2
O Modelo

Neste capítulo é apresentado o modelo de mercado proposto na dissertação. Apesar de simples, esse modelo pode ser aplicado em diversas situações, como será mostrado ao longo da dissertação. O modelo desenvolvido apresenta uma versão básica, mais simples e algumas extensões para reproduzir algumas situações existentes em mercados reais.

O modelo elaborado, por sua simplicidade, pode ser considerado um modelo de leilão, que tem como regra básica *priorizar* compradores que ofereçam os preços mais altos ou, visto pelo lado do vendedor, aquele que oferecer seu produto pelo menor preço tem a prioridade.

O capítulo está organizado da seguinte maneira. Na seção 2.1 é apresentado o modelo geral do leilão proposto nesta dissertação. Na seção 2.2 é apresentada uma versão *linear* para o leilão, isto é, todas as regras do modelo serão representadas por funções lineares. Na seção 2.3 são mostradas as extensões feitas ao modelo básico. Na seção 2.5 são mostrados alguns exemplos numéricos para o mercado proposto.

2.1
Modelo Geral

O modelo geral proposto nesta dissertação é um leilão "bi-lateral", onde compradores e vendedores dão seus lances. Para um comprador, o lance significa o preço máximo de compra. Para o vendedor, este lance representa o preço mínimo de venda.

Neste modelo geral, convencionou-se que pode ser vendida uma quantidade arbitrária de um (e só um) tipo de mercadoria. A quantidade a ser vendida, depende das capacidades de compra por parte dos consumidores, e de produção (ou estoque) por parte dos produtores. Essas capacidades são pré-definidas por cada participante como entrada do leilão.

O objetivo básico desse mercado é maximizar uma determinada função de *lucro* $\mathcal{L}$ que será função dos preços e quantidades compradas e vendidas pelos participantes do mercado.

Formalizado o leilão tem-se: um conjunto P com n produtores, dois vetores p e c de dimensão n, contendo a quantidade oferecida por cada produtor e o preço cobrado por unidade do produto. Um conjunto Q com m consumidores, dois vetores q e l de dimensão m com as demandas e preços oferecidos pelos consumidores. E um conjunto $\mathcal{R}$ de regras a serem seguidas no leilão.

No restante do texto serão convencionado os termos *produtores* e *consumidores* para os vendedores e compradores do leilão. Naturalmente, o mercado não se restringe a vendedores que efetivamente produzam suas mercadorias. Esta terminologia será utilizada apenas por motivos de simplificação.

Expressando matematicamente, tem-se:

$$
\begin{aligned}
Max\ \mathcal{L}(p, c, q, l)& \\
\text{Sujeito a:}& \\
\mathcal{R}(p, c, q, l)&
\end{aligned}
$$

2.2
Modelo Básico Linear

Uma escolha lógica para a função de *lucro* é que ela seja a diferença entre o que foi gasto pelos consumidores, pelo que foi ganho pelos produtores. Além de ser a escolha mais natural, ela ainda apresenta a característica de ser uma função linear. Isto é importante pois permite o uso de resolvedores de programação linear para encontrar soluções para instâncias do modelo.

A única regra a ser imposta nesse modelo básico, é a da limitação das compras e vendas de cada participante não poder exceder suas capacidades previamente declaradas (representadas pelos vetores p e q).

Algumas variáveis foram introduzidas ao modelo para que se pudesse expressar a função do lucro e as regras. Estas são:

x_{ij} Elemento da matriz X de dimensão $n \times m$. Representa a quantidade vendida do produtor i para o consumidor j.

γ_i Elemento do vetor γ de dimensão n. Representa o ganho total do produtor i.

ψ_j Elemento do vetor ψ de dimensão m. Representa o gasto total do consumidor j.

Com essas variáveis, o modelo pode ser escrito como se segue:

$$Max \sum_{j=1}^{m} \psi_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \tag{2-1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq p_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2-2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq q_j \qquad j = 1, \ldots, m \tag{2-3}$$

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{m} c_i x_{ij} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2-4}$$

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{n} l_j x_{ij} \qquad j = 1, \ldots, m \tag{2-5}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \quad j = 1, \ldots, m \tag{2-6}$$

A equação (2-1) é a função objetivo do modelo. Conforme dito anteriormente, ela visa maximizar o *lucro* gerado por este mercado.

A inequação (2-2) restringe as vendas de cada produtor i a sua respectiva capacidade de produção p_i, e a inequação (2-3) restringe as compras de cada consumidor j a sua capacidade de consumo q_j.

As equações (2-4) e (2-5) apenas atribuem às variáveis γ_i e ψ_j seus valores corretos. γ_i é calculado com base nos preços c_i estipulados por cada produtor i, e ψ_j é calculado com base nos preços l_j estipulados por cada consumidor j.

2.3 Extensões

Esta seção é dedicada às extensões feitas ao modelo básico. O objetivo dessas extensões é de adicionar ao modelo algumas características que existam em mercados reais. Posteriormente, será mostrado que mesmo com essas extensões, as propriedades fundamentais do modelo permanecem.

Esta seção está dividida da seguinte forma. Na seção 2.3.1 é adicionado o custo de transporte ao modelo. Na seção 2.3.2 é adicionada a economia de escala no preço oferecido pelo consumidor. Na seção 2.3.3 é apresentado o modelo para múltiplos produtos.

2.3.1 Custo de Transporte

O custo de transporte associado a mercadoria é na verdade qualquer custo associado a venda de um produto. Pode ser o custo de transportar a mercadoria, ou pode ser algum imposto sobre o produto. Considera-se neste modelo, o custo de transporte como uma função linear com a quantidade vendida.

Para adicionar o custo de transporte ao modelo, basta definir a matriz T $n \times m$, onde t_{ij} define o custo de transportar uma unidade do produto do produtor i para o consumidor j.

O custo de transporte pode ser adicionado no modelo diretamente na função objetivo.

$$Max \sum_{j=1}^{m} \psi_j - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t_{ij} x_{ij} \tag{2-7}$$

A inserção do custo de transporte muda ligeiramente as características do leilão definidas na seção 2.2[1]. Nem sempre o consumidor com maior oferta, ou o produtor com menores preços serão escolhidos. O custo do transporte, se não for desprezível frente ao preço da mercadoria, pode representar um importante diferencial na determinação de quem entra no mercado.

2.3.2 Economia de Escala

A economia de escala no consumidor permite que cada consumidor defina seus preços de acordo com faixas de quantias compradas. Essa prática é muito comum quando se compra mercadorias em grandes quantidades. Quanto maior a quantidade, menor o preço o oferecido.

Para adicionar a economia de escala, é necessário que cada consumidor j defina um vetor b^j de dimensão β_j, onde β_j é o números de *pontos de quebra*

[1] O modelo da seção 2.2 é um caso especial em que o custo de transporte é zero entre os participantes do mercado.

na função. Os β_j pontos de quebra definem $\beta_j + 1$ faixas de preço. Os preços para cada faixa são definidos nos vetores l^j.

Com isso, as restrições 2-5, que definem as quantidades gastas por cada consumidor, devem ser modificadas para suportar diferentes preços para diferentes quantias. Neste caso, uma simples linearização por partes resolve o problema para este modelo, visto que sempre se desejará o maior preço possível.

$$\psi_j \leq \sum_{i=1}^{n} l_j^a x_{ij} + \delta_j^a \qquad a = 1, \ldots, \beta_j \qquad j = 1, \ldots, m \tag{2-8}$$

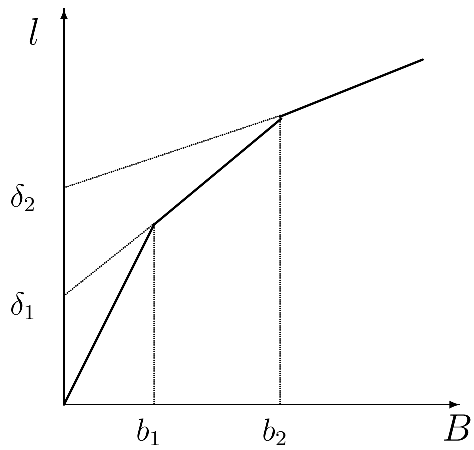

Figura 2.1: Economia de escala em 2 dimensões.

A figura 2.1 ilustra em 2 dimensões a composição de retas para expressar a função da economia de escala para um dos consumidores. Neste exemplo com dois *pontos de quebra* estabelecidos (b_1 e b_2), são estabelecidas três faixas de preço (os coeficientes l_j^1, l_j^2 e l_j^3). Os valores de δ_j^a são os coeficientes lineares destas retas e são calculados da seguinte maneira:

$$\left.\begin{array}{ll} \delta_j = 0 & j = 1 \\ \delta_j = (l_j - l_{j-1}) \displaystyle\sum_{k=1}^{i} b_k & j = 2, \ldots, m \end{array}\right\} \tag{2-9}$$

2.3.3
Múltiplos Produtos

Este modelo permite considerar um leilão com múltiplos produtos. As vantagens de ter se ter essa possibilidade são óbvias. A maior delas é a flexibilização do mercado.

Na prática, um leilão com múltiplos produtos pode ser considerado como múltiplos leilões de um produto, salvo pelas chamadas *restrições de acoplamento* que possam vir a existir no leilão. Estas são restrições que envolvam mais de um tipo de produto. Alguns exemplos deste tipo de restrição são: restrições orçamentárias para os consumidores, ou restrições de matéria prima no caso dos produtores.

Num leilão de ρ produtos, cada produtor i deverá definir um vetor p_i de dimensão ρ, contendo as k capacidades de produção. Deste modo, o vetor p que definia as capacidades, passa a ser uma matriz P, onde o elemento p_i^k é o preço do produtor i para o produto k.

Mudanças análogas devem ser feitas ao vetor de preços do produtor, as demandas e preços dos consumidores e aos custos de transporte.

A equação abaixo mostra a generalização da restrição de capacidade de produção para o modelo com múltiplos produtos:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^k \leq p_i^k \quad i = 1, \ldots, n \quad k = 1, \ldots, \rho \tag{2-10}$$

Como exemplo de restrição de acoplamento, suponha que o consumidor j tenha um limite total de gasto θ_j. Nitidamente, essa restrição irá agir sobre todos os produtos, uma vez que os gastos com certos produtos, influenciam na compra de outros.

Segue a equação desta restrição:

$$\sum_{k=1}^{\rho} \psi_j^k \leq \theta_j \quad j = 1, \ldots, m \tag{2-11}$$

2.4
Modelo Completo

Esta seção contém apenas a formulação completa do modelo, juntando todas as extensões. Segue o modelo:

$$Max \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\rho}\psi_j^k - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\rho}\gamma_i^k - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\rho} t_{ij}^k x_{ij}^k$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^k \leq p_i^k \qquad i=1,\ldots,n \quad k=1,\ldots,\rho$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^k \leq q_j^k \qquad j=1,\ldots,m \quad k=1,\ldots,\rho$$

$$\gamma_i^k = \sum_{j=1}^{m} c_i^k x_{ij}^k \qquad i=1,\ldots,n \quad k=1,\ldots,\rho$$

$$\psi_j^k \leq \sum_{i=1}^{n} l_j^{ak} x_{ij}^k + \delta_j^{ak} \qquad j=1,\ldots,m \quad k=1,\ldots,\rho \quad a=1,\ldots,\beta_j$$

$$\mathcal{A}(x,\gamma,\psi)$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \qquad i=1,\ldots,n \quad j=1,\ldots,m \quad k=1,\ldots,\rho$$

Onde, $\mathcal{A}(x,\gamma,\psi)$ representam o conjunto de restrições de acoplamento.

2.5 Exemplos

Esta seção contém dois exemplos de como o modelo efetua a compra e venda de produtos entre os participantes do leilão. É visto como produtores que oferecem seus produtos por um preço menor são priorizados na venda, bem como consumidores que ofereçam maiores preços.

EXEMPLO 1: Neste exemplo é resolvida uma instância do modelo básico, sem as extensões. Segue a entrada de dados para este modelo.

Produtores		
Id	Oferta	Lance
A	125	375
B	100	380
C	150	385
D	100	395

Tabela 2.1: Dados de Entrada dos Produtores para o EXEMPLO 1.

A Tabela 2.1 contém os dados de entrada dos produtores. As colunas determinam os parâmetros do problema e os dados de cada produtor está nas linhas. A coluna *Oferta* representa a capacidade máxima de produção e a coluna *Lance* representa o preço do produto.

Consumidores		
Id	Demanda	Lance
W	140	405
X	150	400
Y	120	385
Z	100	390

Tabela 2.2: Dados de Entrada dos Consumidores para o Exemplo 1.

A Tabela 2.2 contém os dados de entrada dos consumidores e tem organização semelhante à anterior. A coluna *Demanda* representa a capacidade máxima de consumo. A coluna *Lance* representa o preço oferecido pelo produto.

Compra e Venda				
	Consumidores			
Produtores	W	X	Y	Z
A	125	0	0	0
B	15	85	0	0
C	0	65	0	85
D	0	0	0	0

Tabela 2.3: Matriz de compras e vendas dos participantes do Exemplo 1

A Tabela 2.3 apresenta os resultados para este exemplo em forma de uma matriz de compras e vendas. Nas linhas estão as quantias vendidas pelos produtores e nas colunas as quantidades compradas pelos consumidores.

O valor da função objetivo para este problema foi de 7225. Sobre este exemplo, é importante ressaltar o princípio básico deste modelo que é o de *maximização do lucro*. Olhando para os dados de entrada, pode-se facilmente organizar uma distribuição em que aumente as vendas do mercado, porém este não é o objetivo primordial do mercado.

Este comportamento é um dos fatores que estimula produtores a cobrarem menos e consumidores a pagarem mais. Pois com este comportamento, eles estarão aumentando suas respectivas chances de participar do mercado.

Exemplo 2: Neste exemplo é resolvida uma instância do modelo com todas as suas extensões. Segue a entrada de dados para este modelo.

A Tabela 2.4 contém os dados de entrada para os produtores. Esta tabela segue o padrão do exemplo anterior, porém com dois produtos no mercado.

Produtores				
	Produto 1		Produto 2	
Id	Oferta	Lance	Oferta	Lance
A	125	40	500	100
B	100	42	400	98
C	150	41	420	103

Tabela 2.4: Dados de Entrada dos Produtores para o EXEMPLO 2.

Consumidores									
	Produto 1		Produto 2						
Id	Demanda	Lance	Demanda	Faixas de Preço			Lance		
Y	160	45	600	50	100	500	121	115	105
Z	150	42	700	100	700	-	120	105	-

Tabela 2.5: Dados de Entrada dos Consumidores para o EXEMPLO 2.

A Tabela 2.5 contém os dados de entrada dos consumidores. Além da mudança de conter 2 produtos, para o produto 2 os consumidores utilizam economia de escala nos preços. Com isso, são definidas as faixas de preço e os preços correspondentes para essas faixas. Por exemplo, o consumidor **Y** compra os primeiros 50 produtos a 121, pelos 100 seguintes ele paga 115 e para o restante paga 105.

Coeficientes de Transporte					
Produto 1			Produto 2		
	Consumidores			Consumidores	
Produtores	X	Y	Produtores	X	Y
A	5	6	A	2	2
B	9	3	B	3	1
C	8	10	C	1	1

Tabela 2.6: Matriz de custos de transporte entre produtores e consumidores.

A Tabela 2.6 apresenta as matrizes dos custos de transporte. As linhas contêm os dados por produtor e nas colunas estão os dados por consumidor. Uma entrada (i, j) é o custo unitário de transporte do produtor i para o consumidor j.

A Tabela 2.7 mostra os resultados desse jogo. A organização desta tabela é semelhante a do jogo anterior, porém com informação para dois produtos. O valor da função objetivo é de 9860. O modelo se comporta exatamente como dois modelos dissociados, um para cada produto. O valor da função objetivo para o problema com apenas o produto 1 é de 2260, e apenas com o produto 2 é de 7600 (totalizando os 9860).

Compra e Venda					
Produto 1			Produto 2		
	Consumidores			Consumidores	
Produtores	X	Y	Produtores	X	Y
A	75	50	A	200	300
B	0	100	B	0	400
C	85	0	C	400	0

Tabela 2.7: Matriz de compra e venda entre os participantes do Exemplo 2.

Além disso, é possível ver que o custo de transporte pode ter grande influência no mercado, dependendo de sua relevância em relação ao preço da mercadoria e da diferença entre os pares (*produtor*, *consumidor*). Por exemplo, o produtor **C** mesmo oferecendo preço menor em relação a **B** não conseguiu vender seu total, pois suas altas taxas de transporte o prejudicaram.

As análises feitas nesses exemplos são superficiais e servem apenas para apresentar instâncias do modelo e suas soluções. Análises mais aprofundadas são feitas mais a frente, nos capítulos 4 e 5, quando é apresentada também a divisão do lucro para o modelo básico e suas extensões.