3
Modelo Proposto

No presente trabalho, será desenvolvido um modelo de opções reais para apreçamento companhias petrolíferas brasileiras de capital aberto em estágio pré-operacional, isto é, cujos únicos ativos sejam, essencialmente, blocos exploratórios de petróleo e o caixa necessário para seu desenvolvimento. Tal modelo será baseado em dados públicos disponíveis de companhias desse tipo - como demonstrativos financeiros, apresentações a investidores e relatórios elaborados por empresas certificadoras de reservas (ex.: DeGolyer & MacNaughton).

Será proposta uma abordagem em três etapas:

(1) Apreçamento do bloco exploratório a partir do apreçamento de uma reserva não-desenvolvida por uma opção europeia supondo um preço de venda constante (corrente) para o barril petróleo e um valor fixo (esperado) para o potencial de cada prospecto da companhia;

(2) Apreçamento do bloco exploratório a partir do apreçamento de uma reserva não-desenvolvida por uma opção europeia empregando simulação de Monte Carlo para tanto o preço de venda do barril de petróleo quanto o potencial de cada prospecto;

(3) Análogo ao anterior, mas considerando o caso de uma opção americana.

Dessa maneira, espera-se apresentar a modelagem proposta de uma forma mais didática, aumentando a sofisticação do modelo a cada etapa. Além disso, será possível analisar a robustez dos modelos, uma vez que o valor obtido em cada etapa servirá de referência para a seguinte. Por exemplo, o valor de um prospecto obtido em (3) deverá necessariamente ser superior àquele obtido em (2), pois uma opção americana deve ter um valor superior a sua correspondente europeia para ativos que pagam dividendos.

Além disso, para as etapas (2) e (3) será avaliado o valor da opção real não só considerando o caso em que o preço do petróleo segue um MGB, como também para o caso de um movimento de reversão à média com saltos de Poisson.

3.1
Definição de variáveis do modelo desenvolvido

Seja $t \in \{1, \ldots, T\}$ uma variável para representar a passagem do tempo, com T sendo o tempo de expiração do contrato (da opção).

Seja P_t variável que representa o logaritmo natural de P_t para o caso de reversão à média com saltos.

Seja X_t a variável de estado que descreve o processo estocástico de reversão à média com saltos do preço do petróleo em um instante t.

Seja V_t a variável de estado para representar o valor da reserva desenvolvida de petróleo em um instante t.

Seja B a variável de estado para representar a quantidade de barris de petróleo da reserva desenvolvida em um instante t.

Seja Y_t a variável de estado para representar o valor da reserva não-desenvolvida de petróleo em um instante t.

Seja BE_t a variável de estado para representar o valor do bloco exploratório de petróleo em um instante t.

Seja I_D o investimento necessário para desenvolver uma reserva de petróleo, ou seja, o preço de exercício da opção de desenvolvimento.

Seja D o valor presente das despesas operacionais com a reserva desenvolvida.

Seja p_g a probabilidade geológica de ocorrência de petróleo em um prospecto.

Seja q a qualidade econômica da reserva.

Seja δ o *dividend yield* da reserva desenvolvida.

Seja ρ o valor da taxa de desconto ajustado ao risco da reserva desenvolvida.

Seja η a taxa de reversão à média de um processo de reversão à média.

Seja λ a frequência de saltos no processo de reversão à média com saltos.

Seja ϕ distribuição de probabilidade do tamanho dos saltos.

Seja $\mu_{\text{SaltoparaCima}}$ e $\mu_{\text{SaltoparaBaixo}}$ os respectivos valores esperados para os do processo de reversão à média com saltos.

Seja σ_{salto} o desvio-padrão dos saltos do processo de reversão à média com saltos.

3.2
Contextualização

Nesta seção, o modelo proposto será contextualizado em relação àqueles de autores que também endereçaram o problema de valorar reservas não-desenvolvidas de petróleo.

3.2.1
Modelo para a reserva desenvolvida

O apreçamento de uma reserva não-desenvolvida é feita usualmente “de trás para frente” (*backward induction*) a partir do valor de uma reserva desenvolvida. Para esta, neste trabalho será empregado um modelo paramétrico simples, denominado por Dias (2005) de *Business Model*. Aqui, porém, ele será definido de forma ligeiramente diferente do que em Dias (2005) e Dias & Rocha (1999) com o valor presente dos custos operacionais da reserva desenvolvida (“C”) somado ao valor presente dos custos de capital (“I_D”) para compor o *strike* da opção (reserva não-desenvolvida). Mais detalhes disso na seção seguinte do texto.

Serão ignoradas opções operacionais - como de expansão, de parada temporária ou até de abandono - por fugir ao escopo desse trabalho cujo foco são reservas não-desenvolvidas. Caso houvesse um mercado líquido para reservas desenvolvidas de petróleo, abordagens mais simples - mas nem por isso menos confiáveis - seriam (a) usar o preço indicado por esse mercado ou (b) a partir do comportamento de preços desse mercado, supor algum processo estocástico para o seu preço. Algebricamente, o valor da reserva desenvolvida de petróleo (V_t) será descrito como:

$$V_t = qBP_t. \tag{3-1}$$

É importante fazer uma ressalva sobre a adequação desse modelo considerando o regime fiscal onde o campo de petróleo se localiza. Mais especificamente, como esse modelo pressupõe uma relação linear entre o valor da reserva desenvolvida e o preço de petróleo, ele é adequado a países que adotam o regime de concessões (como Brasil, EUA e Inglaterra). Para Dias (2005), porém, essa não é uma premissa válida em um regime de partilha pois o valor da reserva desenvolvida não é linear em relação ao preço do barril de petróleo nesse regime.

É importante esclarecer também a definição de “q” empregada. Segundo Dias (2005), “**A qualidade q é um parâmetro agregado que reflete fatores técnicos (qualidade da rocha, dos fluídos, etc.) e fatores econômicos (custo operacional, taxas, taxa de desconto ajustada ao risco, etc.).**”. Por esse motivo, Dias também sugere a decomposição desse fator em dois, um para avaliar a qualidade técnica da reserva e outro para avaliar sua qualidade de mercado. *No presente trabalho, “q” foi empregado em sua definição original por Dias, considerando conjuntamente fatores técnicos e mercadológicos*. Em seção subsequente, a determinação do parâmetro será por uma aproximação da seguinte derivada:

$$q(P) = \frac{1}{B}\frac{\partial V(P)}{\partial P}. \tag{3-2}$$

O modelo adotado pressupõe uma projeção detalhada do fluxo de caixa da reserva desenvolvida de modo a determinar o parâmetro "q". Ainda assim, mesmo nas seções subsequentes, não se empreenderá uma simulação detalhada dos parâmetros dessa projeção, o que seria extremamente "custoso" computacionalmente e sem apresentar benefícios muito claros tendo em vista que a maior parte da incerteza do problema antecede o estágio operacional da reserva. Além disso, não será realizada uma simulação para cada reservatório, o que permitiria a obtenção de uma estimativa de sua curva de produção, por depender de análises (geológicas) que fogem do escopo do presente trabalho.

É importante distinguir entre a incerteza técnica englobada pelo parâmetro "q" e a probabilidade "p_g" (probabilidade geológica de ocorrência de petróleo em um prospecto) já definida. Uma vez que "q" se refere à qualidade econômica de uma reserva desenvolvida - isto é, já operacional - o mesmo não engloba um risco inerente a blocos exploratórios de petróleo, como aquele descrito por "p_g". Dessa forma, como ainda será visto, quando pertinente o evento "ocorrência de petróleo no bloco exploratório" será tratado como uma variável aleatória de Bernoulli de probabilidade "p_g" que determinará a existência ou não de uma reserva. Isto é, um "fracasso" nesse variável aleatória implicaria em "V" assumir trivialmente o valor de "0" (zero).

Nesse sentido, "p_g" foi interpretado conforme a definição dada pela DeGolyer & MacNaughton:

"*A probabilidade de sucesso geológico* (p_g) *é definida como a probabilidade de descobrir reservatórios que produzam petróleo a taxas mensuráveis.* p_g *é estimada quantificando com uma probabilidade cada um dos fatores de chance geológicos individuais: trapa, geração, reservatório e migração. O produto das probabilidades destes quatro fatores de chance é* p_g". Fonte: tradução livre da OGX de Relatório DeGolyer & MacNaughton sobre recursos na Bacia de Cesar-Ranchería na Colômbia (31/03/2011)

Essa definição foi considerada equivalente àquela segundo Dias (2005) para o "fator de chance de existência de uma reserva de petróleo". Este seria o resultado do produto de seis fatores: (1) probabilidade de existência da rocha geradora ("*source rock*") de petróleo; (2) probabilidade de existência de migração; (3) probabilidade de existência de rocha reservatório; (4) probabilidade de existência da trapa geométrica ("*closure chance*"); (5) probabilidade de retenção ("*containment chance*") e (6) probabilidade de existência do sincronismo geológico ("*timing*").

Quanto à variável aleatória "B" (potencial da reserva), sua definição é bastante direta, consistindo no potencial de barris de petróleo ("*bbl*") da reserva em análise. Tipicamente, avaliadores de blocos exploratórios divulgam estimativas "baixa", "melhor", "alta" e "média" para esse potencial. A "estimativa baixa"representa a quantidade "P90", isto é, essa é a quantidade para a qual há uma chance de 90% do potencial da reserva ser esse valor ou maior. A "melhor estimativa" ou "estimativa mediana" representa a quantidade "P50"; a "alta", "P10". A "estimativa média" é a média ponderada pela probabilidade, que, tipicamente, varia no intervalo entre "P45" e o "P15", dependendo da variação dos volumes de recursos potenciais ou volumes associados. No presente trabalho, para os casos em que o potencial da reserva foi simulado, a variável aleatória foi determinada pela interpolação entre os valores "P10", "P50" e "P90".

Por fim, para concluir a descrição da fórmula enunciada, o preço de um barril de petróleo (descrito por P_t) foi modelado tanto como um processo estocástico de movimento geométrico Browniano - uma premissa comum em finanças - como um de reversão à média com saltos - um modelo mais próximo da realidade segundo Dias (2005). O primeiro caso torna possível o apreçamento da reserva não-desenvolvida pela fórmula de Black, Scholes e Merton (obedecidas as premissas de sua formulação) se essa reserva for interpretada como uma opção do tipo europeia - conforme Damodaran (2006). Isso não invalida, porém, o apreçamento dessa reserva por simulação de Monte Carlo como Araújo (2004) e Dias (2005) - ou por diferenças finitas, como feito por outros autores, mas que foge ao escopo desse trabalho - o que também torna possível considerar o caso de uma opção do tipo americana (empregando o algoritmo de Longstaff & Schwartz, já visto). Para o caso de um MRM com saltos, porém, uma solução analítica para o problema não é conhecida, tornando necessária o apreçamento da reserva por simulação de Monte Carlo.

Outra ressalva importante diz respeito à incerteza técnica implícita no parâmetro "q". Apesar de ser notório na indústria petrolífera que esse tipo de incerteza se reduz ao longo do tempo através do "investimento em informação" (novos relatórios de geólogos/engenheiros, dados de reservas adjacentes àquela sob estudo etc.), não foi modelado no presente trabalho esse processo de "revelação de informação". Tal modelagem - empregada por Dias (2005) - adicionaria uma complexidade talvez desnecessária ao modelo considerando seu objetivo: apreçamento de uma ação de uma companhia aberta cujo valor decorra fundamentalmente de blocos exploratórios de petróleo.

Apesar da expressão linear $V_t = qBP_t$ ser aparentemente excessivamente simplista, ela é usualmente coerente com a modelagem do valor da reserva desenvolvida pelo *valor presente líquido* (VPL) dos fluxos de caixa por ela gerados. Estes por sua vez podem ser facilmente modelados usando uma simples planilha de Excel: basta considerar uma curva de extração da quantidade de petróleo B para estimar as receitas e despesas do projeto (incluindo *royalties*, impostos, benefício fiscal com depreciação do investimento realizado etc.). A soma a valor presente desses fluxos de caixa será exatamente o VPL do projeto.

$$V = VPL(FC_0, \ldots, FC_T) = \sum_{t=0}^{t=T} FC_t / e^{\rho(T-t)}. \tag{3-3}$$

sendo ρ a taxa de desconto ajustada ao risco do projeto.

3.2.2
Apreçamento da reserva não-desenvolvida

Uma vez conhecido o valor da reserva desenvolvida é possível estimar aquele da reserva não-desenvolvida correspondente. Relembrando a analogia entre essa reserva e uma opção de compra sobre um ativo, tem-se que:

$$Y_t = \max(V_t - D - I_D, 0). \tag{3-4}$$

Antes de determinar o valor I_D (investimento necessário para o desenvolvimento da reserva) e de D (valor presente das despesas operacionas da reserva) na expressão, é necessário esclarecer quais opcionalidades existentes no processo de exploração de petróleo serão consideradas. Nesse trabalho será adotada uma modelagem semelhante à de Paddock & Siegel & Smith, isto é, colapsando em uma só decisão as opções de exploração e de desenvolvimento da reserva, assim como a opção de delimitação (Dias, 2005), que representa uma etapa intermediária. Dessa forma, o custo de desenvolvimento da reserva (ou o preço de exercício da opção) deverá englobar conjuntamente as despesas relacionadas com essas três etapas. "Na prática", esse valor foi obtido considerando a totalidade de "Potential Capital Costs" segundo a D&M para o ano anterior à reserva se tornar operacional segundo a projeção de fluxo de caixa estimado pela D&M para a reserva. Quanto a "D", seu valor também foi obtido a partir da mesmo projeção de fluxo de caixa.

Feita essa consideração, torna-se possível estudar a relação (linear) entre o valor presente líquido ("VPL") da reserva não-desenvolvida - isto é, seu valor intrínseco - e o preço de petróleo, permitindo a determinação do valor de "q". Sensibilizando para diferentes valores de preço de longo prazo do petróleo o modelo em planilha de Excel para o valor da reserva desenvolvida, é possível aproximar a derivada $\partial VPL/\partial P$ conforme ilustrado abaixo:

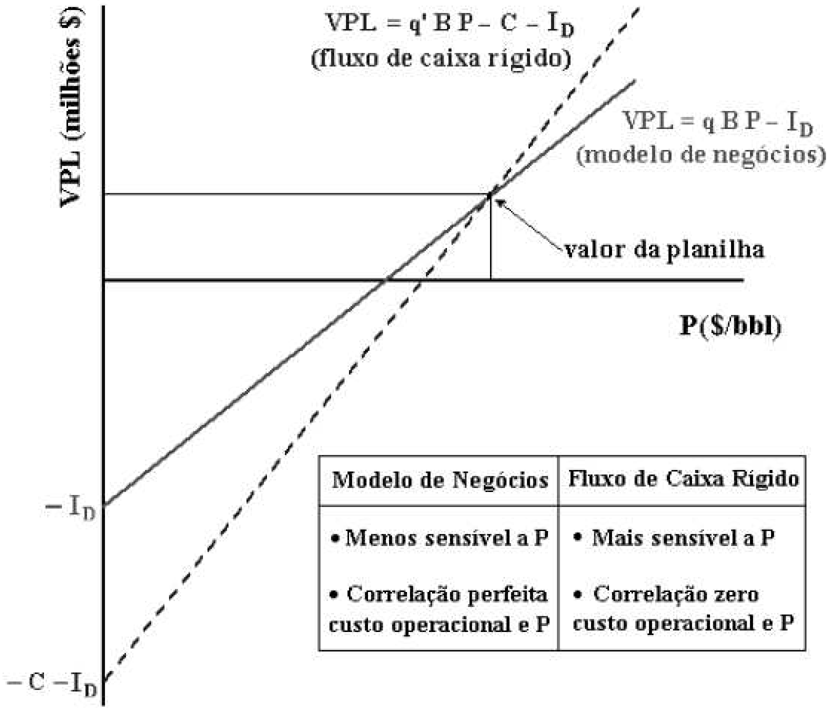

Figura 3: Exemplo de gráfico VPL × P para o *Business Model.*
Fonte: Dias (2005) pag. 79.

Isto é, conhecida a "reta $VPL \times P$" é fácil deduzir sua inclinação "qB" após a determinação de dois pontos pertencentes a essa reta, como suas interseções com o eixo das ordenadas (- I_D - custos) e das abscissas.

A partir daí, torna-se possível empregar o método de simulação de Monte Carlo no apreçamento da reserva, considerando diferentes cenários para o potencial da reserva ("B") e do preço do petróleo ("P_t"). *Sobre essa primeira variável, foi considerado que a firma detentora de um bloco exploratório a partir do instante inicial em cada trajetória tinha pleno conhecimento do volume de recurso na reserva e, de posse desse conhecimento, escolheu o momento ótimo de exercer ou não a opção de desenvolvimento* - o que dependeria do nível de preço do petróleo na trajetória. Essas premissas parecem razoáveis para um potencial investidor em ações da companhia detentora da opção real em petróleo interessado em valorar a mesma. Quanto à "P_t", conforme mencionado, sua modelagem segundo um movimento geométrico Browniano e um movimento de reversão à média com saltos. A discretização de um MGB para simulação é bem conhecida e pode ser encontrada em Wilmott (2006) e Dias (2005). A discretização do MRM com saltos pode ser encontrada em http://www.puc-rio.br/marco.ind/sim_stoc_proc.html#mc-mrj. Para a implementação da simulação, foi empregado um algoritmo análogo àquele de Longstaff & Schwartz (2001) e adaptado de Wilmott (2006; pag.

1314-1316), uma vez que esse considerava um caso de uma opção de venda sobre uma ação.

3.2.3 Apreçamento do bloco exploratório

O valor do bloco exploratório será determinado pelo valor da reserva não-desenvolvida multiplicado pela probabilidade geológica de existência de petróleo conforme:

$$BE_t = p_g \times Y_t.$$

3.3 Modelos

3.3.1 Preço do Petróleo como Movimento Geométrico Browniano

Fórmula de Black, Scholes e Merton

Esta seção abordará o apreçamento de uma reserva não-desenvolvida por uma opção europeia de uma forma mais simplificada do que nas seções seguintes. Para tal, supõe-se um valor fixo (esperado) para o potencial de recursos no prospecto a ser analisado, o que permite o emprego da fórmula de BSM na resolução do problema.

Supondo que P_t segue um movimento geométrico Browniano, conforme a equação abaixo:

$$dP_t/P_t = \alpha_p dt + \sigma_p dZ_{p,t}. \tag{3-5}$$

E que o valor de reserva desenvolvida de petróleo pode ser descrito segundo o modelo paramétrico conforme a expressão abaixo (considerando B será considerado constante e igual a B):

$$V_t = qBP_t. \tag{3-6}$$

Então é possível provar que V_t segue essencialmente o mesmo processo de P_t, pois V é uma função linear de P. Segundo o Lema de Itô:

$$dV_t = \frac{\partial V_t}{\partial t} \times dt + \frac{\partial V_t}{\partial P_t} \times dP_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t}{\partial P_t^2} \times (dP_t)^2 \tag{3-7}$$

Como:

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = 0 \tag{3-8}$$

$$\frac{\partial V_t}{\partial P} = q\ B\ dP_t \tag{3-9}$$

$$\frac{\partial^2 V_t}{\partial P_t^2} = 0. \tag{3-10}$$

Então:

$$dV_t = qBdP_t \tag{3-11}$$
$$dV_t = qBP_t(\alpha_p dt + \sigma_{pp_t} dZ_{p,t}) \tag{3-12}$$
$$dV_t/V_t = \alpha_p dt + \sigma_p dZ_{p,t} \qquad \blacksquare \tag{3-13}$$

Dessa forma, é possível obter uma equação diferencial parcial para descrever o comportamento de X_t:

Supondo que X_t siga um processo de Itô e seja uma função de V_t, vale o Lema de Itô:

$$dY_t = \frac{\partial Y_t}{\partial t}dt + \frac{\partial Y_t}{\partial V_t}dV_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial V_t^2}(dV_t)^2 \tag{3-14}$$

Como $(dV_t)^2 = \sigma_p^2 V_t^2 dt$:

$$dY_t = \frac{\partial Y_t}{\partial t}dt + \frac{\partial Y_t}{\partial V_t}(\alpha_p V_t dt + \sigma_p V_t dZ_{p,t}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial V_t^2}\sigma_p^2 V_t^2 dt \tag{3-15}$$

$$dY_t = \left(\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \frac{\partial Y_t}{\partial V_t}\alpha_p V_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial V_t^2}\sigma_p^2 V_t^2\right)dt + \frac{\partial Y_t}{\partial V_t}\sigma_p V_t\ dZ_{p,t}. \tag{3-16}$$

Seja Π_t um portfólio composto por Y_t e $-n$ unidades de V_t, isto é:

$$\Pi_t = Y_t - nV_t. \tag{3-17}$$

Assim, considerando o caso no qual V_t "paga dividendos":

$$d\Pi_t = dY_t - n(dV_t + \delta V_t dt) \tag{3-18}$$

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \alpha_p V_t \frac{\partial Y_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial V_t^2}\sigma_p^2 V_t^2\right)dt + \sigma_p V_t \frac{\partial Y_t}{\partial V_t} dZ_{p,t}$$
$$- n(\alpha_p V_t dt + \sigma_p V_t dZ_{p,t} + \delta V_t dt) \tag{3-19}$$

$$d\Pi_t = \left[\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \left(\frac{\partial Y_t}{\partial V_t} - n\right)\alpha_p V_t - n\delta V_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial V_t^2}\sigma_p^2 V_t^2\right]dt + \left(\frac{\partial Y_t}{\partial V_t} - n\right)\sigma_p V_t dZ_{p,t}. \tag{3-20}$$

Definindo $n = \frac{\partial Y_t}{\partial V_t}$, elimina-se durante dt o componente estocástico da expressão acima:

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial V_t^2}\sigma_p^2 V_t^2 - n\delta V_t \right) dt. \tag{3-21}$$

Dessa forma, o retorno instantâneo do portfólio deverá ser, por arbitragem, aquele da taxa de livre de risco:

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt. \tag{3-22}$$

Logo:

$$\left(\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial V_t^2}\sigma_p^2 V_t^2 - n\delta V_t \right) dt = r(Y_t - nV_t)dt \tag{3-23}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial V_t^2}\sigma_p^2 V_t^2 dt + \frac{\partial Y_t}{\partial V_t}(r-\delta)V_t - rV_t = 0. \tag{3-24}$$

A equação diferencial é análoga àquela derivada por Black & Scholes (1973) e Merton (1973), para a qual, os mesmos demonstraram sua solução analítica. Merton foi além e derivou a mesma equação para o caso em que o ativo subjacente à opção paga dividendos, o que é mais apropriado a este caso. Merton demonstrou a seguinte solução analítica (obedecidas as respectivas condições de contorno):

$$Y_t = V_t e^{-\delta(T-t)}N(d_1) - (I_D + D)e^{-r(T-t)}N(d_2) \tag{3-25}$$

$$d_1 = \frac{\ln(V_t/(I_D + D)) + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma_p^2)(T-t)}{\sigma_p\sqrt{T-t}} \tag{3-26}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_p\sqrt{T-t}. \tag{3-27}$$

Condições de contorno (adaptadas ao caso da reserva não-desenvolvida):

Trivial: $Y_t(P_t = 0) = 0$

Expiração: $Y_T(P_T) = \max(V_T - D - I_D, 0) = \max(qBP_t - D - I_D, 0)$

Continuidade: $Y_t(P_t = \hat{P}) = qB\hat{P} - D - I_D$

Contato Suave: $\frac{\partial Y_t}{\partial P_t} = qB$

Simulação de Monte Carlo

Para a simulação de Monte Carlo, foi empregado o método de Monte Carlo de Mínimos Quadrados com base no código de Wilmott (2006), escrito em Visual Basic, e inspirado no artigo de Longstaff & Schwartz (2001). Convém destacar que o método de MCMQ, apesar de popularizado por Longstaff & Schwartz (2001), é devido principalmente a Carriere (1996) e Tsitsiklis & Van Roy (2001). O código fez uso da função randômica de VBA e incluiu um gerador de variável normal padrão segundo o método de Box-Muller, que pode ser encontrado em Sheldon (2006). Foram necessárias as seguintes adaptações ao código original: (1) a inclusão do dividend yield na geração do processo de preços, (2) uma "saída" do código no caso de caminhos nos quais a opção em momento algum ficasse "dentro do dinheiro" e (3) especificidades de um modelo de reserva de petróleo.

Foram necessárias as seguintes adaptações ao código original: (1) a inclusão do *dividend yield* na geração do processo de preços, (2) uma "saída" do código no caso de caminhos nos quais a opção em momento algum ficasse "dentro do dinheiro", (3) especificidades de um modelo de reserva de petróleo e (4) uso das funções-base x^3, x^2 e x em vez de apenas x^2 e x.[1]

Além da modelagem do processo estocástico do preço do petróleo como um movimento geométrico Browniano - o que será descrito em seguida - a simulação empreendida também contemplou mais duas variáveis aleatórias: a existência geológica de petróleo na reserva e o volume potencial da mesma. Essas variáveis foram consideradas independentes entre si. A primeira foi modelada a partir de uma distribuição de Bernoulli considerando a probabilidade de sucesso obtida no respectivo relatório de avaliação por D&M. Já as realizações do potencial da reserva foram obtidas, conforme mencionado, a partir de uma distribuição interpolada com dados do mesmo relatório (estimativas "baixa", "melhor" e "alta").

O movimento geométrico Browniano foi simulado a partir de sua discretização exata descrita a seguir:

A partir da versão neutra ao risco da equação diferencial para o MGB, é possível obter uma fórmula para seu valor aplicando o lema de Itô:

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = (r - \delta) \times dt + \sigma \times dB(t) \tag{3-28}$$

$$C(P(t)) = ln(P(t)) \tag{3-29}$$

$$dC(P(t)) = C_P dP + \frac{1}{2} C_{PP} (dP)^2. \tag{3-30}$$

[1]Segundo Longstaff&Schwartz (2001), o algoritmo de mínimos quadrados de Monte Carlo poderia ser empregado para diversos tipos de função base, como polinômios de Laguerre, Hermite, Legendre, Chebychev, Gegenbauer ou Jacobi.

Como $(dP)^2 = \sigma^2 P^2 dt$, então:

$$dC(P(t)) = \frac{1}{P}dP - \frac{1}{2} \times \frac{1}{P^2} \times \sigma^2 P^2 dt \tag{3-31}$$

$$dC(P(t)) = ((r-\delta)\,dt + \sigma dB(t)) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \tag{3-32}$$

$$\int_t^{\hat{t}} dC(P(u))du = \int_t^{\hat{t}} (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)du + \int_t^{\hat{t}} \sigma dB(u) \tag{3-33}$$

$$ln(\frac{P(\hat{t})}{P(t)}) = (r - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2)(\hat{t} - t) + \sigma(B(\hat{t}) - B(t)) \tag{3-34}$$

$$P(\hat{t}) = P(t)e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(\hat{t}-t)+\sigma(B(\hat{t})-B(t))}. \tag{3-35}$$

Como os incrementos de $B(t)$ são independentes e de distribuição normal é possível estabelecer o seguinte procedimento recursivo para simular valores neutros ao risco de $P(\hat{t})$ em $0 = t_1 < \cdots < t_n$:

$$P(t_{i+1}) = P(t_i)e^{(r-\delta-\frac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1}-t_i)+\sigma(\sqrt{t_{i+1}-t_i}Z_{i+1})} \tag{3-36}$$

com $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ seguindo distribuições normais padrão independentes.

3.3.2 Preço do Petróleo como Movimento de Reversão à Média com Saltos: Simulação de Monte Carlo

A modelagem do preço do barril de petróleo como um movimento de reversão à média com saltos de Poisson ("Modelo de Marlim") é devido a Dias (2005).

Na subseção "Processo de Reversão à Média com Saltos", essa modelo foi rapidamente caracterizado, conforme transcrito abaixo:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \eta[\overline{X(t)} - X(t) - \lambda k]dt + \sigma dZ(t) + dq \tag{3-37}$$

η é a velocidade de regressão

$\overline{X(t)}$ é o valor de equilíbrio no longo prazo

λ corresponde à frequência dos saltos

$$dq = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade} \quad 1 - \lambda dt \\ \phi - 1, & \text{com probabilidade} \quad \lambda dt \end{cases} \tag{3-38}$$

$$k = E[\phi - 1]$$

dq é um Processo de Poisson independente de $dZ(t)$

ϕ é a distribuição de probabilidade do tamanhos dos saltos conforme ilustrado em seção anterior.

Diferentemente do modelo acima, aquele adotado no presente trabalho considerou uma distribuição com probabilidades iguais para saltos para cima e para baixo, conforme ilustrado na Figura 4 a seguir, configurando o "modelo de Marlim" segundo Dias:

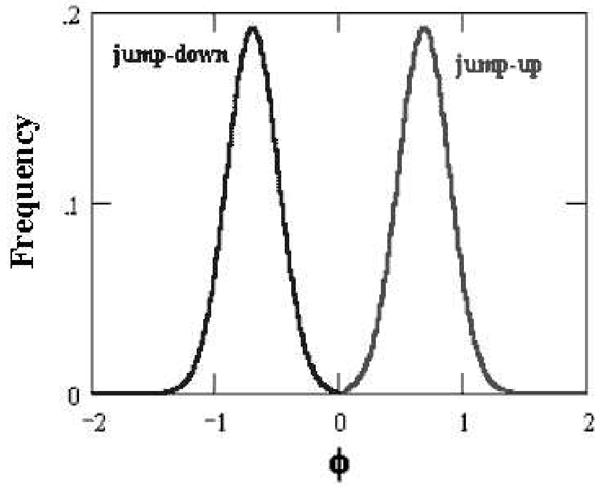

Figura 4: Distribuição de probabilidade de dimensão de saltos para o ``Modelo de Marlim'' de Dias

Além disso, é considerado:

$$dq = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade} \quad 1 - \lambda dt \\ \phi, & \text{com probabilidade} \quad \lambda dt \end{cases} \tag{3-39}$$

$$k = E[\phi]$$

Essa simetria torna desnecessário o "termo de compensação" e a equação diferencial passa a ser:

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \eta[\overline{X(t)} - X(t)]dt + \sigma dZ(T) + dq. \tag{3-40}$$

Segundo Bastian-Pinto (2009), há duas características diferenciadas no modelo Dias [39] de reversão à média para outros (não aplicável para o caso de saltos):

(1) O preço $P(t)$ de uma commodity possui uma distribuição lognormal e segue um processo geométrico de regressão a uma média $\overline{P(t)}$ cujo valor é definido por: $\overline{P(t)} = e^{\overline{X(t)}}$.

(2) Os preços possuem uma média por simulação dada por $E[(P(t)] = e^{E[X(t)]}$

O processo de reversão à média com saltos já foi explorado por Das (1998) ao tratar de processos estocásticos para descrever o comportamento de taxas de juros, quando também deduziu expressões para os momentos de $P(t)$.

Para a presente análise, é necessário o conhecimento apenas dos dois primeiros momentos:

$$E[X(t)] = X(0)e^{-\eta T} + \overline{X(t)}(1 - e^{-\eta T}) \tag{3-41}$$

$$Var[X(t)] = (1 - e^{-\eta t})\frac{\sigma^2 + \lambda E[\phi^2]}{2\eta} \tag{3-42}$$

com $E[\phi^2]$ estimado por $E[\phi^2] = \int \phi^2 f(\phi) d\phi$.

Para obter uma expressão para $P(t)$ é necessário compensar na expressão "$P(t) = e^{X(t)}$" a metade da variância que é "adicionada" pela exponencial de uma distribuição normal, assim:

$$P(t) = e^{X(t) - \frac{1}{2}Var[X(t)]}. \tag{3-43}$$

Isso indica que a simulação de $P(t)$ pode ser feita em etapas, simulando inicialmente $X(t)$, empregando $\overline{X(t)} = ln\overline{P(t)}$ para então calcular $Var[X(t)]$ seguindo a expressão de Das (1998) acima. Por fim, $P(t)$ é determinada por $P(t) = e^{X(t) - \frac{1}{2}Var[X(t)]}$. As expressões discretas para a simulação neutra ao risco são:

$$\begin{aligned} X(t_{i+1}) = X(t_i)e^{-\eta(t_{i+1}-t_i)} + [ln(\hat{S}) - (\rho - r)/\eta](1 - e^{-\eta(t_{i+1}-t_i)}) \\ + \sigma\sqrt{(1 - e^{-\eta(t_{i+1}-t_i)})/2\eta}\ N(0,1) + Salto \end{aligned} \tag{3-44}$$

$$Var[X(t_{i+1})] = (1 - e^{-\eta t_{i+1}})\frac{\sigma^2 + \lambda E[\phi^2]}{2\eta} \tag{3-45}$$

$$P(t_{i+1}) = e^{X(t_{i+1})\frac{1}{2}Var[X(t_{i+1})]}. \tag{3-46}$$

Em que $E[\phi^2]$ é dado pela seguinte expressão:

$$E[\phi^2] = \int \phi^2 f(\phi) d\phi \tag{3-47}$$

$$E[\phi^2] = \int_{-\infty}^{0} \phi^2 f_{\text{Salto para Baixo}}(\phi) d\phi + \int_{0}^{\infty} \phi^2 f_{\text{Salto para Cima}}(\phi) d\phi \tag{3-48}$$

Com Salto para Baixo $\sim N(\mu_{\text{Salto para Baixo}}, \sigma_{\text{Salto para Baixo}})$ e Salto para Cima $\sim N(\mu_{\text{Salto para Cima}}, \sigma_{\text{Salto para Cima}})$