3
Breve Introdução à Teoria dos Jogos

Teoria dos Jogos é uma ferramenta matemática criada para melhor entender ou interpretar a maneira com que agentes que tomam decisões interagem entre si. Pense num *jogo* como uma cenário onde os *jogadores* interagem. Esses jogadores têm um conjunto de *decisões* (ou *ações*) passíveis de serem tomadas. As tomada de decisão é baseada nas preferências de cada jogador e na sua expectativa sobre as ações dos outros jogadores. É justamente nessa dinâmica que a Teoria dos Jogos foca seu estudo.

Dentre as diversas classificações existentes para jogos, neste capítulo são focadas brevemente duas: Jogos *Cooperativos* e *Não-Cooperativos*. A diferença entre estes dois tipos de jogo está no enfoque sobre o jogador. Em jogos não-cooperativos, o conjunto de ações possíveis está associado a jogadores *individuais*. Em jogos cooperativos, o conjunto de ações possíveis está associado a grupos de jogadores (ou *coalizões*).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na seção 3.1 é feita uma introdução ao conceito de jogos não-cooperativos, com definições dos conceitos mais importantes e alguns exemplos simples. Na seção 3.2 é introduzida a classe de jogos cooperativos.

3.1
Jogos Não-Cooperativos

Nesta seção é feita uma breve introdução sobre Jogos Não-Cooperativos. Esta classe de jogos está dividida em 2 tipos:

– Jogos Estratégicos: modela situações em que os jogadores escolhem seu plano de ação apenas uma vez, e as decisões são tomadas simultaneamente (isto é, quando um jogador escolhe seu plano de ação ele não é informado sobre os planos dos outros).

– Jogos Extensivos: modela situações em que ocorrem uma seqüência de eventos e os jogadores tem que tomar as decisões não só no início, mas durante o jogo, em qualquer momento que for requerido uma ação.

Vale ressaltar que a teoria dos jogos considera o fato de os jogadores serem *racionais*. Um jogador é tido como racional baseado na maneira como ele toma suas decisões. Ele está ciente de suas possíveis ações, forma expectativas sobre as indefinições do problema, tem suas preferências bem claras e toma sua decisão após algum processo de *otimização*. Isto é, dentro de suas possibilidades e expectativas sobre o cenário, ele tomará a decisão que ele julgue que mais o beneficiará.

3.1.1 Jogos Estratégicos

Nesta seção considera-se somente os jogos estratégicos, pois os conceitos introduzidos neles são mais simples e, ao mesmo tempo, suficientes para ilustrar a idéia.

Definição 3.1 (Jogos Estratégicos) *Um jogo estratégico consiste de:*

– *um conjunto finito N (o conjunto de jogadores).*

– *para cada jogador $i \in N$ um conjunto não vazio A_i (o conjunto de ações possíveis para o jogador i).*

– *para cada jogador $i \in N$ uma relação de preferência $\succeq_i$ sobre o conjunto A.*

Desta forma, um jogo estratégico pode ser visto como um modelo de um evento que só ocorre uma vez. Cada jogador sabe os detalhes do jogo e o fato dos outros jogadores serem *racionais*. As decisões são tomadas de forma independente e simultânea[1]. Sob esse ponto de vista, um jogador não está ciente das decisões dos outros ao tomar a sua decisão. No máximo, ele pode formar expectativas baseadas nas informações gerais do jogo.

[1]Quando se diz simultânea, não quer dizer necessariamente que eles tomem a decisão exatamente ao mesmo tempo. Os jogadores podem ter, por exemplo, um prazo para submeter sua decisão.

3.1.2 Equilíbrio de Nash

O conceito do **Equilíbrio de Nash** é um dos mais conhecidos e usados para analisar soluções em jogos. Essa noção captura um *estado estacionário* para o jogo estratégico, onde cada jogador tem a expectativa correta sobre o comportamento dos outros jogadores, e age racionalmente.

Definição 3.2 (Equilíbrio de Nash) *Dado um jogo estratégico* $\langle N, (A_i), (\succeq_i)\rangle$, *o equilíbrio de Nash é a escolha* $a^* \in A$, *com a seguinte propriedade:*

$$(a^*_{-i}, a^*_i) \succeq (a^*_{-i}, a_i) \qquad \forall a_i \in A_i \text{ e } \forall i \in N.$$

Então, para que a^* seja um equilíbrio de Nash, não pode haver um jogador i que faça uma escolha diferente de a^*_i e obtenha um resultado melhor do que se escolhesse a^*_i, considerando que os demais jogadores j escolheram a^*_j. Em suma, nenhum jogador pode obter um ganho maior desviando dessa solução, dadas as ações dos outros jogadores.

Mais detalhes sobre Teoria dos Jogos podem ser vistos em livros sobre o assunto como o de Osborne e Rubinstein [4] ou o do Curiel [5].

3.1.3 Exemplos

Nessa seção são apresentados alguns exemplos clássicos de jogos estratégicos. São exemplos bem simples, com dois jogadores e duas ações, onde serão analisados os equilíbrios de Nash em diferentes situações.

1. *Batalha dos Sexos*: Este jogo consiste de dois jogadores, um homem **H** e uma mulher **M** que combinaram de saírem juntos. O principal interesse deles é de se encontrar no mesmo lugar, mas o homem prefere ir ao lugar **A**, enquanto a mulher gostaria que eles fossem em **B**.

   A Tabela 3.1 representa as preferências dos jogadores através de uma *função custo benefício*. Nesta tabela, as linhas representam as ações possíveis para o jogador 1 (**H**, no caso) e as colunas são as ações do jogador 2 (**M**). Uma entrada (A_1, A_2) na tabela contém 2 números (w_1, w_2), onde cada um é a atribuição de valor de cada jogador dadas as ações A_1 e A_2 tomadas.

Este exemplo modela uma situação onde os jogadores querem chegar num consenso, mas têm interesses conflitantes. O jogo tem 2 equilíbrios de Nash: (A, A) e (B, B). Isto é, quando os dois escolhem o mesmo lugar para sair.

2. *Dilema do Prisioneiro*: Dois suspeitos de um crime são postos em celas separadas para serem interrogados. Se ambos confessarem o crime, cada um será sentenciado a 3 anos de prisão. Se apenas um deles confessar, ele será liberado e usado de testemunha contra o outro, que receberá uma punição de 4 anos. Se nenhum deles confessar, cada um pega uma sentença mais leve, de 1 ano. A Tabela 3.2 apresenta este jogo:

   Neste jogo, um comportamento interessante pode ser notado. Se os prisioneiros cooperarem entre si, isto é, nenhum deles confessar, o ganho conjunto é o melhor de todos (a soma das penas dá 2 anos). Porém, o equilíbrio aponta para o outro lado. Se cada um agir em causa própria, qualquer que seja a ação do outro, a melhor alternativa é confessar. Portanto, o equilíbrio de Nash neste caso é ambos confessarem o crime.

3. *Par ou Ímpar*: Dois jogadores estão jogando "par ou ímpar". O jogador que perder terá que pagar ao outro um real. No jogo, cada jogador pode optar por colocar um número par ou ímpar. O jogador que escolhe par ganha quando os números forem 2 pares ou 2 ímpares. O outro ganha quando os números forem um par e um ímpar. Cada jogador só se preocupa com a quantidade de dinheiro que está ganhando. O jogo é mostrado na Tabela 3.3.

   Jogos deste tipo, onde os interesses dos jogadores são totalmente opostos, são chamados de *estritamente competitivos*. Tais jogos não possuem equilíbrio de Nash.

	A	B
A	$2, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 2$

Tabela 3.1: Exemplo 1 - Batalha dos Sexos

	Confessar	Não Confessar
Confessar	$3, 3$	$0, 4$
Não Confessar	$4, 0$	$1, 1$

Tabela 3.2: Exemplo 2 - Dilema do prisioneiro

3.2 Jogos Cooperativos

O conceito de Jogos Cooperativos se deve em grande parte ao trabalho de von Neumann e Morgenstern, em 1944 [6].

A melhor maneira de introduzir este conceito é dando um exemplo de como este problema pode ocorrer em situações corriqueiras.

Suponha um cenário onde 4 empresas: A, B, C e D resolvem unir seu capital e força de trabalho para um investimento conjunto. De acordo com suas estimativas, eles conseguirão um lucro de 100 unidades. Ocorre então, o problema de se dividir esse lucro entre os participantes da sociedade. Uma primeira abordagem, que parece justa é dividir o lucro igualmente entre os quatro participantes, 25 unidades para cada um.

Porém, os participantes A e B descobrem que se eles se unirem conseguiriam arrecadar 55, mais do que os 50 que os dois conseguiriam se estiverem na sociedade com C e D. Por outro lado, C e D analisam o mercado e descobrem que juntos eles só conseguiriam lucro de 30 unidades. Sendo, dessa maneira, vantajoso para eles manterem A e B na sociedade. Desta forma, eles se vêm obrigados a abrir mão de seu lucro inicial e ceder para A e B 56 unidades, ficando com 44 para eles.

Em outra análise, descobre-se que A, B e D juntos conseguiriam 80 unidades. Mais do que os 78[2] da divisão anterior. E o participante C analisa sua situação e vê que sozinho, ele não conseguiria lucro algum. C, então, se propõe a ficar com 19 unidades e ceder as 81 restantes a A, B e D.

E as alianças não parariam por aí, ainda restariam muitas coalizões a serem avaliadas e, sem avaliar a dinâmica dessas alianças de uma maneira organizada, a complicação para dividir esses lucros seria muito grande.

A Teoria de Jogos Cooperativos apresenta maneiras sistemáticas de avaliar a situação e chegar a soluções ótimas (ou comprovar que não há solução ótima).

Nesta dissertação, o enfoque escolhido para analisar o mercado apresentado no capítulo anterior foi o de jogos cooperativos, por alguns conceitos

[2] Divisão anterior com A e B = 56 + C = 22.

	Par	Ímpar
Par	$1, -1$	$-1, 1$
Ímpar	$-1, 1$	$1, -1$

Tabela 3.3: Exemplo 3 - Par ou Ímpar

sobre a *solução* do jogo (especialmente o conceito de *núcleo*) que são apresentados posteriormente neste capítulo.

3.2.1
Notações e Definições

Nesta seção um jogo será formalizado matematicamente. Em seguida, são apresentados alguns conceitos importantes sobre os jogos.

Definição 3.3 (Jogo Cooperativo) *É definido por um par $< N, v >$, onde N é o conjunto finito de jogares e v é a função característica, ou função de valoração, definida sobre 2^N [3] com valores em $\mathbb{R}$ e onde $v(\emptyset) = 0$.*

Um subconjunto S de N é chamado de coalizão. O número $v(S)$ é a valoração da coalizão S. O vetor de pagamentos $x \in \mathbb{R}^n$ representa uma divisão do lucro de $v(N)$. x_i é o lucro atribuído ao jogador $i \in N$. O valor de $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$.

Para ilustrar melhor, no exemplo da seção anterior, o conjunto $N = \{A, B, C, D\}$ e valores da função v foram citados para alguns casos, por exemplo:

$v(\{A, B, C, D\}) = 100$, $v(\{A, B\}) = 55$, $v(\{C, D\}) = 30$, etc.

Para o vetor de pagamentos inicialmente foi considerado:

$x = \{25, 25, 25, 25\}$, depois tentou-se $x = \{28, 28, 22, 22\}$, etc.

Jogos Cooperativos contém uma série de definições e conceitos para classificação dos jogos, dependendo das características da função de valoração v. O conceito mais importante para o enfoque dessa dissertação é o conceito do *núcleo* do jogo $C(v)$.

Como visto no exemplo da introdução, quando os participantes do jogo decidiram se juntar para cooperar em um certo negócio, o problema que apareceu foi de como dividir o lucro. Se um ou mais jogadores perceberem que uma certa divisão proposta lhes é desvantajosa, eles podem decidir deixar a colisão.

Definição 3.4 (Núcleo do Jogo) *É um conjunto de soluções (isto é, divisões do lucro), onde nunca é vantajoso para quaisquer participantes do conjunto sair do grupo e formar coalizões próprias. Formalizando:*

$$C(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(N) = v(N), x(S) \geq v(S) \quad \forall S \in 2^N\} \qquad (3\text{-}1)$$

[3] 2^N é conjunto de todos os subconjuntos de N.

Então, dada esta classe de soluções do núcleo, que contém esta propriedade especial, as soluções encontradas para o mercado procurarão ter essa característica[4].

[4] Se for possível, já que o *núcleo* pode ser vazio.