/S(t)] \sim N(\mu - 1/2 \times \sigma^2, \sigma^2 \times t). \quad (2-22)$$

### Processos Estocásticos com Saltos

Os processos estocásticos citados anteriormente são definidos em tempo contínuo (processos de difusão). Apesar de serem amplamente empregados, há casos em que outros processos são mais apropriados. Dessa forma, nessa seção serão explorados os processos estocásticos que consideram a ocorrência de saltos discretos na variável modelada.

#### Processo de Poisson

$$dS(t) = f(S(t), t) \times dt + g(S(t), t) \times dq \quad (2-23)$$

$dq$  corresponde a um incremento aleatório, definido conforme abaixo:

$$dq = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } 1 - \lambda \times dt \\ u, & \text{com probabilidade } \lambda \times dt \end{cases} \quad (2-24)$$

$u$  é a amplitude do salto  $\lambda$  corresponde à frequência dos saltos.

**Processo de Reversão à Média com Saltos (Dias & Rocha, 1999)**

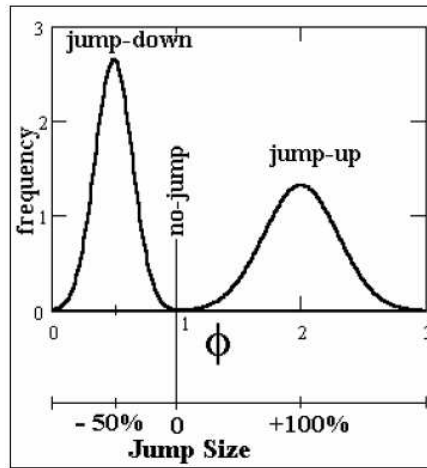
$$\mu(S(t), t) = \eta \times [\overline{S(t)} - S(t) - \lambda \times k] \quad \text{e} \quad \sigma(S(t), t) = \sigma \times dZ(t) + dq \quad (2-25)$$

$$dS(t)/S(t) = \eta \times [\overline{S(t)} - S(t) - \lambda \times k] \times dt + \sigma \times dZ(t) + dq \quad (2-26)$$

$$dq = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } 1 - \lambda \times dt \\ \phi - 1, & \text{com probabilidade } \lambda \times dt \end{cases} \quad (2-27)$$

$$k = E[\phi - 1]$$

$\eta, \overline{S(t)}, \lambda$  definidos com antes  $dq$  é um Processo de Poisson independente de  $dZ(t)$ ,  $\phi$  é a distribuição de probabilidade do tamanhos dos saltos conforme ilustrada pela Figura 1:



**Figura 1:** Distribuição de probabilidade de dimensão de saltos de Dias & Rocha (1999)

**Processo de Reversão à Média com Saltos (“Modelo de Marlim”; Dias, 2005)**

$$\mu(S(t), t) = \eta \times [\overline{S(t)} - S(t)] \quad \text{e} \quad \sigma(S(t), t) = \sigma \times dZ(t) + dq \quad (2-28)$$

$$dS(t) = \eta \times [S(t) - S(t)] \times dt + \sigma \times dZ(t) + dq \quad (2-29)$$

$$dq = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } 1 - \lambda \times dt \\ \phi, & \text{com probabilidade } \lambda \times dt \end{cases} \quad (2-30)$$

$$k = E[\phi]$$

Nesse caso, não há um termo de compensação de Poisson (“ $-\lambda \times k$ ”) pela adoção de uma distribuição de saltos de simétrica. Esse modelo é inspirado em Das,1998.

## O Lema de Itô

A partir da formulação do preço de ativos como processos de Itô é possível utilizar um importante resultado do cálculo estocástico para determinação do processo seguido por um derivativo. Esse resultado é conhecido como Lema de Itô:

Se  $S(t)$  segue um processo de Itô conforme:

$$dS(t) = \mu(S(t), t) \times dt + \sigma(S(t), t) \times dZ(t). \quad (2-31)$$

E  $C[S(t), t]$  é uma função duas vezes diferenciável de  $S(t)$ .

Então:  $dC(S, t) = C_S \times dS + \frac{1}{2} \times C_{SS} \times (dS)^2 + C_t \times dt$ , em que os subscritos denotam as derivadas parciais de  $C[S(t), t]$ .

Uma demonstração informal possível para o Lema de Itô é efetuar a expansão de Taylor para  $C[S(t), t]$  desprezando os termos de ordem  $(dt)^2$ , pouco relevantes na análise. Vale ressaltar que para qualquer processo de Itô:

$$\begin{aligned} [dS(t)]^2 &= [\mu(S(t), t) \times dt + \sigma(S(t), t) \times dZ(t)]^2 \\ [dS(t)]^2 &= [\mu(S(t), t) \times dt]^2 + 2 \times [\mu(S(t), t) \times dt] \times [\sigma(S(t), t) \times dZ(t)] \\ &\quad + [\sigma(S(t), t) \times dZ(t)]^2 \\ [dS(t)]^2 &= 0(dt^2) + 0(dt^{2/2}) + \sigma^2(S(t), t) \times dt = \sigma^2(S(t), t) \times dt \\ [dS(t)]^2 &= \sigma^2(S(t), t) \times dt \end{aligned} \quad (2-32)$$

uma vez que  $dZ(t) \sim 0(dt^{1/2})$ .

Segue uma demonstração informal da afirmação acima:

O incremento de Wiener  $dZ$  é definido como  $dZ = \varepsilon(dt)^{\frac{1}{2}}$ , em que  $\varepsilon \sim N(0, 1)$ . Dessa forma:

$$E[(dZ)^2] = E[\varepsilon^2(dt)] = dt E[\varepsilon^2] = dt$$

$$\text{var}[(dZ)^2] = \text{var}[\varepsilon^2(dt)] = dt^2 \text{var}[\varepsilon^2] \approx 0 \text{ pois } dt^2 \approx 0$$

### 2.4.4

## Apreçamento de opções financeiras

### Conceitos Básicos

#### O que são opções

Uma opção é um contrato que dá o seu detentor o direito - e não a obrigação como em um contrato futuro ou a termo - de comprar ou vender

algum ativo a um preço previamente determinado (preço de exercício) em uma ou mais data(s) futura(s) - tempo de maturação ou de exercício. O direito será uma compra se a opção for de compra (*call*) ou uma venda se a opção for de venda (*put*). É importante ressaltar que o ativo subjacente à opção não é obrigatoriamente financeiro. Um exemplo desse caso é a decisão de uma empresa petrolífera de abandonar - ou não - um prospecto, um caso típico de uma opção real.

Outra distinção importante é entre opções europeias e americanas. As europeias permitem ao seu detentor o direito ao exercício da opção apenas no tempo de maturação estabelecido. As opções do tipo americana são, por outro lado, mais flexíveis, permitindo seu exercício em qualquer momento até o tempo de maturação.

O benefício/direito descrito refere-se ao investidor que assume uma posição comprada - *long position* - na opção, isto é, que paga um custo inicial - prêmio da opção - para adquirir o direito inerente à opção. Por outro lado, o investidor que vende a opção assume uma posição vendida - *short position* - e recebe uma compensação financeira inicial correspondente ao prêmio da opção por assumir o compromisso contratual decorrente da opção.

Importante destacar que: (i) estar comprado em uma *call* e vendido em uma *put* correspondem a posições compradas no ativo subjacente, ou seja, demonstram uma expectativa de apreciação do mesmo; (ii) estar vendido em uma *call* e comprado em uma *put* correspondem a posições vendidas no ativo subjacente, isto é, de expectativa de depreciação do mesmo.

Alguns exemplos de opções, segundo Hull (2006):

- Opções de ações: tipo mais conhecido dentre as opções; além de negociadas em mercados organizados, são muito usadas como forma de remuneração variável a executivos de companhias abertas; esse tipo de opção distingue-se dos direitos de subscrição na medida em que este é um direito concedido pela própria companhia a seus acionistas para comprar - subscrever - mais ações da mesma, isto é, consiste em uma relação investidor-companhia e não investidor-investidor ou colaborador-companhia.

- Opções de moeda estrangeira: têm como ativo subjacente alguma moeda estrangeira - dólar, euro, iene, peso etc. - sendo muito empregadas para fins de hedge.

- Opções de índice: tem como ativo objeto uma cesta “imaginária” composta pelos ativos integrantes de algum índice - Bovespa, S&P 500, Nasdaq 100 etc. Como o ativo subjacente é “imaginário”, a liquidação desse tipo de opção sempre se dá por dinheiro.

- Opções de futuros: tem como ativo subjacente um contrato futuro

qualquer, logo é um derivativo do derivativo.

- Opções reais: tem como ativo subjacente um ativo não-financeiro, como uma reserva mineral, uma patente ou até um projeto em uma empresa.

Uma opção permite alavancagem, uma vez que o investidor que assume uma posição comprada na opção desembolsa apenas o valor do prêmio para estar exposto ao montante correspondente ao preço exercício. No entanto, é importante distinguir a alavancagem de opções daquela de contratos futuros. O investidor participante de um contrato futuro está de forma inequívoca exposto a um “grande” volume financeiro, enquanto que no caso da opção isso é certo apenas para o investidor em posição vendida. Isso porque, como é o investidor em posição comprada que possui o direito inerente à opção, é razoável esperar que ele só a exercerá quando lhe for vantajoso.

### Paridade Put-Call

A equação abaixo descreve como os valores de opções de compra e de venda europeias sobre um mesmo ativo e com mesmo tempo de maturação e preço de exercício se relacionam:

$$C + K \times e^{-r \times (T-t)} = p + S_t. \quad (2-33)$$

Sua dedução decorre do princípio de inexistência de oportunidades de arbitragem e é na prática uma importante fonte de oportunidades de operações.

Considere dois portfólios  $\pi_A$  e  $\pi_S$  montados no tempo  $t$ . O primeiro é composto de uma opção de compra européia com preço de exercício  $K$  sobre um ativo qualquer  $S$  e uma quantidade em dinheiro equivalente a  $K \times e^{-r \times (T-t)}$ . O outro é composto por um opção de venda europeia de mesmos parâmetros e uma ação do ativo  $S$ . Assim, no tempo  $t$  os portfólios são:

$$\pi_{A,t} = c + K \times e^{-r \times (T-t)} \quad (2-34)$$

$$\pi_{S,t} = p + S_t \quad (2-35)$$

No tempo de maturação, os valores desses portfólios serão:

$$\pi_{A,T} = \max(S_T - K, 0) + K = \max(S_T, K) \quad (2-36)$$

$$\pi_{S,T} = \max(K - S_T, 0) + S_T = \max(K, S_T). \quad (2-37)$$

Isto é, os portfólios montados têm o mesmo valor no tempo de maturação. Assim, para que não ocorram oportunidades de arbitragem, é necessário que eles tenham o mesmo valor no instante inicial  $t$  e daí decorre a equação enunciada inicialmente.

## Fórmula de Black and Scholes (1973) e Merton (1973)

### As hipóteses de Black, Scholes e Merton

Por abordagens diferentes, ainda que parecidas, Black, Scholes e Merton em 1973 deduziram uma fórmula para o apreçamento de uma opção de compra europeia. Antes de um breve comentário sobre sua abordagem, convém ressaltar algumas hipóteses por eles empregadas:

a) A taxa livre de risco é conhecida e constante ao longo do tempo.

Modelos para apreçamento de derivativos desenvolvidos posteriormente já contemplam o caso da taxa livre de risco não ser constante. Essa hipótese é usualmente válida para opções negociadas em bolsa, cujo tempo de maturação é curto (menos de 9 meses).

b) O preço do ativo segue um movimento geométrico Browniano;

É possível modelar o preço de um ativo através de outros processos, mas o MGB é o mais empregado.

c) O ativo não paga qualquer dividendo;

Caso a bolsa de valores em que o ativo é negociado não faça qualquer ajuste ao preço de exercício (*strike*) na ocorrência de distribuição de dividendos é relevante ajustar o modelo de apreçamento para considerar tal distribuição. Felizmente, é fácil adaptar a abordagem BSM para considerar um ativo que paga dividendos. (McDonald, 2006).

d) O derivativo analisado é do tipo opção de compra europeia, logo seu exercício só é possível no vencimento da opção  $T$  ao preço de exercício  $K$ ;

É possível deduzir a fórmula para uma opção do tipo de venda, empregando a paridade *Put-Call*.

e) Não há custos de transação para comprar ou vender tanto a ação quanto a opção;

Na prática, qualquer transação em bolsa está sujeita a pagamento de taxas a essa instituição e a respectiva corretora empregada. Tais valores representam, porém, uma fração bastante reduzida do montante negociado. Além disso, é notória no mercado a existência de uma diferença de preços de compra e de venda (*bid-ask spread*), que representa uma forma de compensação aos agentes formadores de mercado (*market-makers*). Esses agentes garantem a liquidez de papéis ao apregoar com frequência a venda e a compra de ativos na bolsa. Como compensação para o risco que incorrem, ofertam preços distintos para cada caso.

f) É possível “alugar” qualquer fração de uma ação ao custo da taxa livre de risco;

O aluguel de ações é uma operação que permite a um investidor especular a queda de preço da ação, efetuando uma venda a descoberto. Nesse caso, o investidor “tomaria um aluguel” da ação - sob a obrigação de devolver a ação após o período acordado - para vendê-la no mercado. Se a aposta do investidor se revelar correta, no momento que este precisar devolver a ação a seu “dono”, a ação estará valendo menos do que no momento em que foi vendida e o investidor irá recomprá-la a um preço menor. O pressuposto de “divisibilidade” da ação é razoável, pois na prática esse tipo de operação é realizado para um grande número de ações. Dessa maneira, uma “fração” da quantidade desejada seria na verdade um número inteiro de ações. Exemplo: um oitavo de 1.000 (mil) ações são 125 ações.

**Observação:** essa seção não se refere à definição de taxa de aluguel (lease rate) que inclui todos os pagamentos necessários do tomador do aluguel ao doador, como dividendos (McDonald, 2006).

g) Não há penalidades para um investidor que assume uma posição vendida em um papel.

Nos últimos anos, críticas foram feitas a investidores que assumem uma posição do tipo *naked short-selling*, que consiste na venda a descoberto de um ativo sem tê-lo sob sua custódia - tomando um aluguel do mesmo ou comprando a mercado. No entanto, salvo o caso descrito acima, a prática de assumir posições vendidas em ativos segue comum e inerente ao mercado.

h) Os ativos são divisíveis e as negociações ocorrem em tempo contínuo.

### A equação diferencial de Black, Scholes e Merton pelo método de ativos contingentes

Primeiramente, é importante lembrar como variam tanto a ação quanto sua opção.

Se a ação segue um MGB - hipótese (b) acima - então:

$$dS(t)/S(t) = \mu \times dt + \sigma \times dZ(t). \quad (2-38)$$

Uma opção de compra  $C[S(t), t]$  pode ser expressa pelo seu payoff no vencimento da opção trazido a valor presente:

$$\begin{aligned} & e^{-r(T-t)} E^Q[\max(S(T) - K, 0)] \\ & = e^{-r \times (T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(S(T) - K, 0) \times f_{S_T}(S_T) \times dS_T. \end{aligned} \quad (2-39)$$

A expressão acima descreve o valor da opção como o valor esperado da estratégia “maximizadora” de lucro no tempo de maturação da opção nos diferentes cenários possíveis. Vale ressaltar que  $f_{S_T}$  é a função densidade de probabilidade neutra ao risco do ativo subjacente à opção com variável  $S_T$ . Se o preço da ação nesse momento estiver acima do preço de exercício  $K$ , então a opção deve ser exercida, e o investidor obtém um lucro  $S(T) - K$ . Do contrário, a opção não deve ser exercida e o investidor obtém um lucro igual a 0 (zero). Mais importante, porém, é notar que essa expressão descreve a opção de compra como uma função duas vezes diferenciável de  $S_t$  e uma vez de  $t$ , dessa forma vale o Lema de Itô:

$$\begin{aligned} dC(S, t) &= C_S \times dS + 1/2 \times C_{SS} \times (dS)^2 + C_t \times dt \\ dC(S, t) &= C_S \times [\mu \times S(t) \times dt + \sigma \times S(t) \times dZ(t)] \\ &\quad + 1/2 \times C_{SS} \times \sigma^2 \times S^2 \times dt + C_t \times dt. \end{aligned} \quad (2-40)$$

É interessante notar que a única fonte de incerteza no comportamento de  $dC(S, t)$  é  $dZ(t)$ , a mesma fonte de incerteza de  $dS(t)$ . Isso sugere que deve haver alguma combinação possível de quantidades de  $S(t)$  e  $C(S, t)$  de tal forma a eliminar essa fonte de incerteza. Assim, uma estratégia de investimento (portfólio) que combinasse essas quantidades teria um retorno sem risco. Mas isso sendo verdade, pelo princípio de não-arbitragem, esse retorno deve ser a taxa livre de risco. Essa é a ideia fundamental por trás da equação diferencial de BSM deduzida pelo método de ativos contingentes. Assim, seja  $\pi$  o portfólio a seguir e  $n$  um número inteiro qualquer de unidades compradas da opção:

$$\begin{aligned} \pi(t) &= C(S, t) - nS \\ d\pi(t) &= dC(S, t) - n[dS(t) + \delta S(t)dt] \\ d\pi(t) &= C_S[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t)] + 1/2 \times C_{SS} \times \sigma^2 \times S(t)^2 dt + \\ &\quad + C_t dt - n[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dZ(t) + \delta S(t)dt] \\ d\pi(t) &= [(C_S - n)\mu S(t) + 1/2 \times C_{SS} \times \sigma^2 \times S(t)^2 + C_t - n\delta S(t)]dt + \\ &\quad + (1 - n)\sigma S(t)dZ(t) \end{aligned}$$

Escolhendo  $n = C_S$ , isto é, vendendo  $C_S$  unidade do ativo subjacente:

$$d\pi(t) = [1/2 \times \sigma^2 \times S(t)^2 \times C_{SS} + C_t - \delta S(t)C_S]dt. \quad (2-41)$$

Como não há mais risco nesse portfolio durante o período  $dt$ , seu retorno deve ser equivalente a taxa livre de risco para o montante nele investido  $\pi_t$ , ou seja  $d\pi(t) = r\pi_t dt$  durante esse período de tempo. Assim:



$$r\pi_t dt = [1/2 \times \sigma^2 \times S(t)^2 \times C_{SS} + C_t - \delta S(t)C_S]dt \quad (2-42)$$

$$r[C(S, t) - S(t)C_S]dt = [1/2 \times \sigma^2 \times S(t)^2 \times C_{SS} + C_t - \delta S(t)C_S]dt. \quad (2-43)$$

Finalmente, a equação BSM para o caso de um derivativo sobre um ativo que distribui dividendos é?

$$C_t + 1/2 \times \sigma^2 \times S(t)^2 \times C_{SS} + (r - \delta)S(t)C_S - rC(t) = 0. \quad (2-44)$$

De condições de contorno:

Trivial:  $C(S(t) = 0) = 0$

Expiração:  $C(S(T)) = \max(S(T) - K, 0)$

Continuidade:  $C(S(t) = \hat{S}) = \hat{S} - K$

Contato Suave:  $C_S = 1$

**Observação 1:** É importante ressaltar que a equação diferencial acima não se limita a uma opção de compra. Qualquer derivativo que seja uma função duas vezes diferenciável de  $S(t) \sim MGB$  e uma vez diferenciável de  $t$  deve obedecer à expressão enunciada.

**Observação 2:** Convém destacar novamente que o portfólio descrito acima pode ser considerado “sem-risco” apenas por um curto período de tempo de  $dt$ , e para que permaneça sem risco, deve ser “rebalanceado” frequentemente, isto é, deve ser escolhido novamente o valor de  $n$  para o qual o portfólio é sem risco. (Hull, 2006).

### A fórmula de Black, Scholes e Merton por Black & Scholes

Black & Scholes em seu artigo *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (1973) empreenderam uma engenhosa solução para a equação enunciada na seção anterior. A dupla percebeu que a expressão trata-se de uma equação diferencial parcial, o que os motivou a efetuar uma troca de variáveis não-trivial e obter a equação na forma  $C_{SS} = C_t$  (igualdade entre a segunda derivada da opção em relação ao ativo subjacente e a primeira derivada da opção em relação ao tempo). Esta consiste em uma equação diferencial já muito estudada e de solução conhecida para certas condições de contorno - aplicando técnicas como separação de variáveis e transformada de Fourier. Ela descreve o processo de difusão de calor ao longo do tempo em uma barra metálica, motivando seu nome de “equação de transferência de calor”. A condição de contorno empregada foi a do *payoff* da opção no seu tempo de maturação -

$$c(T) = \max(S(T) - K, 0):$$

$$C(t) = S_t \times N(d_1) - K \times e^{-r(T-t)} \times N(d_2) \quad (2-45)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2) \times (T - t)}{\sigma \times \sqrt{(T - t)}} \quad (2-46)$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_t/K) + (r - \sigma^2/2) \times (T - t)}{\sigma \times \sqrt{(T - t)}} = d_1 - \sigma \times \sqrt{(T - t)}. \quad (2-47)$$

Em que  $N(x)$  representa a função de distribuição acumulada para uma distribuição normal padrão.

Merton em seu artigo *Theory of rational option pricing* (1973), além de tentar estender a abordagem de B&S para uma teoria geral de apreçamento de opções, empreende uma abordagem diferente na dedução da equação diferencial que conduz às fórmulas citadas acima. Sua abordagem prescindiu do *Capital Asset Pricing Model* empregado por B&S. Assim, a dedução descrita na seção anterior apoia-se nessa abordagem de Merton, que constituiu a base para desenvolvimentos posteriores da teoria de apreçamento de derivativos.

### A fórmula de Black, Scholes e Merton por Cox & Ross

Uma abordagem alternativa à de equações diferenciais empregada por BSM para dedução da fórmula de precificação de opções é a valoração neutra-ao-risco. Nela, é usada uma medida diferente da “real” de tal forma que o retorno esperado de todos os seja a taxa de livre de risco. Essa medida é denominada “neutra ao risco”.

Mas como isso seria coerente com as fórmulas de BSM? Basta notar que nenhuma das fórmulas depende do retorno esperado sobre o ativo-objeto ou sobre a opção. Se isso acontecesse, haveria indícios da impertinência da hipótese de neutralidade ao risco, uma vez que os retornos esperados sobre ativos dependeriam das preferências de risco do investidor. Mas como isso não ocorre Cox & Ross (1976) verificaram que usando esse artifício é possível obter as fórmulas de apreçamento de opções de BSM. Vale ressaltar novamente que as fórmulas independem da preferência de risco do investidor, mas podem ser calculadas facilmente empregando a medida neutra ao risco.

A abordagem de Cox&Ross (1976) começa por onde o valor da opção de compra é indubitavelmente conhecido, no tempo de exercício:

$$C[S(T), T] = E^Q[\max(S(T) - K, 0) | \mathcal{F}_T]. \quad (2-48)$$

Dessa maneira o valor da opção no tempo  $t$  consiste no valor da opção no tempo  $T$  descontado pela taxa livre de risco:

$$C[S(t), t] = e^{-r \times (T-t)} E^Q[\max(S(T) - K, 0) | \mathcal{F}_t]. \quad (2-49)$$

O valor do ativo-objeto em  $T - S(T)$  - segue incerto. No entanto, considerando esse como um MGB, sua distribuição de probabilidade é conhecida - lognormal - e é possível obter as fórmulas de BSM por:

$$C[S(t), t] = e^{-r \times (T-t)} \times \int_Q \max(S(T) - K, 0) \times f_{S_T}(S_T) \times d_{S_T}. \quad (2-50)$$

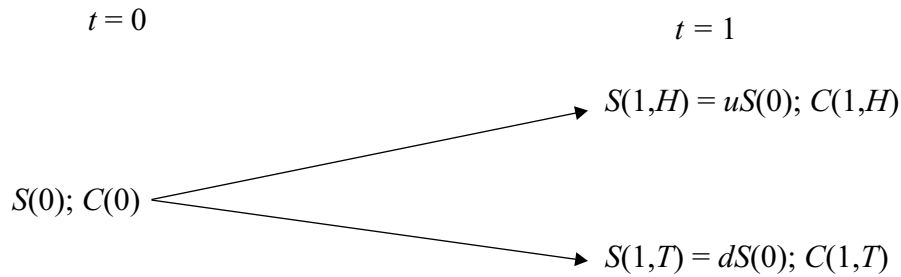
Em que  $f_{S_T}$  é a função densidade de probabilidade neutra ao risco do ativo subjacente à opção com variável  $S_T$  e o valor esperado condicional foi substituído pelo valor esperado incondicional pois incrementos do Browniano  $(\mathcal{B}_T - \mathcal{B}_t)$  são independentes da filtração  $\mathcal{F}_t$ .

## O Modelo Binomial

### Cox-Ross-Rubinstein (1979)

Em 1979, Cox-Ross-Rubinstein (1979) desenvolveram uma abordagem conceitualmente mais simples para o apreçamento de opções do que aquela de BSM mas não menos poderosa ou importante. O trio analisou o comportamento do preço do ativo objeto em tempos discretos e pressupôs que seu comportamento seguiria um passeio aleatório, isto é, de um instante para outro o preço do ativo poderia se comportar de forma imprevisível, podendo subir ou cair - como um “sucesso” e um “fracasso” em eventos de Bernoulli. O formidável dessa abordagem é representar a analogia em tempo discreto do modelo de BSM, uma vez que para intervalos discretos cada vez menores, tal pressuposto de aleatoriedade leva a hipótese de distribuição lognormal para o preço de ativos - uma consequência da hipótese de movimento geométrico Browniano, como citado anteriormente.

Esse modelo considera apenas a variação do ativo do instante inicial  $t = 0$  a outro futuro  $t = 1$ , isto é, seus valores  $S(0)$  e  $S(1)$ . Assim, tem-se o valor inicial como conhecido e o futuro como incerto, isto é, o valor futuro é uma variável aleatória, que assumirá um valor  $u$  vezes maior que  $S(0)$  em um evento “positivo”  $H$  - *head* - e  $d$  vezes maior que  $S(0)$  em caso de um evento “negativo”  $T$  - *tail* - de tal forma que  $d < 1 + r < u$  (condição suficiente para prevenir oportunidades de arbitragem) em que  $r$  é a taxa livre de risco, ou seja:



**Figura 1a:** Representação do modelo Cox-Ross-Rubinstein

**Notação:**  $\varepsilon$  denotará um evento qualquer, podendo assumir os “valores”  $H$  e  $T$ .

**Observação:** a desigualdade enunciada é condição suficiente para impedir a ocorrência de oportunidades de arbitragem.

De maneira análoga à abordagem de BSM, é possível construir o seguinte portfólio com uma “unidade” ativo objeto e “ $n$ ” da opção:

$$\pi(t, \varepsilon) = S(t, \varepsilon) + n \times C(t, \varepsilon). \quad (2-51)$$

Ele irá assumir os seguintes valores no instante futuro:

$$\pi(1, H) = S(1, H) + n \times C(1, H) = u \times S(0) + n \times C(1, H) \quad (2-52)$$

$$\pi(1, T) = S(1, T) + n \times C(1, T) = d \times S(0) + n \times C(1, T). \quad (2-53)$$

Dessa maneira, é possível determinar o valor de  $n$  para o qual esse portfólio é sem risco (basta igualar as duas expressões):

$$n_0 = \frac{C(1, H) - C(1, T)}{u \times S(0) - d \times S(0)}. \quad (2-54)$$

O preço da opção pode ser, assim, facilmente determinado (considere  $T$  tamanho do intervalo entre os instantes 0 e 1) usando a fórmula acima e igualando o valor conhecido para montar o portfólio com o valor presente de seu valor futuro, o qual é conhecido pois o portfólio foi montado sem risco:

$$S(0) + n \times C(0) = \frac{[u \times S(0) + n \times C(1, T)]}{e^{r \times T}} = \frac{[u \times S(0) + n \times C(1, T)]}{e^{r \times T}}. \quad (2-55)$$

Assim

$$C(0) = S(0) \times n \times (1 - u \times e^{-r \times T}) + C(1, H) \times e^{-r \times T}. \quad (2-56)$$

Definindo  $p = \frac{e^{r \times T} - d}{u - d}$ ,  $C(0)$  também pode ser assim definido:

$$C(0) = \frac{[p \times C(1, H) + (1 - p) \times C(1, T)]}{e^{r \times T}}. \quad (2-57)$$

É interessante notar que  $p$  consiste na probabilidade neutra ao risco de ocorrência do evento  $\{H\}$ .

Essa abordagem de um período pode ser estendida a  $n$  períodos sequenciais, através da construção de uma árvore de eventos, em que cada ramificação representaria uma valorização “ $u$ ” do ativo ou “ $d$ ” e cada um dessas originariam outras duas ramificações, até ocorrerem  $n$  níveis distintos de remos. Para determinar o valor justo da opção basta efetuar o processo de um período do penúltimo ao último período para obter os valores justos naquele período, em seguida do antepenúltimo ao penúltimo e assim sucessivamente. A fórmula a ser obtida para  $C(t)$  é como segue:

$$C(t) = S(t) \times \left[ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \left( \frac{u^j \times d^{n-j}}{r^n} \right) \right] - K \times r^{-n} \times \left[ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \right] \quad (2-58)$$

em que  $a > n$  e  $a \equiv \left\lceil \frac{\log(K/S_t \times d^n)}{\log(u/d)} \right\rceil$ , isto é,  $a$  é o menor inteiro não negativo maior do que o valor da expressão entre  $[\square]$ .

Vale ressaltar que os termos entre colchetes podem ser vistos como as funções de distribuição acumulada binomiais, de onde decorre o nome do modelo abordado. Por fim, a fórmula acima expressa o valor da opção pelo valor esperado de seu *payoff* no tempo de exercício trazido a valor presente pela taxa livre de risco.

**Observação:** O *payoff* de um derivativo é a “recompensa” desse derivativo no tempo de exercício. Por exemplo, para uma opção de compra, ele será zero se o preço de exercício estiver acima do preço do corrente do ativo ou a diferença entre o preço do ativo e o preço de exercício (“lucro”).

### Apreçamento de opções americanas pelo modelo binomial

Uma das vantagens do modelo binomial é a possibilidade de avaliar não só as opções europeias de Black & Scholes e Merton (1973), como também opções americanas. Além disso, o método também permite considerar outros processos estocásticos para o preço do ativo subjacente da opção (além do movimento geométrico Browniano). Por esses motivos, assim como pela “fácil” intuição do método, Brandão, Dyer e Hahn (2005) aplicam o modelo na avaliação de opções reais - cujo conceito será detalhado em seção posterior deste capítulo.

Mais especificamente, empregam o modelo binomial em um investimento em fases - o que pode ser interpretado com uma sequência de opções, ou uma

opção composta. Eles apontam que uma vantagem do uso de árvores binomiais em opções reais é facilidade para modelar nós de decisão, inclusive de intervalos variados. Por outro lado, há casos em que a aplicação do modelo binomial não é possível ou é de difícil execução, como no caso de opções perpétuas ou com várias fontes de incerteza.

O trio distingue inicialmente entre riscos de mercado e riscos privados de um projeto. No primeiro caso, um risco pode ser replicado por uma carteira de ativos negociados. No outro o caso, o risco é avaliado a partir de crenças subjetivas/preferências e, por isso, desconsiderado no cálculo dessa taxa por não ter correlação com riscos de mercado.

Brandão, Dyer e Hahn (2005) assumem que o valor do projeto segue um MGB e que, assim, a distribuição de probabilidade (lognormal) de seus retornos pode ser definida por sua média e desvio padrão. Sua taxa de retorno esperada (“média”) é determinada supondo que o valor “justo” do projeto pelo método de fluxo de caixa descontado ignorando suas opções é seu valor de mercado. Nesse caso, a aquisição do projeto a esse preço representaria um VPL de 0 (zero) para o investidor, ou seja, seu retorno esperado é igual a taxa de desconto ajustado ao risco. O desvio padrão dos retornos (volatilidade) é determinado empregando uma simulação de Monte Carlo para os retornos a partir de uma projeção de fluxo de caixa. Determinada a volatilidade, torna-se possível construir uma árvore binomial para modelar o processo estocástico do valor do projeto. Incertezas específicas ao projeto podem ser consideradas no modelo pela adição de nós à árvore.

### Métodos de diferenças finitas

O método diferenças finitas procura resolver a equação diferencial parcial que deve ser obedecida por um derivativo transformando-a em uma equação de diferenças. Isso ocorre “discretizando” o problema - isto é, aproximando as variações contínuas no preço do ativo e do tempo por um número arbitrário de pontos para cada grandeza - e partir daí resolvendo iterativamente as equações de diferenças construídas.

O “eixo” do tempo seria desmembrado em  $N$  intervalos igualmente espaçados de 0 (zero) a  $T$  (tempo de vida da opção) de tamanho  $\Delta t$ . Assim, haveria  $N + 1$  pontos:  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ . Para a discretização dos preços de ativos, considerar-se-ia  $\Delta S$  “suficientemente pequeno” sobre um intervalo  $[(0, S)]_{\max}$ . Hull (2006) ao tratar de uma opção de venda, define  $\Delta S = S_{\max}/M$ , em que  $S_{\max}$  seria um valor grande o suficiente para o preço do ativo para tornar a opção sem valor e  $N$ , o número de espaçamentos desejado.

Feito esse processo - construção de um “grid” de  $(M + 1) \times (N + 1)$

pontos - escolhe-se alguma aproximação para as derivadas parciais ( $C_t, C_S$  e  $C_{SS}$ ) da equação abaixo.

$$C_t + \frac{1}{2} \times \sigma^2 \times S^2 \times C_{SS} + r \times S(t) \times C_S - r \times C(t) = 0 \quad (2-59)$$

A seguir, alguns tipos dessas aproximações são mencionados.

### Método Explícito de Diferenças Finitas

Seja  $i = 1, \dots, N$  o índice para a discretização do tempo e  $j = 1, \dots, M$  para a do preço do ativo, as aproximações discretas para as derivadas parciais são:

$$C_S = \frac{C_{i+1,j+1} - C_{i+1,j-1}}{2 \times \Delta S} \quad (2-60)$$

$$C_{SS} = \frac{C_{i+1,j+1} + C_{i+1,j-1} - 2 \times C_{i+1,j}}{\Delta S^2} \quad (2-61)$$

$$C_t = \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta t}. \quad (2-62)$$

Isso permite reescrever a equação diferencial da seguinte:

$$\tilde{a}_j \times C_{i+1,j-1} + \tilde{b}_j \times C_{i+1,j} + \tilde{c}_j \times C_{i+1,j+1} = C_{i,j} \quad (2-63)$$

$$\tilde{a}_j = \frac{1}{1 + r \times \Delta t} \times \left( -\frac{1}{2} \times r \times j \times \Delta t + \frac{1}{2} \times \sigma^2 \times j^2 \times \Delta t \right) \quad (2-64)$$

$$\tilde{b}_j = \frac{1}{1 + r \times \Delta t} \times (1 - \sigma^2 \times j^2 \times \Delta t) \quad (2-65)$$

$$\tilde{c}_j = \frac{1}{1 + r \times \Delta t} \times \left( \frac{1}{2} \times r \times j \times \Delta t + \frac{1}{2} \times \sigma^2 \times j^2 \times \Delta t \right). \quad (2-66)$$

Além disso, o valor da opção deve obedecer às seguintes condições de contorno:

$$C_{N,j} = \max[j \times \Delta S - K, 0] \quad \text{com } j = 0, 1, \dots, M \quad (2-67)$$

$$C_{i,0} = 0 \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, N \quad (2-68)$$

$$C_{i,M} = S \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, N. \quad (2-69)$$

Dessa forma, são conhecidos os valores da opção no instante  $T$ , a partir do qual, aplicando as fórmulas acima de forma sucessiva, é possível determinar os valores da opção em instantes anteriores.

### Método Implícito de Diferenças Finitas

Seja  $i = 1, \dots, N$  o índice para a discretização do tempo e  $j = 1, \dots, M$  para a do preço do ativo, as aproximações discretas para as derivadas parciais

nesse caso são:

$$C_S = \frac{C_{i+1,j+1} - C_{i,j-1}}{2 \times \Delta S} \quad (2-70)$$

$$C_{SS} = \frac{C_{i,j+1} + C_{i,j-1} - 2 \times C_{i,j}}{\Delta S^2} \quad (2-71)$$

$$C_t = \frac{C_{i+1,j} - C_{i,j}}{\Delta t}. \quad (2-72)$$

Isso permite reescrever a equação diferencial da seguinte forma (Hull, 2006):

$$a_j \times C_{i,j-1} + b_j \times C_{i,j} + c_j \times C_{i,j+1} = C_{i+1,j} \quad (2-73)$$

$$a_j = \frac{1}{2} \times r \times j \times \Delta t - \frac{1}{2} \times \sigma^2 \times j^2 \times \Delta t \quad (2-74)$$

$$b_j = 1 + r \times \Delta t + \sigma^2 \times j^2 \times \Delta t \quad (2-75)$$

$$c_j = -\frac{1}{2} \times r \times j \times \Delta t - \frac{1}{2} \times \sigma^2 \times j^2 \times \Delta t. \quad (2-76)$$

Novamente, o valor da opção deve obedecer às seguintes condições de contorno:

$$C_{N,j} = \max[j \times \Delta S - K, 0] \quad \text{com } j = 0, 1, \dots, M \quad (2-77)$$

$$C_{i,0} = 0 \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, N \quad (2-78)$$

$$C_{i,M} = S \quad \text{com } i = 0, 1, \dots, N. \quad (2-79)$$

Considerando o caso da opção americana, para encontrar os valores da opção no instante  $(T - \Delta t)$  é necessário resolver um sistema com  $(M - 1)$  equações e  $(M - 1)$  variáveis:

$$a_j \times C_{N-1,j-1} + b_j \times C_{N-1,j} + c_j \times C_{N-1,j+1} = C_{N,j} \quad j = 1, 2, \dots, M-1. \quad (2-80)$$

Resolvido o sistema, cada valor  $C_{N-1,j}$  é comparado com  $j \times \Delta S - K$ . Se  $C_{N-1,j} < j \times \Delta S - K$ , então é ótimo o exercício antecipado nesse instante e  $C_{N-1,j} = j \times \Delta S - K$ . Repete-se esse procedimento sucessivamente até o valor da opção ser determinado no instante inicial.

### Simulação de Monte Carlo

Nesta subseção será feita uma rápida descrição do método de simulação de Monte Carlo. Ross (2006) é uma excelente referência de introdução ao tema e Glasserman (2003) trata dessa abordagem aplicada à engenharia financeira.

#### A intuição por trás do Método de Monte Carlo

Inicialmente, considere uma variável aleatória  $X$  com  $E(X) = \mu_X$  e



$Var(X) = \sigma_X^2$ . Uma boa aproximação para a média de  $X$  pode ser obtida a partir da estatística  $\bar{X}$  considerando uma amostra de tamanho de  $N$  de  $X - X_1, \dots, X_N$  - conforme:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (2-81)$$

com cada  $X_i$  uma variável aleatória independente. O valor esperado de  $\bar{X}$  é

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{N} \times (E(X_1) + \dots + E(X_N)) = \frac{1}{N} \times N \times \mu_X = \mu_X. \quad (2-82)$$

Logo  $\bar{X}$  é um estimador não tendencioso para a média. Também é possível a determinação de um estimador não tendencioso para a variância:

$$\bar{\sigma}_X^2 = \frac{1}{N-1} \times \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2. \quad (2-83)$$

Dessa forma, pelo teorema central do limite,  $\bar{X} - \mu_X \sim N\left(0, \frac{\bar{\sigma}_X^2}{N}\right)$ . Logo é possível determinar intervalos de confiança de probabilidade  $1 - \alpha$  para valores estimados para  $X$ :

$$P\left[\bar{X} - \frac{\phi(1 - \alpha/2)^{-1} \times \bar{\sigma}_X}{\sqrt{N}}, \bar{X} + \frac{\phi(1 - \alpha/2)^{-1} \times \bar{\sigma}_X}{\sqrt{N}}\right] = 1 - \alpha. \quad (2-84)$$

É aí que reside o princípio do método de simulação de Monte Carlo: gerando  $N$  trajetórias da variável aleatória estudada tem-se uma amostra de tamanho  $N$  dessa VA a partir da qual é possível obter estimadores para sua média e variância e, assim, determinar um intervalo de confiança para o valor real de seu valor esperado.

Apesar da vantagem de ampla aplicabilidade desse método, uma grande desvantagem é a possibilidade de ser computacionalmente demandante. Isso porque a redução do erro ocorre com o inverso da raiz quadrada do tamanho da amostra e, assim, cada redução de  $k\%$  no erro implica em um aumento da ordem de  $k^2$  no tamanho da amostra. Para contornar esse contratempo, há diversas técnicas de redução de variância (encontradas nas referências mencionadas) como: variáveis de controle, variáveis antitéticas, amostragem estratificada, *latin hypercube*, amostragem por importância, sequências de baixa discrepância (método de quase-Monte Carlo) etc. (Aiube, 2012).

### Método dos Mínimos Quadrados de Monte Carlo

Para Longstaff & Schwartz (2001) - doravante L&S - o apreçamento de opções americanas por simulação é “promissor” quando comparado aos métodos de diferenças finitas e binomial. Um motivo seria seu uso mais abrangente, podendo essa técnica também ser empregada quando: (1) o valor

da opção depende de múltiplos fatores; (2) a opção for do tipo dependente da trajetória do ativo subjacente (*path-dependent*) e (3) quando as variáveis de estado seguem processos de difusão com saltos, não-Markovianos e submartingais.

Sob essa motivação, a dupla desenvolveu um método inovador denominado *mínimos quadrados de Monte Carlo* (MQMC; *least squares Monte Carlo* - LSM). Segundo Araújo (2004), a intuição por trás do método reside na abordagem de programação dinâmica: “a cada instante anterior à data de vencimento de uma opção americana, o proprietário desta opção compara o payoff do exercício antecipado com o seu valor de continuação, para assim tomar uma decisão ótima” Dessa maneira, o exercício ótimo de uma opção americana dependerá da expectativa condicionada de seu valor de continuação.

Tendo isso em vista, L&S propuseram a estimação dessa expectativa condicionada empregando o método de mínimos quadrados com base em dados de cada trajetória simulada por MC em um dado instante de tempo. Mais concretamente, L&S propõe uma regressão dos fluxos de caixa a ser recebidos no evento de não exercício da opção (continuação) sobre funções de potência das variáveis de estado (por exemplo, o preço de uma ação ou de um barril de petróleo). É por essa regressão que será estimado o valor de continuação da opção para cada instante em sua trajetória, permitindo especificar a estratégia de exercício ótima do detentor da opção - definida pela comparação entre o valor estimado de continuação com aquele de exercício imediato a cada instante.

Dada a complexidade dessa descrição, L&S reconhecem que “talvez a melhor maneira de expressar a intuição por trás da abordagem de LSM é por um exemplo numérico simples”. Com esse mesmo intuito, o exemplo original do artigo de L&S será descrito abaixo.

### Exemplo Numérico de L&S

Considere uma opção de venda americana (*put*) sobre uma ação que não paga dividendos. Seu preço de exercício é de 1,10 e ela poderá ser exercida em três instantes discretos 1, 2 e 3, sendo este a data de expiração da opção. A taxa de desconto livre de risco é 6% por período. Serão consideradas, por simplicidade, apenas 8 trajetórias de preço para a ação, geradas supondo neutralidade ao risco, segundo a matriz apresentada na Tabela 2:

Caminhos/Tempo	0	1	2	3
1	1,00	1,09	1,08	1,34
2	1,00	1,16	1,26	1,54
3	1,00	1,22	1,07	1,03
4	1,00	0,93	0,97	0,92
5	1,00	1,11	1,56	1,52
6	1,00	0,76	0,77	0,90
7	1,00	0,92	0,84	1,01
8	1,00	0,88	1,22	1,34

Tabela 2: Trajetórias de preço da ação (Exemplo L&amp;S)

Deseja-se definir uma regra de exercício que maximiza o valor da opção em cada instante ao longo da trajetória de preços. Para isso, será inicialmente analisado o valor da opção no último instante (3) para o caso em que ela não tenha sido exercida em nenhum instante anterior, conforme Tabela 3:

Caminhos/Tempo	0	1	2	3
1	-	-	-	0,00
2	-	-	-	0,00
3	-	-	-	0,07
4	-	-	-	0,18
5	-	-	-	0,00
6	-	-	-	0,20
7	-	-	-	0,09
8	-	-	-	0,00

Tabela 3: Fluxos de Caixa em  $t = 3$  (Exemplo L&S)

Se a opção estiver “dentro do dinheiro” no instante 2, seu detentor deverá escolher entre o exercício imediato ou esperar pelo exercício no instante 3. Dentre as oito simulações de trajetórias de preços, apenas em cinco a opção está “dentro do dinheiro” no instante 2.

**Definições:** serão denominados de  $S$  os preços da ação no instante 2, e de  $W$  o valor descontado até esse instante do fluxo de caixa recebido no instante seguinte. Serão consideradas somente as cinco trajetórias de preços que estão “dentro do dinheiro”, pois segundo L&S isso permitirá uma estimativa mais adequada da função de expectativas condicionadas e aumentará a eficiência do algoritmo.

Os valores de  $S$  e  $W$  estão apresentados na Tabela 4:

Trajectoria	W	S
1	$0,00 \times e^{-0,06} = 0,00$	1,08
2	-	“fora do dinheiro”
3	$0,07 \times e^{-0,06} = 0,0659$	1,07
4	$0,18 \times e^{-0,06} = 0,1695$	0,97
5	-	“fora do dinheiro”
6	$0,20 \times e^{-0,06} = 0,1884$	0,77
7	$0,09 \times e^{-0,06} = 0,0848$	0,84
8	-	“fora do dinheiro”

**Tabela 4:** Dados para regressão em  $t = 2$  (Exemplo L&S)

De modo a estimar o valor esperado de continuação da opção, condicionado ao preço da ação no instante 2, é realizada uma regressão de  $W$  com relação a  $S$  e  $S^2$  (além de uma constante). Dessa forma, L&S obtiveram a seguinte função para estimar valor esperado condicional:

$$E[W|S] \approx -1,070 + 2,983 \times S - 1,813 \times S^2. \quad (2-85)$$

Com essa função, será possível estimar a estratégia ótima de exercício no instante 2, comparando o valor de continuação estimado pela função aquele com aquele de exercício imediato -  $\max(1, 10 - S, 0)$  - conforme a Tabela 5 a seguir:

Trajectoria	Exercício Imediato	Valor de Continuação
1	0,02	0,0369
2	“fora do dinheiro”	“fora do dinheiro”
3	0,03	0,0461
4	0,13	0,1176
5	“fora do dinheiro”	“fora do dinheiro”
6	0,33	0,1520
7	0,26	0,1520
8	“fora do dinheiro”	“fora do dinheiro”

**Tabela 5:** Decisão de exercício antecipado ótimo em  $t = 2$  (Exemplo L&S)

Comparando as colunas acima linha a linha facilmente conduz à matriz abaixo - Tabela 6 - de fluxo de caixa a ser recebido pelo detentor da opção. Vale ressaltar que escolha de exercício imediato em 2 ocorre em detrimento do fluxo de caixa que seria recebido no instante 3. Por esse motivo, os fluxos de caixa no instante 3 para as trajetórias 4, 6 e 7 são 0,00.

Caminhos/Tempo	1	2	3
1	-	0,00	0,00
2	-	0,00	0,00
3	-	-	0,07
4	-	0,13	0,00
5	-	0,00	0,00
6	-	0,33	0,00
7	-	0,26	0,00
8	-	0,00	0,00

Tabela 6: Matriz de fluxo de caixa em  $t = 2$  (Exemplo L&S)

De forma análoga ao instante 2, a Tabela 7 a seguir mostra os dados a serem usados na regressão no instante 1:

Trajectoria	W	S
1	$0,00 \times e^{-0,06} = 0,00$	1,09
2	-	“fora do dinheiro”
3	-	“fora do dinheiro”
4	$0,13 \times e^{-0,06} = 0,1224$	0,93
5	-	“fora do dinheiro”
6	$0,33 \times e^{-0,06} = 0,3108$	0,76
7	$0,26 \times e^{-0,06} = 0,2449$	0,92
8	$0,00 \times e^{-0,06} = 0,00$	0,88

Tabela 7: Dados para regressão em  $t = 1$  (Exemplo L&S)

L&S obtiveram a seguinte função para estimar valor esperado condicional para esse instante:

$$E[W|S] \approx 2,038 - 3,335 \times S + 1,356 \times S^2. \quad (2-86)$$

Analogamente, foi obtida a seguinte matriz na Tabela 8 de decisão de exercício para o instante 1:

Trajectoria	Exercício Imediato	Valor de Continuação
1	0,01	0,0139
2	“fora do dinheiro”	“fora do dinheiro”
3	“fora do dinheiro”	“fora do dinheiro”
4	0,17	0,1092
5	“fora do dinheiro”	“fora do dinheiro”
6	0,34	0,2866
7	0,18	0,1175
8	0,22	0,1533

Tabela 8: Decisão de exercício antecipado ótimo em  $t = 1$  (Exemplo L&S)

Dessa forma, torna-se claro o exercício ótimo da opção no instante 1 para as trajetórias 4, 6, 7 e 8. Por fim, já é possível determinar a estratégia

de exercício ótimo da opção com os seguintes “tempos de parada” (*stopping times*) e os consequentes fluxos de caixa a ser recebidos conforme as Tabelas 9 e 10 abaixo:

Caminhos/Tempo	1	2	3
1	-	-	-
2	-	-	-
3	-	-	1
4	1	-	-
5	-	-	-
6	1	-	-
7	1	-	-
8	1	-	-

Tabela 9: Estratégia de exercício ótimo (Exemplo L&S)

Caminhos/Tempo	1	2	3
1	-	-	-
2	-	-	-
3	-	-	0,07
4	0,17	-	-
5	-	-	-
6	0,34	-	-
7	0,18	-	-
8	0,22	-	-

Tabela 10: Matriz de fluxos de caixa ótimos (Exemplo L&S)

Descontando até o instante 0 os fluxos de caixa a ser recebidos pelo detentor da opção e tomando o valor médio por trajetória, é possível determinar o valor da opção como 0,1144 .

### O algoritmo de MQMC

Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade definido sob uma horizonte de tempo finito  $[0, T]$ . O espaço amostral  $\Omega$  reúne todos os subconjuntos de possíveis realizações entre 0 e  $T$  e tem como elemento típico  $\omega$ , representando a trajetória do processo estocástico.  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra de eventos distinguíveis em  $T$  e  $P$ , a medida de probabilidade definida sobre os elementos de  $\mathcal{F}$ . É assumido também a existência de uma medida equivalente martingal  $Q$  - equivalente à premissa de inexistência de oportunidades de arbitragem. Além

disso, L&S consideram derivativos cujos *payoffs* sejam elementos de um espaço de variância finita  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

**Definição:**  $Y(\omega, s; t, T)$  é o fluxo de caixa gerado pela opção segundo a trajetória  $\omega$ , condicionado ao não-exercício da opção em ou antes de uma tempo  $t$  e supondo o emprego de uma estratégia de parada ótima  $\forall s, t < s < T$ . Dessa forma,  $Y(\omega, s; t, T)$  é análogo às matrizes de fluxos de caixa intermediários do exemplo acima.

Estabelecidas as hipóteses e definições acima, é possível definir o objetivo do algoritmo de L&S: fornecer, para cada trajetória, uma aproximação da regra ótima de parada que maximiza o valor da opção americana.

Para esclarecer a afirmação acima, considere  $K$  tempos discretos nos quais a opção americana poderá ser exercida:

$$0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \dots \leq t_K = T. \quad (2-87)$$

**Observação:** para  $K$  suficientemente grande, o algoritmo de L&S pode ser empregado para aproximar opções americanas exercíveis continuamente. Inicialmente, são simuladas diversas trajetórias da variável de estado segundo cada um dos tempos discretos acima.

Em  $t_K = T$ , a escolha do detentor da opção em cada trajetória é bastante simples: exercer a opção se a mesma estiver “dentro do dinheiro” ou, do contrário, deixá-la expirar. No entanto para um  $t_k < t_K$ , é necessário escolher entre o fluxo de caixa gerado pelo exercício imediato da opção e seu valor de continuação - isto é, o valor da opção assumindo seu exercício após  $t_k$  algo desconhecido nesse instante. Para a determinação desse valor, é necessário recorrer à teoria de avaliação de ativos sem arbitragem. Segundo esta, o valor de continuação da opção consiste no valor esperado sob medida neutra ao risco dos fluxos de caixa futuros descontados pela taxa livre de risco, ou seja,  $Y(\omega, s; t_k, T)$ , segundo a medida neutra ao risco  $Q$ . Dessa forma, o valor de continuação em  $t_k$ ,  $F(\omega, t_k)$ , é definido como:

$$F(\omega, t_k) = E_Q \left[ \sum_{j=k+1}^K Y(\omega, t_j; t_k, T) \times e^{-\int_{t_k}^{t_j} r(\omega, s) ds} \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right] \quad (2-88)$$

em que  $r(\omega, s)$  é a taxa de desconto livre de risco que aqui é mostrada em um caso mais geral, no qual ela pode ser uma função do tempo.

Essa representação simplifica consideravelmente o problema de exercício ótimo: estimado o valor de continuação segunda a expectativa condicional acima, basta compará-lo com o valor de exercício imediato e exercer opção caso este seja maior do que o outro.

Com base nesse princípio, o algoritmo de Mínimos Quadrados de Monte Carlo de Longstaff & Schwartz (2001) emprega justamente a técnica de mínimos quadrados para estimar a função de expectativa condicional de forma recursiva em  $t_{K-1}, t_{K-2}, \dots, t_1$ . Ou seja, em um instante  $t_{K-l}$ , com  $l < K$ ,  $F(\omega, t_{K-l})$  é representado por uma combinação linear de um conjunto contável de funções de base  $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -mensuráveis. [Conforme argumentado no exemplo simplificado acima, os coeficientes de regressão são determinados projetando os valores descontados  $Y(\omega, s; t_{k-l}, T)$  sobre as funções-base nas diversas trajetórias em que a opção está dentro do dinheiro.] Em seguida - conforme mencionado - o valor de continuação é comparado com aquele de exercício imediato em  $t_{K-l}$  para determinar a decisão de exercício e, assim, prosseguir para a análise da estratégia ótima, sucessivamente, em  $t_{K-l-1}, t_{K-l-2}, t_{K-l-2}, \dots, t_1$ . Determinado o valor da opção americana em cada trajetória - ou seja, o fluxo de caixa descontado gerado pelo seu exercício - a estimativa por MQMC para o valor do derivativo será a média aritmética do valor em cada caminho.

Longstaff & Schwartz (2001) consideraram em seu artigo uma aproximação de segunda ordem para  $Y(\omega, s; t_{k-l}, t)$ , conforme ilustrado abaixo:

$$Y(\omega, s; t_{k-l}, T) \approx a_0 + a_1 \times X + a_2 \times X^2 \quad (2-89)$$

sendo  $X$  a variável de estado relevante. Segundo L&S, no caso de duas variáveis de estado ou mais, o conjunto de funções de base deve incluir termos com todas, além dos respectivos produtos-cruzados. As funções de base podem ser polinômios de Jacobi, de Chebyshev, funções exponenciais, potências etc.

Por fim, convém ressaltar que L&S em seu artigo demonstram que, apesar do algoritmo levar a um regra de parada (*stopping rules*) sub-ótima, o valor estimado converge para o valor da opção escolhendo um número adequado de funções-base e um número suficientemente grande de iterações.

### 2.4.5

#### De opções financeiras para opções reais em petróleo

##### Modelagem de Reservas Não desenvolvidas de Petróleo

Em finanças, uma reserva não-desenvolvida de petróleo pode ser interpretada como uma opção de investir no desenvolvimento da reserva para a produção do óleo, o que torna possível tanto seu apreçamento por aquela da opção quanto a determinação do momento adequado de desenvolvimento - ou de “exercício da opção”. A partir dessa interpretação - com destaque ao didático artigo de Paddock, Siegel e Smith (1988) e ao trabalho inovador de



Tourinho (1979) - muitos trabalhos empregaram a teoria opções financeiras de Black & Scholes (1973) e de Merton (1973) na avaliação de ativos de petróleo como Aiube & Baidya (1997), Dias & Rocha (1999), Dias (2005) para citar apenas alguns. Além disso, empresas de petróleo como a Petrobras (Dias, 2005) também já fazem uso da técnica.

A analogia entre o modelo de apreçamento da reserva não desenvolvida e aquele de uma opção de compra sobre uma ação pode ser resumida na Tabela 11, baseada naquela de Paddock, Siegel e Smith (1988):

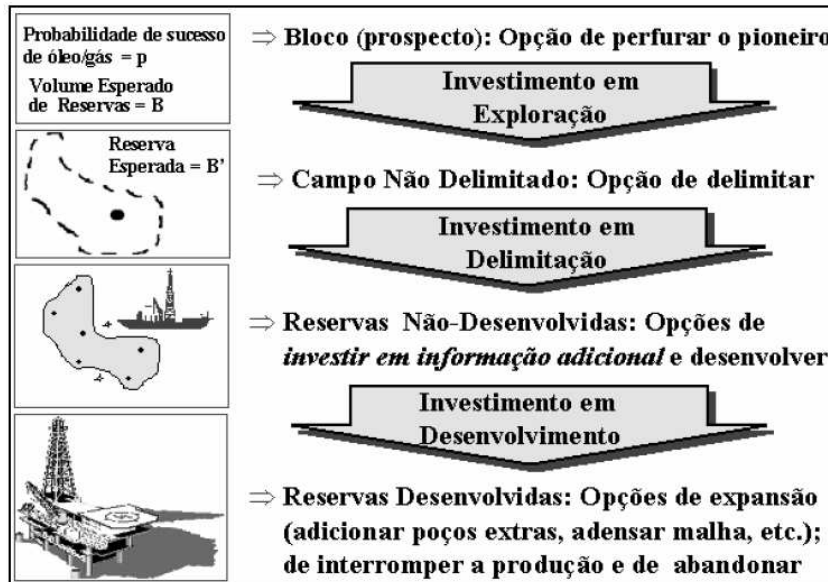
<b>Opção sobre Ação</b>	<b>Reserva Não-Desenvolvida</b>
Preço Corrente da Ação	Valor da Reserva Desenvolvida
Variância da Taxa de Retorno do Preço da Ação	Variância da Taxa de Retorno do Valor da Reserva Desenvolvida
Preço de Exercício da Opção	Custo de Desenvolvimento da Reserva
Tempo para Expiração da Opção	Tempo de Expiração do Direito de Desenvolvimento
Taxa de Juros Livre de Risco	Taxa de Juros Livre de Risco
Taxa de Distribuição de Dividendos	Fluxo de Caixa da Produção da Reserva Desenvolvida

**Tabela 11:** Diferença entre Opção sobre Ação e uma Reserva Não Desenvolvida segundo Paddock, Siegel & Smith

Uma importante distinção entre uma opção financeira típica (*call/put* europeias ou americanas) e uma opção real sobre reservas não desenvolvidas de petróleo é a quantidade de etapas existente no processo de investimento, logo de decisão. Enquanto no primeiro caso a decisão de exercício da opção ocorre em uma única etapa - exercer ou não a opção, ainda que essa decisão possa ocorrer em diferentes instantes para uma opção americana - no outro há pelo menos quatro etapas (exploração, delimitação, desenvolvimento e extração), cada uma proporcionando uma flexibilidade maior na tomada de decisão do investidor.

Após a obtenção de um ou mais bloco(s) exploratório(s) - seja por leilão ou por uma aquisição a mercado - uma firma pode escolher pela perfuração ou não de um poço exploratório (decisão de exploração). Em caso de sucesso nessa etapa, o bloco exploratório passa a ser considerado um campo não-delimitado, isto é, um com elevada incerteza técnica. Dessa forma, para cada bloco, a firma passa a ter uma nova opção, a de investir ou não em sua delimitação - através de relatórios de sísmica e/ou mais perfurações. Exercida essa opção, a firma passa a ter reservas não-desenvolvidas, ainda que delimitadas. Nesse momento, a firma enfrenta uma nova escolha: desenvolver ou não a reserva? A decisão pelo desenvolvimento da reserva será feita na ocorrência de um

resultado positivo na etapa anterior, isto é, após comprovada a existência de petróleo/gás na respectiva reserva em quantidade suficiente para remunerar o custo de capital da firma. Nesse caso, ter-se-ão reservas desenvolvidas. Por fim, na fase de extração a firma terá as “opcionalidades” inerentes a um processo produtivo, como expansão, parada temporária e abandono. (Dias, 2005)



**Figura 2:** Processo de Opções Reais em E&P de Petróleo (Fonte: Dias, 2005, pag. 45)

A abordagem por opções reais, diferentemente daquela de fluxo de caixa descontado, considera o valor da flexibilidade (*opcionalidade*) de investimento no desenvolvimento da reserva apenas e quando considerado “ótimo” por seu detentor. Além disso, como destacado por Dixit & Pindyck (1994), isso leva a um impacto diferente da volatilidade do preço do ativo subjacente sobre aquele da opção: em vez de uma redução no VPL por um aumento na taxa de desconto, há um aumento no valor justo da opção.

Outra consideração importante na modelagem de reservas não-desenvolvidas de petróleo é o tratamento do tempo de expiração da concessão - “*relinquishment requirement*”. Segundo Dixit & Pindyck (1994; página 401), para muitos investimentos em reservas de petróleo, é uma aproximação razoável ignorar essa condição e considerar a opção desenvolvimento como perpétua para grandes tempos de expiração.

### Apreçamento de companhias por opções reais

Apesar das vantagens do apreçamento por opções reais, esta ainda não é uma ferramenta comum para o apreçamento de companhias abertas brasileiras cujo “valor justo” decorre fundamentalmente de seus blocos exploratórios de petróleo - como a OGX em 2008 ou a HRT atualmente.

Por este modelo, uma companhia é avaliada com base nos ativos ou recursos que detém, como a quantidade de barris de petróleo estimada por uma empresa certificadora (como a DeGolyer & MacNaughton). Em relação à aplicação da metodologia de fluxo de caixa descontado para avaliar reservas não-desenvolvidas de petróleo - blocos exploratórios nos quais foi determinada a existência de petróleo - Paddock, Siegel e Smith (1988) descrevem algumas desvantagens em seu artigo, como a necessidade de especificar as distribuições estatísticas (nem sempre independentes) para custos de exploração, quantidade de reservas de hidrocarbonetos, custos de desenvolvimento, preços de hidrocarbonetos e custos operacionais. Assim, para cada conjunto de realizações dessas variáveis aleatórias, um analista deve determinar se é ótimo explorar, desenvolver e extrair a/da reserva. Além disso, ele também deve ter alguma premissa sobre o *timing* de exploração e de desenvolvimento, assim como sobre a taxa de extração do petróleo. Então para um dado conjunto de realizações dessas VA's, o perfil de fluxo de caixa da reserva é determinado para, integrando sobre todos os possíveis conjuntos de realizações, determinar os valores esperados dos fluxos de caixa. Por fim, empregando alguma modelo de apreçamento (como o CAPM), taxas de desconto ajustadas ao risco são determinadas para descontar esses fluxos de caixa esperados e determinar o valor justo da reserva. Nada fácil...

Apesar de tamanha complexidade, essas abordagens “tradicionais” ignoram ou consideram de forma limitada o valor da flexibilidade (*opcionalidade*) de investimento no desenvolvimento da reserva apenas e quando considerado “ótimo” por seu detentor. Dessa forma, pode-se incorrer o risco de subestimar o ativo - ou a companhia - e mensurar inadequadamente a sensibilidade de seu valor a “novas informações”, como mudanças no preço de referência do barril de petróleo e sucessos/fracassos em uma campanha exploratória. É claro que uma redução no preço de venda de um barril de petróleo reduz o valor de reservas dessa commodity. Por outro lado, isso também implica em certas reservas não-desenvolvidas perderem sua viabilidade econômica e, assim, deixa-se de incorrer no custo de seu desenvolvimento. É claro que a comprovação ou não de petróleo em um prospecto tem implicações sobre a expectativa sobre outros prospectos adjacentes, mas dificilmente sucessos ou fracassos sucessivos podem ser propagados para toda uma bacia exploratória.

## Estado da Arte

### Paddock, Siegel e Smith, 1988

O trabalho de Paddock, Siegel e Smith (1988) é um dos artigos mais

relevantes sobre a aplicação de opções reais no apreçamento de reservas não-desenvolvidas de petróleo. Os autores distinguem entre as diferentes fases exploratórias - posteriormente detalhadas por Dias (2005) - o que leva à conclusão de que uma reserva não-desenvolvida de petróleo pode ser interpretada como uma opção composta. Fazem, porém, a premissa simplificadora de que “é ótimo iniciar o desenvolvimento [da reserva] imediatamente após uma campanha exploratória bem-sucedida tenha ocorrido”, colapsando a opção desenvolvimento com aquela de exploração. Essa premissa é considerada apropriada pelos autores na inexistência de incerteza geológica e, mesmo no caso contrário, não acarretaria maiores problemas para sua análise.

Os autores consideram duas variáveis de estado:  $Q$  (dimensão da reserva) e  $V$  (preço unitário de uma reserva desenvolvida). Consideram que os preços de um barril petróleo e de uma da reserva desenvolvida - cujo mercado secundário é considerado líquido - seguem um movimento geométrico Browniano. Além disso, assumem um decaimento exponencial para o volume (inicial) de barris na reserva modelada, devido à produção. A partir daí, aplicam o método de ativos contingentes para derivar uma equação diferencial parcial de segunda ordem, da qual, com hipóteses simplificadoras, obtém uma regra de investimento simples.

### **Aiube & Baidya, 1995**

Aiube & Baidya empregam a metodologia de opções para o apreçamento de uma reserva desenvolvida de petróleo. Assumem que o preço de petróleo segue um MGB, mas consideram um comportamento estocástico do potencial da reserva “ $B$ ”, que decai a um ritmo controlado otimamente pelo produtor de modo a maximizar seu fluxo de caixa instantâneo - para o qual uma expressão é desenvolvida. Daí decorre um problema de controle estocástico ótimo, o qual é resolvido por programação dinâmica.

### **Dias & Rocha, 1999**

Dias & Rocha assumem um modelo distinto para o valor de uma reserva desenvolvida: o “Business Model”. Segundo este, o valor da reserva desenvolvida de petróleo ( $V$ ) é descrito por uma função do preço do petróleo ( $P$ ), do potencial da reserva ( $B$ ) e do parâmetro “ $q$ ” (denominado de “qualidade econômica da reserva”). “ $B$ ” e “ $q$ ” são considerados determinísticos, de tal forma que “ $V$ ” segue uma expressão linear:  $V = q \times B \times P$ . “ $B$ ” é obtido a partir de seu valor esperado considerando uma distribuição triangular, enquanto que “ $q$ ” engloba uma grande quantidade de informações, como: despesas operacionais, taxas de royalties e de impostos, custo de capital,

qualidade da rocha-reservatório, etc. [Ver Dias (2005) para maiores detalhes na obtenção de “ $q$ ”].

A partir dessa expressão linear para “ $V$ ”, os autores concluem que esse preço deve seguir o mesmo processo assumido para “ $P$ ” - um movimento geométrico Browniano ou um movimento de reversão à média com saltos. Em seguida, aplicam programação dinâmica para obter a equação diferencial parcial de segunda ordem que descreve o processo, a qual é implementada numericamente empregando o método de diferenças explícito. Dias & Rocha comparam os resultados de seu modelo para o caso em que o preço do petróleo segue tanto um MGB quanto um movimento de reversão à média com saltos.

### **Cortazar, Schwartz e Cassassus, 2001**

Cortazar, Schwartz e Cassassus desenvolvem um modelo para o apreçamento de um investimento de exploração em um recurso natural, com foco principalmente em cobre - apesar de julgarem o modelo extensível ao caso de petróleo - baseado naquele de Brennan & Schwartz (1985). O trio também faz a analogia entre uma opção real e uma opção composta (*compound option*) e, assim, considera opções operacionais (abertura, fechamento e abandono), de desenvolvimento (diferimento do investimento no desenvolvimento) e de exploração (idem para fase de exploração).

Quanto às variáveis de estado, apesar de modelarem tanto o preço da commodity ( $S$ ; MGB com taxa de conveniência constante) quanto a incerteza técnica-geológica ( $G$ ; MGB de drift zero, independente do anterior), os autores definem uma terceira variável de estado que é função das duas demais ( $Z = S \times G$ ). Isso tornaria o modelo muito mais simples sem uma perda expressiva no poder de aproximação do valor do projeto.

Sobre a incerteza técnica-geológica, para Cortazar, Schwartz e Cassassus ela pode ser decomposta em duas partes: sucesso/fracasso em descobrir um prospecto economicamente viável e características específicas deste. A primeira foi modelada considerando probabilidades discretas a cada etapa da exploração. Para o outro componente de incerteza, Cortazar, Schwartz e Cassassus adotaram uma abordagem “mais simples” do que outros autores:

“Em vez de perguntar a geólogos/engenheiros de minas para especificar o nível e o processo multivariado para todas as características relevantes da mina, nós perguntamos a eles para apenas especificar um conjunto de tipos possíveis de minas, com sua probabilidade de ocorrência, que poderiam ser encontrados considerando as características atuais do prospecto”. (Cortazar, Schwartz e Cassassus, 2001).

Dessa maneira e empregando probabilidades condicionais para cada tipo de mina, os autores chegaram a um valor esperado para a mina, assim como uma distribuição empírica inicial para seus valores - a qual foi definida como risco técnico-geológico. Mais concretamente, a variância determinada para o processo de  $G$  foi incorporada ao processo de  $Z$ .

Os autores aplicam seu modelo empregando o método de diferenças finitas implícito e concluem que para os prospectos analisados uma parte considerável de seu valor decorre de suas várias opções reais.

#### **Araújo, 2004**

Araújo (2004) em sua tese de doutorado aplicou o método de mínimos quadrados de Monte Carlo na avaliação de projetos com opções reais. Nesse sentido, o autor aplicou o método em dois projetos de exploração e produção de petróleo. Os resultados foram validados empregando o método binomial.

Para a modelagem do valor do prospecto, também foi considerado o “*Business Model*”, análogo a Dias & Rocha (1999).

Cada projeto foi analisado em relação a três cenários distintos: (1) há um único fator de incerteza é o preço do petróleo que segue um MGB; (2) há mais um fator de incerteza, o volume da reserva, que segue uma distribuição uniforme e (3) há terceiro um fator de incerteza, a qualidade econômica da reserva, que também segue uma distribuição uniforme.

#### **Dias, 2005**

Em sua tese de doutorado, Dias estende a teoria tradicional de opções reais em petróleo para considerar - além das incertezas econômica e técnica - a modelagem do fluxo e a avaliação da informação, desenvolvendo-as por ele denominadas “opções reais híbridas”.

Além disso, Dias também considera o problema no contexto de teoria dos jogos, tendo em vista que a interação entre empresas petrolíferas em blocos exploratórios vizinhos se assemelha a de jogos não-cooperativos.

Para Dias, sua abordagem em relação à incerteza técnica - que inclui uma modelagem o processo de revelação da informação, além de quantificar seu

valor - seria mais adequada do que a de outros autores. Muitos tratariam essa forma de incerteza de maneira inconsistente modelando-a como um processo estocástico em tempo contínuo (como um MGB), isto é, considerando-a similar à incerteza de mercado.

De forma análoga a Dias & Rocha (1999), Dias considera um modelo paramétrico para o valor da reserva desenvolvida (“*Business Model*”). O autor emprega o método de ativos contingentes para derivar as equações diferenciais parciais de segunda ordem para as opções reais analisadas. O apreçamento das mesmas e a determinação de seu momento ótimo de exercício são feitos por uma simulação de Monte Carlo. Além disso, são analisadas as melhores alternativas de investimento em informação, a interação estratégica entre duas empresas de petróleo com blocos exploratórios vizinhos e prospectos correlacionados e o valor das opções reais inerentes ao processo (além daquela de desenvolvimento).

Quanto à incerteza de mercado, Dias considera que o preço do petróleo segue um MGB. Por outro lado, para a incerteza técnica, o autor analisa casos em que a mesma está presente ou não - isto é, quando há informação perfeita sobre “*q*” (qualidade econômica de reserva) e “*B*” (potencial da reserva). Nos casos em que considera essa fonte de incerteza, Dias pressupõe que “*B*” e “*q*” seguem distribuições triangulares que são alteradas apenas quando se investe em informação. Além disso, também considera casos em que o detentor da opção investe ou não informações adicionais sobre o prospecto.

Dias comenta que “*V*” (valor da reserva desenvolvida) pode ser estimado de duas formas: como o valor presente das receitas líquidas de custos operacionais e impostos ou a partir de um mercado secundário de reservas desenvolvidas.

Dias cita três possibilidades de se considerar tanto as incertezas técnicas quanto as de mercado na modelagem:

- (a) Usar modelos paramétricos - simples, como o “*Business Model*”, ou de fluxo de caixa rígido (“ $V = qBP - C$ ”, em que “*C*” representa os custos operacionais a serem incorridos) - ou desenvolvendo uma planilha de fluxo de caixa para a reserva.
- (b) Simular detalhadamente todo o fluxo de caixa (o que pode ser extremamente complexo e moroso computacionalmente).
- (c) Além de (b), simular em paralelo cada reservatório para obter sua respectiva curva de produção (algo ainda mais complexo).

O autor também defende o uso de um fator de penalização do “*Business Model*” para os casos em que se considera incerteza técnica, pois: “*se o investimento se mostrar subdimensionado, então mesmo que toda a reserva*

*B possa ser extraída com a capacidade subdimensionada, o valor presente da reserva (produto  $qBP$ ) será menor devido à taxa de extração mais lenta”.*

### **Damodaran, 2006**

Damodaran aborda de maneira bastante prática o problema de apreçamento reservas não-desenvolvidas. Ele propõe sua resolução usando a fórmula de Black, Scholes e Merton - com algumas adaptações - o que é equivalente a pressupor que o valor da reserva desenvolvida segue um movimento geométrico Browniano. Ele destaca que esse valor depende de uma estimativa para a disponibilidade recursos (“ $B$ ” em analogia ao “Business Model”), que é considerada determinística, e o valor do recurso se extraído hoje - que seria seu preço de contribuição, isto é, o preço do recurso menos seu custo variável de extração. Neste caso, sua abordagem é talvez um pouco mais simplista do que a de Dias & Rocha (1999) e Dias (2005), uma vez que o parâmetro “ $q$ ” engloba ainda mais incertezas do que aquelas mencionadas por Damodaran.

A partir dessa consideração, ele destaca que a volatilidade a ser empregada na fórmula deve considerar tanto a variância do preço de petróleo (incerteza econômica) quanto à disponibilidade de recursos (incerteza técnica), isto é, será a volatilidade resultante do produto de variáveis aleatórias - o que está em linha com o modelo de Cortazar, Schwartz e Cassassus (2001), mas contra aquele de Dias (2005). No entanto, é comum a hipótese de que a única fonte de incerteza é o preço de petróleo. Outra consideração importante diz respeito ao “*lag*” de desenvolvimento, a partir do qual o valor do recurso deve ser reduzido pela perda de receita ocorrida enquanto a reserva é desenvolvida (1-2 anos).

Por fim, quanto ao problema de avaliar uma empresa com reservas não-desenvolvidas, Damodaran recomenda o apreçamento considerando “toda” a empresa como uma opção. Apesar de ser preferível avaliar cada reserva separadamente, ele argumenta que muitas vezes informações específicas não estão disponíveis, sendo preferível essa abordagem consolidada. Para isso, o valor do ativo subjacente seria o valor total das reservas, o preço de exercício seria o custo de desenvolvimento total, o tempo de expiração da opção seria média ponderada de tempos de expiração de cada reserva etc. Para a volatilidade, porém, ele considera mais razoável adotar apenas aquela do preço de petróleo, uma vez a variabilidade no total de reservas de uma empresa deve ser menor do que aquela de uma reserva específica.



**Titman & Martin, 2007**

Titman & Martin também abordam o apreçamento de empresas de petróleo usando derivativos de preços de petróleo. Eles consideram que o “*equity*” dessas empresas pode ser avaliado tanto o considerando como uma opção sobre recursos de petróleo - o que eles desenvolvem por um modelo binomial - como também por uma estratégia de “arbitragem”, reproduzindo o fluxo de produção da companhia por contratos futuros ou a termo de petróleo - desde que os mesmos sejam líquidos. Eles ressaltam, porém, que essa abordagem possui as seguintes desvantagens: incerteza dos projetos (quantidade de recursos disponível e custos operacionais), diferenças entre os ativos subjacentes (qualidade do petróleo, localização geográfica) e diferenças em condições contratuais.

**Barros, 2009**

Barros adota uma abordagem análoga a Paddock, Smith e Siegel (1988) e Dias & Rocha (1999) para avaliar reservas petrolíferas no pré-sal da Bacia de Campos. Quanto à incerteza de mercado, Barros analisa tanto o caso em que o preço de petróleo segue um processo geométrico Browniano como também uma reversão à média. Quanto à incerteza técnica, o autor considerou que o volume da reserva (“*B*”) seguia uma distribuição triangular e que a qualidade econômica da reserva (“*q*”), uma distribuição uniforme.

A partir daí, Barros empregou a técnica de ativos contingentes para obter a equação diferencial parcial que descreve o valor da reserva não-desenvolvida, a qual foi resolvida pelo método numérico de diferenças finitas Crank-Nicholson.