4
Distribuição do Lucro

Conforme dito na Introdução, o principal atrativo deste modelo está em recompensar produtores que ofereçam seus produtos por um preço mais baixo, e consumidores que paguem mais. Esta compensação é feita através da distribuição do montante gerado pelo *lucro* do sistema (eq. 2-1).

Neste capítulo é apresentado como é feita essa distribuição. É mostrado que a distribuição pode ser feita de maneira a não só cumprir com os objetivos primordiais do mercado, mas também ter a propriedade de ser vantajosa para todos os participantes do mercado.

Em outras palavras, enxergando este mercado como um jogo cooperativo, espera-se que a solução desse jogo (isto é, a distribuição do lucro gerada pelo sistema) pertença ao *núcleo*.

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.1 é mostrado o jogo cooperativo criado a partir do modelo básico. Na seção 4.2 é apresentada a distribuição do lucro para este modelo, em particular é mostrado como se chega em uma solução que pertença ao *núcleo* do jogo. Na seção 4.3 é feita uma análise da distribuição proposta a partir de exemplos. E na seção 4.4 é chegada a solução de *núcleo* de uma outra maneira, sendo possível chegar a algumas conclusões sobre a forma desta solução.

4.1
Jogo Associado ao Modelo

O modelo apresentado no capítulo 2, pode ser representado como um jogo competitivo. Nesta seção são mostrados os diferentes tipos de jogos que podem ser derivados do modelo básico.

Para definir um jogo, conforme visto na seção 3.2.1, é necessário um conjunto de jogadores N e uma função de valoração v que atribui um valor para cada coalizão formada.

Pode-se definir o jogo da seguinte forma:

– Conjunto N de jogadores formado pela união do conjunto P de produtores e o conjunto Q de consumidores.
– Função de valoração v é o *lucro* de cada coalizão $S \subset N$. O *lucro* é justamente o valor maximizado na função objetivo do modelo (eq 2-1). Naturalmente, v será igual a 0 quando não houver nenhum produtor ou nenhum consumidor na coalizão formada.

O modelo apresentado na seção 2.2 pode ser reapresentado com pequenas mudanças para se adequar à formulação de jogo competitivo.

$$\mathcal{L}(S): \; Max \sum_{j \in Q_S} \psi_j - \sum_{i \in P_S} \gamma_i \tag{4-1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in Q_S} x_{ij} \leq p_i \qquad i \in P_S \tag{4-2}$$

$$\sum_{i \in P_S} x_{ij} \leq q_j \qquad j \in Q_S \tag{4-3}$$

$$\gamma_i = \sum_{j \in Q_S} c_i x_{ij} \qquad i \in P_S \tag{4-4}$$

$$\psi_j = \sum_{i \in P_S} l_j x_{ij} \qquad j \in Q_S \tag{4-5}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i \in P_S \qquad j \in Q_S \tag{4-6}$$

A função objetivo é denominada por $\mathcal{L}(S)$, que é o lucro do sistema para uma dada coalizão $S \subset N$.

Os conjuntos P_S e Q_S são equivalentes a $P \cap S$ e $Q \cap S$ respectivamente.

Existem outras possibilidades de jogo, que não são tratadas neste trabalho, mas vale a pena serem mencionadas.

Pode-se que considerar apenas os consumidores compõem o conjunto de jogadores. Este jogo seria adequado para modelar situações onde existe apenas um vendedor com seus produtos e uma quantidade arbitrária de compradores (situação mais usual em leilões).

O contrário também é válido, isto é, o conjunto de jogadores ser formado apenas pelos produtores. Isto ocorre por exemplo no comércio de energia elétrica, onde os consumidores formam uma única demanda de energia e os fornecedores competem pela venda de energia nas faixas de horários.

Na seção 2.3, onde são apresentadas as extensões do modelo, foi visto um modelo de jogo com custos de transporte. Se houver mais de um agente transportador, pode-se adicionar ao conjunto de jogadores os agentes de transporte.

4.2
A Distribuição do Lucro

Nesta seção é proposta uma maneira de realizar a distribuição do *lucro* do sistema. Essa distribuição, como já foi dito, deve pertencer ao núcleo e cumprir com os objetivos primordiais do mercado. O foco desta seção é descrever uma maneira sistemática de se chegar à uma solução de núcleo para o jogo, se ele a tiver.

Para se chegar a esta maneira sistemática será necessário apresentar o *problema dual* associado ao jogo. Através da solução do problema dual será deduzida uma solução de núcleo.

Na seção 4.2.1 é mostrado o problema dual. Na seção 4.2.2 é proposta a divisão do *lucro* associada ao dual e é provado que esta solução pertence ao núcleo do jogo.

4.2.1
Problema Dual

Dualidade se refere a pares de problemas e seus relacionamentos. Um exemplo de problemas duais pode ser observado ao se considerar um círculo no plano e um ponto no seu exterior. O problema *primal* seria o de encontrar o ponto no interior do círculo que minimiza a distância para o ponto no exterior. O problema *dual* poderia ser o de encontrar a reta que passa em um ponto dado e o círculo que maximiza sua distância ao ponto. No caso destes problemas, dois relacionamentos desejáveis entre problemas duais estão presentes:

I qualquer ponto no interior do círculo está a uma distância superior ou igual à distância de qualquer reta que passa entre o ponto exterior e o círculo.

II a distância do ponto no interior do círculo mais próximo do ponto exterior é igual à distância da reta (que passa entre o ponto e o círculo) mais distante do ponto exterior.

Os relacionamentos **I** e **II** são conhecidos respectivamente como *Dualidade Fraca* e *Dualidade Forte*. Problemas duais onde ambos relacionamentos estão presentes, trazem muita informação um do outro e são os mais procurados. Entretanto, pares de problemas duais onde somente **I** é respeitado, também são comumente utilizados.

Nesta dissertação, o problema primal, introduzido na seção 2.2, é um programa linear, o que permite encontrar um problema dual onde **I** e **II** estão presentes. A importância do problema dual é que muitas vezes ele provê outras interpretações para o problema.

Mais detalhes podem ser encontrados em livros de programação linear, como Chvatal [7], e Luenberger [8].

O problema dual associado ao modelo é:

$$\mathcal{D}(S): \; Min \sum_{i \in P_S} p_i u_i + \sum_{j \in Q_S} q_j v_j \tag{4-7}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} u_i + v_j + c_i w_i - l_j t_j &\geq 0 \qquad i \in P_S \qquad j \in Q_S \qquad (4\text{-}8) \\ u_i &\geq 0 \qquad i \in P_S \\ v_j &\geq 0 \qquad j \in Q_S \\ w_i &\geq 1 \qquad i \in P_S \\ t_j &\geq 1 \qquad j \in Q_S \end{aligned}$$

Segue o significado das variáveis do modelo:

$\mathcal{D}(S)$ Função objetivo do modelo dual.

u_i Variável dual associada à i-ésima restrição de capacidade de produção (eq. 2-2).

v_j Variável dual associada à j-ésima restrição da capacidade de consumo (eq. 2-3).

w_i Variável dual associada à i-ésima restrição de ganho do produtor (eq. 2-4).

t_j Variável dual associada à j-ésima restrição de gasto do consumidor (eq. 2-5).

A equação 4-7 é a função objetivo do problema. Nota-se que nela, apenas estão presentes as variáveis duais associadas as restrições das capacidades de produção e consumo (eq. 2-2 e 2-3).

As inequações 4-8 representam as $m \cdot n$ restrições do problema. As demais inequações são as restrições de cada variável.

4.2.2
Distribuição Associada ao Dual

Como foi dito no Capítulo 2, a compensação dada a produtores e consumidores é feita em cima do *lucro* gerado pelo sistema, que é representado pela função objetivo (eq. 2-1).

Pelo **Teorema da Dualidade Forte** [9] (p.146-155), sabe-se que se um dado problema de programação linear tem solução ótima, seu problema dual também a tem, e os valores de suas funções objetivo são iguais.

Portanto, a distribuição do lucro pode ser pensada pela função objetivo do problema dual (eq. 4-7).

Analisando essa equação, percebe-se que ela nitidamente divide-se em duas contribuições distintas e positivas: uma dos produtores ($\sum_{i=1}^{n} u_i p_i$) e uma dos consumidores ($\sum_{j=1}^{m} v_j q_j$). Na verdade, pode-se perceber a contribuição individual de cada produtor ($u_i \cdot p_i$) e consumidor ($v_j \cdot q_j$).

Deseja-se então provar que esta distribuição do *lucro* associada às variáveis da formulação dual do jogo, é uma distribuição que pertence ao *núcleo* do jogo.

Teorema 4.1 *Sejam (P, Q, p, q, c, l) os parâmetros do modelo e $\mathcal{V}$ a função característica que define o jogo. Seja (u^*, v^*, w^*, t^*) a solução ótima para o problema dual $\mathcal{D}(N)$.*

Então, $(u_1^* p_1, \ldots, u_n^* p_n; v_i^* q_1, \ldots, v_m^* q_m)$ pertence ao núcleo do jogo $C(\mathcal{V})$.

Prova: *Pelo* ***Teorema da Dualidade*** *sabe-se que, na otimalidade, para todo $S \in N$ tal que $P \cap S$ e $Q \cap S$ sejam não-vazios.*

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\mathcal{L}(S)) = \mathcal{V}(\mathcal{D}(S))$$

Para uma solução pertencer ao núcleo *do jogo, a solução $(u_1^* p_1, \ldots, u_n^* p_n;\ v_i^* q_1, \ldots, v_m^* q_m)$ tem que ser maior ou igual a $\mathcal{V}(S)$, $\forall S \subset N$.*

Primeiramente, deve-se observar que a solução (u^*, v^*, w^*, t^*) é uma solução factível para qualquer problema $\mathcal{D}(S)$, $S \subset N$. Isto ocorre porque as restrições do problema são independentes entre si. Desta forma, qualquer produtor ou consumidor que saia do problema não invalida uma solução.[1]

[1]Naturalmente, a solução pode não ser mais ótima, mas permanece válida.

Ainda, deve-se perceber que, sendo a função objetivo do problema dual (eq. 4-7), uma função de minimização, qualquer solução válida é maior ou igual à solução ótima do problema. Em outras palavras:

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\mathcal{D}(S)) \leq \sum_{i \in S_P} u_i^* p_i + \sum_{j \in S_Q} v_j^* q_j$$

Finalmente, para o caso de $P \cap S = \emptyset$ ou $Q \cap S = \emptyset$, então $\mathcal{V}(S) = 0$ e o teorema é valido trivialmente. □

4.3 Análise de Resultados

Nesta seção são mostrados alguns testes variando os parâmetros do modelo e são feitas algumas análises sobre cada teste. Esses testes são importantes para mostrar padrões de comportamento do modelo.

Vale ressaltar que foram realizados inúmeros casos de teste semelhantes a estes para que fosse possível chegar às conclusões aqui mostradas. Os testes mostrados aqui, são os exemplos considerados mais ilustrativos.

Seguem algumas definições, que são usadas posteriormente nas análises dos resultados:

Definição 4.2 (Conjunto de Produtores Úteis U_p) *São os produtores que participam do leilão, isto é, que vendem uma ou mais unidades de seus produtos.*

Ordenando os produtores em ordem crescente de preço e os consumidores em ordem decrescente de preço, a condição para o i-ésimo produtor participar do leilão é:

Seja, Ω a soma das quantidades oferecidas por cada produtor até o anterior ao i-ésimo $\left(\sum_{k=1}^{i-1} p_k\right)$. Seja C_j o consumidor que esteja na faixa de preço Ω $\left(\sum_{k=1}^{j-1} q_j \leq \Omega \leq \sum_{k=1}^{j} q_j\right)$, se o preço cobrado pelo produtor i (c_i) for menor que a oferta do consumidor j (l_j), então o produtor i pertence ao conjunto de produtores úteis.

$$U_p = \left\{ P_i \mid c_i < l_j \text{ onde, } \Omega = \sum_{k=1}^{i-1} p_i \text{ e } \sum_{k=1}^{j-1} q_j \leq \Omega \leq \sum_{k=1}^{j} q_j \right\}$$

Definição 4.3 (Conjunto de Consumidores Úteis U_c) *São os consumidores que participam do leilão, isto é, que compram uma ou mais unidades de algum produto.*

A condição para um dado consumidor j pertencer ao conjunto é análoga a dos produtores. O conjunto U_c pode ser expresso da seguinte forma:

$$U_c = \left\{ C_j \mid l_j > c_i \text{ onde, } \Omega = \sum_{k=1}^{j-1} q_j \text{ e } \sum_{k=1}^{i-1} p_i \leq \Omega \leq \sum_{k=1}^{i} p_i \right\}$$

E são definidas algumas funções sobre esses conjuntos:

- $cap(U)$: a soma das capacidades (de produção ou consumo) dos integrantes do conjunto.
- $minP(U)$: o menor dos preços dos integrantes do conjunto.
- $maxP(U)$: o maior dos preços dos integrantes do conjunto.

4.3.1 Variação do Preço do Produtor

No teste desta seção todos os parâmetros de todos os jogadores estarão fixos, exceto pelo preço de um dos produtores.

Produtor			Consumidor		
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Lance
A	150	370	W	120	510
B	120	380	X	100	505
C	100	395	Y	130	490
D	110	450	Z	150	480

Tabela 4.1: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

As Tabelas 4.1 representam os parâmetros dos produtores (à esquerda) e consumidores (à direita). Para os produtores, a primeira coluna é o identificador, a segunda representa a quantidade que será oferecida no mercado e a terceira é o preço por unidade proposto. Para os consumidores, a primeira coluna é o identificador, a segunda é a demanda e a terceira é o preço oferecido por unidade de produto.

Nos testes foi variado o preço do Produtor **A**. Foram feitas 10 rodadas acrescendo em cada uma 10 unidades ao preço do produtor **A**. As Tabelas 4.2 e 4.3 apresentam os resultados dos modelos para este teste.

A Tabela 4.2 apresenta os resultados do teste para cada produtor. A primeira coluna representa a rodada do teste; a segunda, as quantidades vendidas por cada produtor; a terceira, os preços cobrados pela mercadoria

Rodada	Qt. Vendidas				Preços Cobrados				Preços Finais
#	A	B	C	D	A	B	C	D	A, B, C, D
1	150	120	100	110	370	380	395	450	480
2	150	120	100	110	380	380	395	450	480
3	150	120	100	110	390	380	395	450	480
4	150	120	100	110	400	380	395	450	480
5	150	120	100	110	410	380	395	450	480
6	150	120	100	110	420	380	395	450	480
7	150	120	100	110	430	380	395	450	480
8	150	120	100	110	440	380	395	450	480
9	150	120	100	110	450	380	395	450	480
10	150	120	100	110	460	380	395	450	480

Tabela 4.2: Resultados para os produtores no teste 4.3.1.

(os lances dos produtores); a quarta coluna é o preço a que a mercadoria foi vendida.

Este preço é calculado somando o total ganho com as vendas, com o total ganho pela redistribuição do lucro do sistema, dividido pelo total vendido, ou seja:

$$p_f = \frac{c_i \sum_j x_{ij} + u_i p_i}{\sum_j x_{ij}} \tag{4-9}$$

Pode-se perceber que se o total vendido for igual a capacidade de produção ($\sum_j x_{ij} = p_i$), o preço final por unidade passa a ser $c_i + u_i$. Este raciocínio acaba por sugerir um significado à variável dual u_i: ela é a quantidade do lucro recebida por unidade de produto comercializada.

Por outro lado, se a quantidade vendida não for igual a capacidade de produção, significa que a restrição 4-2 terá folga, portanto sua variável dual valerá zero. Neste caso, este produtor não receberia nada do lucro do sistema e o preço final seria o próprio c_i. Esta discussão será retomada nos próximos exemplos e na próxima seção.

No caso deste teste, todos os produtores venderam todo o seu estoque, e suas variáveis duais tiveram valores não nulos. Isto pode ser visto pela diferença entre o preço cobrado inicialmente, e o preço final.

Na Tabela 4.3, são mostrados os resultados do teste para consumidores. A primeira coluna é a rodada do teste; a segunda são as quantidades compradas por cada consumidor; a terceira são os preços oferecidos e a quarta coluna é o preço final de compra dos consumidores.

O preço final dos consumidores é calculado diminuindo o total gasto pelo total recebido da parcela do lucro, divido pelo total de produtos

Rodada	Qt. Compradas				Preços Oferecidos				Preços Finais
#	W	X	Y	Z	W	X	Y	Z	W, X, Y, Z
1	120	100	130	130	510	505	490	480	480
2	120	100	130	130	510	505	490	480	480
3	120	100	130	130	510	505	490	480	480
4	120	100	130	130	510	505	490	480	480
5	120	100	130	130	510	505	490	480	480
6	120	100	130	130	510	505	490	480	480
7	120	100	130	130	510	505	490	480	480
8	120	100	130	130	510	505	490	480	480
9	120	100	130	130	510	505	490	480	480
10	120	100	130	130	510	505	490	480	480

Tabela 4.3: Resultados para os consumidores no teste 4.3.1.

comprados, ou seja:

$$p_f = \frac{l_j \sum_i x_{ij} - v_j q_j}{\sum_i x_{ij}} \tag{4-10}$$

Um raciocínio análogo ao feito nos produtores pode ser empregado neste caso. As variáveis duais v_j podem ser encaradas como a quantia recebida por produto comprado.

É interessante notar que neste caso o consumidor **Z** não comprou o total demandado, portanto a restrição tinha folga e a variável dual era nula. De fato, o consumidor **Z** não recebeu qualquer parcela do lucro, pois o preço final é igual ao preço oferecido no lance.

Na Figura 4.1, as retas horizontais são os Lances dos produtores **B**, **C**, **D** e o preço final (reta mais em cima). A reta inclinada representa o lance do produtor **A**, o único a variar ao longo das rodadas.

Numa análise final deste exemplo, pode-se reparar que o mercado não alterou seu comportamento, apesar da variação de preço por parte de um dos produtores, como é mostrado na Figura 4.1. Essa variação, propositadamente, não ultrapassou o preço da menor oferta dos consumidores.

Este exemplo simples tem a utilidade de mostrar um aspecto do comportamento deste mercado. Pode-se perceber que a distribuição do lucro levou o mercado para o rumo de fixar um preço final para a mercadoria e de todos os participantes comprarem (ou venderem) por este preço. O fato do preço final ter sido igual para todos não é por acaso e ao longo dos próximos exemplos este comportamento será mais comentado.

Sendo assim, os objetivos iniciais do mercado, pelo menos para este exemplo, foram cumpridos. Tanto os produtores que cobraram menos,

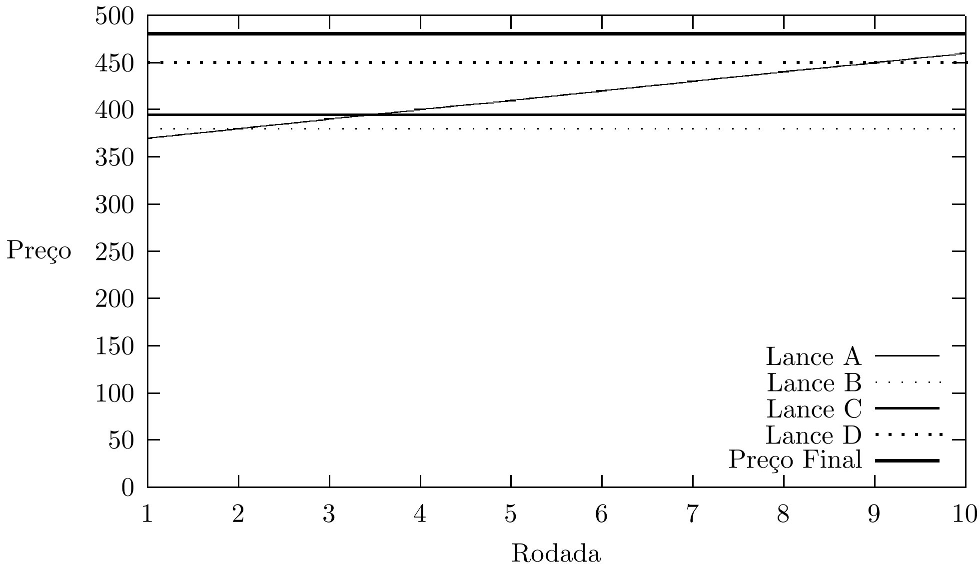

Figura 4.1: Preço Final e Lances dos Produtores

quanto os consumidores que ofereceram mais, receberam uma compensação maior por suas melhores ofertas. Apesar do preço final ter sido o mesmo, a vantagem de se oferecer mais ou cobrar menos é de que o participante aumenta suas chances de participar do mercado, dando um lance *melhor*.

4.3.2 Variação da Quantidade Ofertada pelo Produtor

Nesta seção será observado como o mercado se comporta frente a variação das quantidades ofertadas pelos produtores. Os parâmetros de todos os jogadores estarão fixados, exceto pela quantidade ofertada por um dos produtores.

Produtor			Consumidor		
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Lance
A	60	420	W	70	513
B	100	427	X	50	512
C	60	435	Y	60	497
			Z	50	478

Tabela 4.4: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

A Tabela 4.4 representa os parâmetros iniciais do teste. A organização da tabela é idêntica a do teste anterior. Neste teste o único parâmetro variado é a quantidade ofertada pelo produtor **A**, que aumenta em 10 unidades em cada rodada do teste.

Rodada	Quant. Ofertadas			Quant. Vendidas			Preços Finais	
#	A	B	C	A	B	C	A, B	C
1	60	100	60	60	100	60	478	478
2	70	100	60	70	100	60	478	478
3	80	100	60	80	100	50	435	435
4	90	100	60	90	100	40	435	435
5	100	100	60	100	100	30	435	435
6	110	100	60	110	100	20	435	435
7	120	100	60	120	100	10	435	435
8	130	100	60	130	100	0	435	-
9	140	100	60	140	90	0	427	-
10	150	100	60	150	80	0	427	-

Tabela 4.5: Resultados para os produtores no teste 4.3.2.

A Tabela 4.5 apresenta os resultados desta rodada de testes para os produtores. A segunda coluna desta tabela agora mostra as quantidades ofertadas, ao invés de mostrar os preços, já que estes estão fixos neste teste. A terceira coluna mostra as quantidades vendidas e a quarta, os preços finais.

A medida em que o produtor **A** foi aumentando sua oferta para o mercado, ele começou tirar o espaço dos outros produtores, uma vez que ele é o que oferece os melhores preços. Na oitava rodada o produtor **C** já estava fora do mercado e a partir da nona, o produtor **B** começou a perder comprador.

Além disso, o preço final permaneceu o mesmo para todos os produtores (que participaram do mercado). Porém, o preço não permaneceu fixo, como no exemplo anterior. Este fato é analisado mais a frente.

Rodada	Quant. Demandas				Quant. Compradas				Preços Finais
#	W	X	Y	Z	W	X	Y	X	W, X, Y, Z
1	70	50	60	50	70	50	60	40	478
2	70	50	60	50	70	50	60	50	478
3	70	50	60	50	70	50	60	50	435
4	70	50	60	50	70	50	60	50	435
5	70	50	60	50	70	50	60	50	435
6	70	50	60	50	70	50	60	50	435
7	70	50	60	50	70	50	60	50	435
8	70	50	60	50	70	50	60	50	435
9	70	50	60	50	70	50	60	50	427
10	70	50	60	50	70	50	60	50	427

Tabela 4.6: Resultados para os consumidores no teste 4.3.2.

A Tabela 4.6 segue mais ou menos o mesmo padrão da tabela do exemplo anterior, mudando apenas a coluna de Preços Oferecidos pela de Quantidades Demandadas.

Para esta tabela, vale reparar nas Quantidades Compradas pelo consumidor **Z**, que na primeira rodada não comprava a sua demanda total (40 de 50) e nas rodadas seguintes passou a supri-la totalmente. Também vale reparar que a tendência observada no primeiro teste, de estipular um preço final para todos os participantes, foi seguida a risca aqui.

Resta agora, entender o comportamento do preço final, que mostrou uma sensibilidade à variação de ofertas nesse exemplo. A Figura 4.2 ilustra esse comportamento do Preço Final ao longo das rodadas, associando-o agora com a variação de oferta.

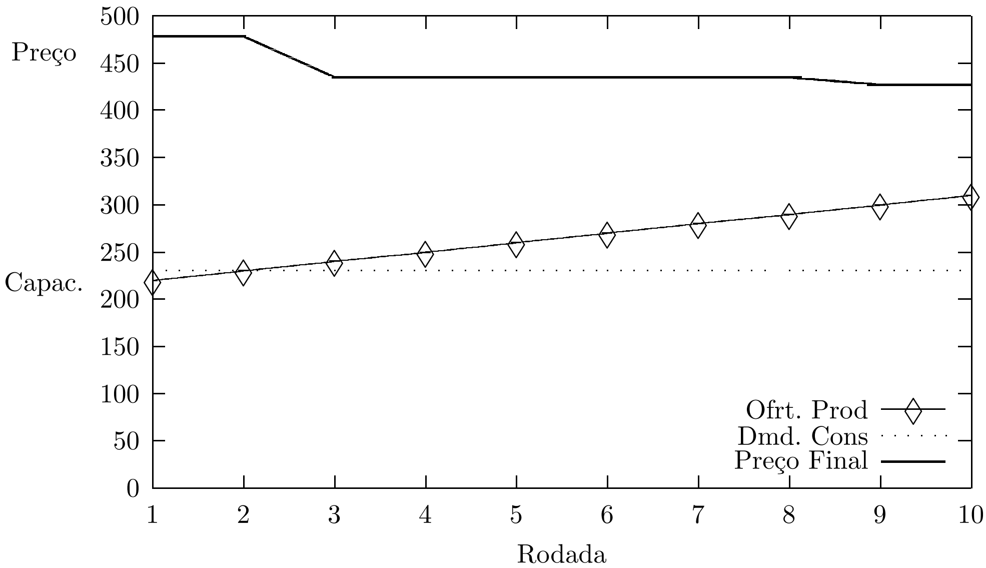

Figura 4.2: Preço Final e Capacidades Totais dos Produtores e Consumidores

Na Figura 4.2 a curva mais acima é o Preço Final da mercadoria ao longo das rodadas. Esse preço sofre duas quedas, uma da 2^a para a 3^a rodada (de 478 para 435) e a outra da 8^a para 9^a (de 435 para 427).

Primeiramente, deve-se reparar nos valores dos preços estabelecidos: 478 é o preço do consumidor **Z**, 435 é o preço do produtor **C** e 427 é o preço do produtor **B**.

Agora, analisando os conjuntos U_p e U_c ao longo de cada rodada, pode-se tirar algumas conclusões sobre as transições:

– Primeiro, deve-se reparar na soma das capacidades (de compra ou venda) dos integrantes dos conjuntos. Inicialmente $cap\,(U_p)$ vale 220 (60+100+60), enquanto $cap\,(U_c) = 230$ (70+50+60+50).

  Com isso, a restrição de capacidade de consumo (eq. 4-3) para o consumidor **Z** terá folga fazendo com que sua variável dual, assim como sua porção do lucro do sistema, sejam nulas. Portanto, é natural que o preço fixado para o mercado seja o do consumidor pertencente a U_c que ofereça o menor preço, o comprador **Z**.

  Na 3^a rodada $cap\,(U_p)$ passou a ser maior que $cap\,(U_c)$ (240 e 230, respectivamente). Com isso a restrição que passou a ter folga foi a da capacidade de produção (eq. 4-2) para o produtor **C**. Então, por um raciocínio análogo ao anterior, o preço do mercado passa a ser o preço do produtor **C**, 435.

– Para entender a transição na nona rodada, basta analisar a composição do conjunto U_p. Na nona rodada, o produtor **C** não pertence mais ao conjunto U_p[2] e $cap\,(U_p) > cap\,(U_c)$. Portanto, o preço passa a ser ditado pelo produtor **B**, já que a sua restrição de capacidade passou a ter folga.

A Tabela 4.7 resume essa dinâmica de Preços e Capacidades relacionadas aos conjuntos U_p e U_c.

Rodada	U_p	U_c	Relação	Preço
1	{A, B, C}	{W, X, Y, Z}	$cap\,(U_p) < cap\,(U_c)$	478
3	{A, B, C}	{W, X, Y, Z}	$cap\,(U_p) > cap\,(U_c)$	435
9	{A, B}	{W, X, Y, Z}	$cap\,(U_p) > cap\,(U_c)$	427

Tabela 4.7: Dinâmica dos Preços e das Capacidades

4.4 Reinterpretação do Núcleo

Já foi visto na seção 4.2 que o núcleo do jogo pode ser obtido através das variáveis duais do modelo. Porém, essa informação, a principio não diz nada sobre o significado da solução. Nesta seção são feitas algumas análises sobre os resultados mostrados na seção anterior, e são vistos alguns padrões nas soluções encontradas. Ao longo desta seção, é visto uma outra maneira de chegar ao *núcleo* do problema.

[2]Na verdade, desde a oitava rodada ele não pertence ao conjunto U_p, mas o caso em que $cap\,(U_p) = cap\,(U_c)$ será visto mais adiante

Pelos resultados mostrados na seção anterior, foi possível observar dois padrões na forma dessa solução:

- O fato da solução sempre determinar um preço único para todos os integrantes do mercado
- Como este preço é influenciado pelas capacidades de produtores e consumidores que pertençam aos conjuntos U_p e U_c.

Os dois teoremas a seguir formalizam essas idéias, mostrando que os padrões vistos sempre ocorrem em soluções deste modelo.

Teorema 4.4 *Dado um jogo definido pela tupla $< P, Q, p, q, c, l >$ e função característica $\mathcal{V} = \mathcal{L}(S)$, o preço final p_f definido pelo lance inicial e o retorno do sistema para cada jogador será igual para todos os jogadores.*

Prova: Suponha uma solução de núcleo em que um dos produtores tenha um preço final α unidades $(0 < \alpha < minP(U_c) - maxP(U_p))$ maior que o preço final estabelecido originalmente. Para que este produtor venda por este preço, ou algum consumidor está pagando um preço maior que p_f ou algum produtor está vendendo por um preço menor que p_f (ou as duas coisas estão acontecendo ao mesmo tempo).

Esta solução não pode ser do núcleo, pois um produtor que ganhe β unidades a menos que p_f pode formar uma coalizão a parte oferecendo um preço de $p_f - \delta$ $(0 < \delta < \beta)$ com qualquer consumidor que pague p_f (ou mais).

Da mesma forma, um consumidor que pague mais do que p_f poderia formar uma coalizão a parte com qualquer produtor que estivesse recebendo p_f (ou menos) por unidade de produto.

Por outro lado, com todos os jogadores tendo um preço final fixo p_f, é bem claro que nenhum deles pode desviar desse preço, pois um produtor que queira ganhar mais do que p_f teria que formar coalizão com consumidores que estivessem dispostos a pagar mais que p_f. Nenhum consumidor poderia aceitar tal proposta já que ela significa prejuízo nas compras. $\square$

Teorema 4.5 *Dado um modelo definido pela tupla $< P, Q, p, q, c, l >$ e os conjuntos U_p e U_c associados, tem-se que: o preço final é está entre o maior preço dos produtores em U_p e o menor preço dos consumidores em U_c. E, em particular, se:*

– *se $cap(U_p) < cap(U_c)$ - o preço do produto é determinado pelo menor dos preços de U_c.*

– *se* $cap(U_p) > cap(U_c)$ *- o preço do produto é determinado pelo maior dos preços de* U_p.

Prova: A primeira afirmação é garantido na construção do modelo. Dado que os conjuntos U_p e U_c contêm os produtores e consumidores que efetivamente participam do mercado, o preço final *tem* que estar entre $maxP(U_p)$ e $minP(U_c)$, uma vez que é garantido no modelo que nenhum produtor recebe menos do que cobrou e nenhum consumidor paga mais do que ofereceu.

Para provar a segunda afirmação, suponha uma situação que $cap(U_p) < cap(U_c)$ e o preço final é de α unidades menor que $minP(U_c)$. Neste caso, pode ser vantajoso para o consumidor que possui o menor preço (e que portanto, não compra sua demanda total) formar uma coalizão oferecendo comprar por preços um pouco mais altos (sem ultrapassar sua oferta) atraindo produtores para sua coalizão. Repare que isto só não pode acontecer quando o preço final é igual ao menor preço dos consumidores em U_c.

Raciocínio análogo pode ser feito para provar a terceira afirmação. Numa situação em que $cap(U_p) > cap(U_p)$, se o preço final for maior que $maxP(U_p)$, o produtor que possui o maior dos preços (e não vendeu sua capacidade total), pode oferecer um preço um pouco menor e formar coalizões a parte. Esta possibilidade só é vetada se o preço final for igual ao maior dos preços dos produtores em U_p. □

Os resultados comprovados por este último teorema podem ser associados com a conclusão de Shapley e Shubik sobre Jogos de Atribuição *(Assignment Games)* em [10]. Em seu trabalho, Shapley e Shubik provaram que a contribuição de um jogador para uma certa coalizão é menor quando há um excesso de jogadores de seu *tipo*.

Adaptando este resultado para o modelo aqui apresentado, pode-se interpretar o "excesso de jogadores" como o excesso de capacidade (seja de produção ou consumo), como um fator determinante na contribuição do jogador para o núcleo. Em outras palavras, o tipo de jogador que estiver com a maior capacidade tende a ter menor participação no núcleo (isto foi visto claramente no exemplo 4.3.2).

Estes resultados também são coerentes com a Teoria Macroeconômica. Isto é, se a oferta de um produto é aumentada (isoladamente, sem outra influência) a tendência do preço dessa mercadoria é diminuir. Em contrapartida, se a demanda por um produto aumenta, a tendência de seu preço é aumentar.

Uma conseqüência destes Teoremas é que para se determinar o montante que é que cada produtor irá receber e o montante que cada consumidor irá pagar. Não é necessário resolver um programa linear. Basta computar U_p e U_c a partir da ordenação de produtores e consumidores pelos seus respectivos lances.