

2

Conceitos Básicos

Neste capítulo são listados alguns conceitos aplicados no desenvolvimento do trabalho. São apresentadas as definições de iluminação, silhueta, triangulação de Delaunay, diagrama de Voronoi e Laplaciano. Apresentamos também propriedades importantes da triangulação de Delaunay e citamos um exemplo de Laplaciano.

2.1

Iluminação e Silhueta

Definimos como função iluminação a função $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que, a cada ponto P de uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, associa o produto interno $I(P) = \mathbf{n}_P \cdot \mathbf{v}$, onde \mathbf{n}_P é a normal à superfície em P e \mathbf{v} é o vetor observador.

Definição 2.1 Dada uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, definimos a **curva silhueta** como o conjunto dos pontos $P \in S$ tais que o produto escalar da normal à superfície em P com o vetor observador é igual a zero, ou seja, $\mathbf{n}_P \cdot \mathbf{v} = 0$ (Figura 2.1). Assim, um ponto P da silhueta é tal que $I(P) = 0$.

Intuitivamente, uma curva silhueta é a curva que separa a parte visível de um objeto da parte não visível.

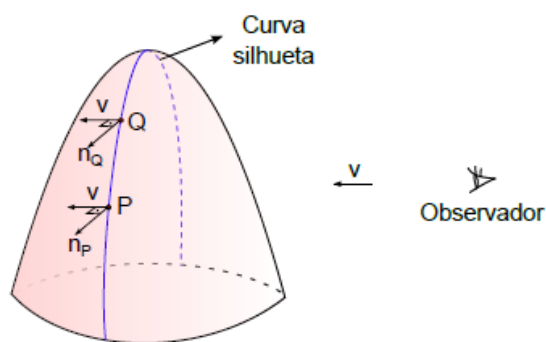


Figura 2.1: Um ponto P está na silhueta quando a normal à superfície em P é perpendicular ao vetor de visão.

A curva silhueta é bem definida em malhas poligonais, pois basta verificarmos em cada face como se comporta o produto interno. Isto é, dado

um triângulo da malha, calculamos em cada vértice o produto interno de sua normal com o vetor do observador e verificamos em cada aresta se houve mudança de sinal. Caso ocorra variação do sinal, por meio de uma interpolação linear determinamos um ponto sobre tal aresta que pertence à silhueta (Figura 2.2). Alguns exemplos podem ser vistos na Figura 2.3.

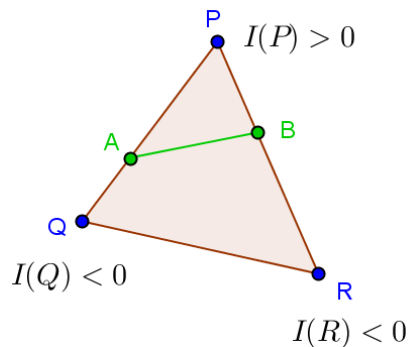


Figura 2.2: Quando há variação de sinal em uma aresta, determinamos por interpolação um ponto da silhueta. Na Figura, os pontos A e B foram assim obtidos. Dizemos então que a aresta \overline{AB} é uma aresta da silhueta.



Figura 2.3: Exemplos de curvas silhuetas extraídas de malhas de triângulos.

2.2

Triangulação de Delaunay no plano e Diagrama de Voronoi

Olson et al (11) propuseram um método de reconstrução local que, dada uma nuvem de pontos, define para cada ponto uma estrela com vértices em pontos da nuvem.

Em uma malha poligonal, a **estrela** de um vértice P é o conjunto de vértices, arestas e faces adjacentes a P . Em uma nuvem de pontos, para definir a estrela de um ponto P , projetamos os k pontos da nuvem mais próximos de P sobre o plano π tangente à nuvem em P . Em seguida, é feita uma triangulação de Delaunay nesses pontos projetados e, por fim, diremos que um ponto Q está na estrela de P se a projeção Q' do ponto Q sobre o plano π é tal que $\overline{PQ'}$ é uma aresta da triangulação de Delaunay.

Definição 2.2 Dado um conjunto de pontos V no plano, um triângulo é dito de Delaunay quando o círculo circunscrito a ele não apresenta vértice de V em seu interior. E uma triangulação T é denominada Delaunay se, e somente se, todos os triângulos que a compõem são triângulos de Delaunay (6).

A triangulação de Delaunay é caracterizada por ter em cada um de seus triângulos um círculo circunscrito vazio (ver Figura 2.4). Um exemplo de triangulação de Delaunay de um dado conjunto de pontos no plano pode ser visto na Figura 2.5.

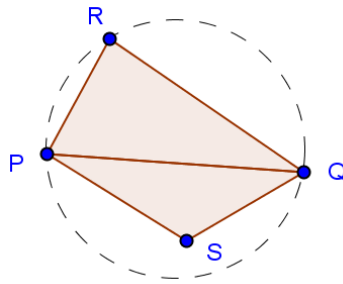


Figura 2.4: O triângulo PQR não é de Delaunay, pois o ponto S está no interior de seu círculo circunscrito.

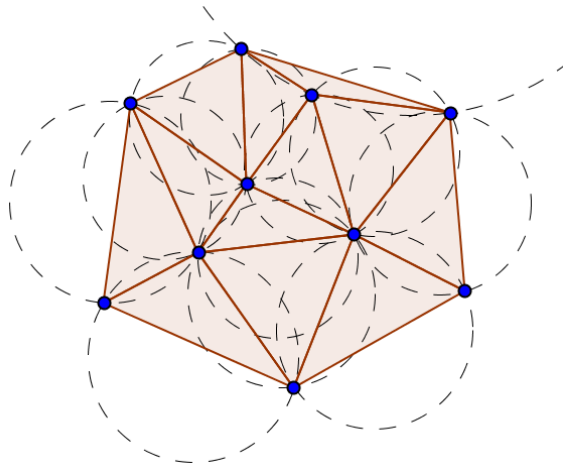


Figura 2.5: Na triangulação de Delaunay, o círculo circunscrito a cada triângulo não apresenta pontos do conjunto de vértices dado em seu interior.

A triangulação de Delaunay é única se os pontos do conjunto V dado estiverem em posição geral, isto é, quando não existem quatro pontos em V que pertençam a uma mesma circunferência.

Definição 2.3 Uma *célula de Voronoi* de um ponto P , $Vor(P)$, de um conjunto de pontos S de um plano π é

$$Vor(P) = \{x \in \pi; \|x - P\| \leq \|x - Q\|, \forall Q \in S\},$$

onde $\|P - Q\|$ indica a distância euclidiana entre os pontos P e Q . Em outras palavras, $Vor(P)$ é o conjunto de todos os pontos x do plano π que estão mais próximos de P do que de qualquer outro ponto Q de S (6).

A escolha por este tipo de triangulação para reconstruir localmente uma malha a partir de uma nuvem de pontos se deve à dualidade da triangulação de Delaunay com o diagrama de Voronoi, que é uma estrutura geométrica que disponibiliza informações de proximidade em conjuntos de pontos.

A dualidade entre o diagrama de Voronoi e a triangulação Delaunay se dá da seguinte forma: dados os pontos P e Q de um conjunto de pontos, as células $Vor(P)$ e $Vor(Q)$ são adjacentes se, e somente se, a aresta \overline{PQ} é uma aresta da triangulação de Delaunay deste conjunto de pontos.

2.3 Laplaciano

O Laplaciano ou Operador de Laplace-Beltrami é um operador diferencial de segunda ordem definido como o divergente do gradiente de uma função. Assim, considerando uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, o Laplaciano de f é definido por:

$$\Delta f(x, y, z) = \nabla(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Para definir o Laplaciano em malhas de triângulos, utilizamos uma discretização do mesmo. O Laplaciano discreto $\Delta_d f$ calculado em um vértice v_i de uma malha triangular com um conjunto de vértices V é definido como

$$\Delta_d f(v_i) = \sum_{v_j \in V} w_{ij}(v_i - v_j),$$

onde o peso w_{ij} é o que determina qual aspecto da malha será priorizado (12).

Podemos citar o exemplo de Laplaciano geométrico proposto por Polthier (12), que usa pesos de cotangentes:

$$\Delta_d f(p) = -\frac{1}{2} \sum_{q_i \in \text{star}(p)} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i)(p - q_i),$$

onde q_i são os vértices que estão conectados a p , ou seja, que estão na estrela de p , denotada por $\text{star}(p)$ e α_i e β_i são ângulos como mostra a Figura 2.6.

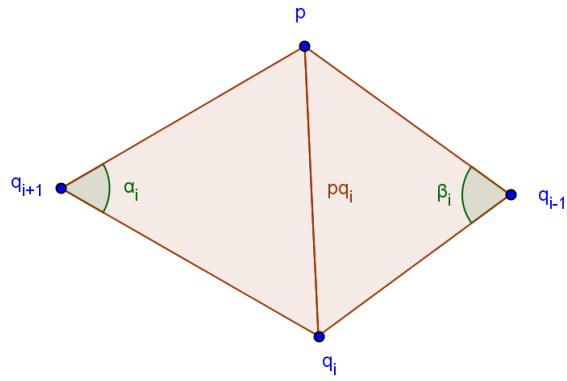


Figura 2.6: Os ângulos α_i e β_i são opostos à aresta $\overline{pq_i}$.