5
Jogo com Extensões

Neste capítulo são apresentados os jogos associados a cada extensão apresentada no capítulo 2 (sec. 2.3). Será seguida uma organização semelhante à do capítulo 4, isto é, em cada seção será apresentada uma extensão, e ao longo das sub-seções são apresentados os jogos, as distribuições do lucro sugeridas e são feitas algumas análises.

A organização de cada seção é feita de maneira semelhante ao que foi feito para o modelo básico. Os modelos dos jogos são apenas adequações dos modelos lineares previamente apresentados para a formulação de jogos cooperativos. As distribuições do lucro apresentam os mesmos objetivos, sendo que o foco principal recai sobre soluções que pertencem ao núcleo. As análises do modelo são feitas sempre com o auxílio de exemplos.

Na seção 5.1 é apresentado o jogo com o custo de transporte associado à mercadoria. A seção 5.2 contém o jogo com economia de escala na oferta do consumidor. A seção 5.3 apresenta o jogo com múltiplos produtos.

5.1
Jogo com Custo de Transporte

Esta seção contém o jogo associado ao modelo com um custo de transporte na mercadoria. Seguindo o modelo adotado no capítulo 4, primeiramente é apresentado o modelo de programação linear associado ao jogo na seção 5.1.1, em seguida é apresentado o núcleo do jogo na seção 5.1.2 e na seção 5.1.3 são mostrados alguns exemplos desse jogo.

5.1.1
Modelo do Jogo

Conforme adiantado na seção 2.3.1, a mudança introduzida ao modelo básico ocorre apenas pelos coeficientes de transporte t_{ij}, que representam o custo de transportar uma unidade da mercadoria do produtor i para o consumidor j, e que são introduzidos diretamente na função objetivo.

O jogo é definido de maneira idêntica à seção 4.1, isto é, o conjunto de jogadores N é representado por $P \cup Q$ e a função de valoração $\mathcal{V}$ é o lucro $\mathcal{L}(S)$ de cada coalizão $S \subset N$ formada, com $\mathcal{V}(S) = 0$ se $P \cap S$ ou $Q \cap S$ forem vazios.

Segue o modelo para o jogo com custo de transporte:

$$\mathcal{L}(S): \ Max \sum_{j \in Q_S} \psi_j - \sum_{i \in P_S} \gamma_i - \sum_{i \in P_S} \sum_{j \in Q_S} t_{ij} \tag{5-1}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in Q_S} x_{ij} \leq p_i \qquad i \in P_S \tag{5-2}$$

$$\sum_{i \in P_S} x_{ij} \leq q_j \qquad j \in Q_S \tag{5-3}$$

$$\gamma_i = \sum_{j \in Q_S} c_i x_{ij} \qquad i \in P_S \tag{5-4}$$

$$\psi_j = \sum_{i \in P_S} l_j x_{ij} \qquad j \in Q_S \tag{5-5}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i \in P_S \qquad j \in Q_S \tag{5-6}$$

5.1.2
Distribuição do Lucro

Nesta seção é apresentada a distribuição de lucro do jogo. Esta distribuição deve conter as mesmas propriedades do modelo básico. Portanto, primeiramente deve-se encontrar uma solução que pertença ao núcleo do jogo.

O núcleo pode ser deduzido de maneira análoga à da seção 4.2, ou seja, a partir do problema dual. Assim como no modelo básico, no modelo com custo de transporte as variáveis duais determinam uma solução pertencente ao núcleo.

Segue o modelo dual associado a este jogo:

$$\mathcal{D}(S): \; Min \sum_{i \in P_S} p_i u_i + \sum_{j \in Q_S} q_j v_j \tag{5-7}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} u_i + v_j + c_i w_i - l_j y_j &\geq -t_{ij} & i \in P_S \quad & j \in Q_S \qquad (5\text{-}8) \\ u_i &\geq 0 & i \in P_S & \\ v_j &\geq 0 & j \in Q_S & \\ w_i &\geq 1 & i \in P_S & \\ y_j &\geq 1 & j \in Q_S & \end{aligned}$$

Observando a função objetivo deste modelo dual (eq. 5-7) percebe-se que apenas as variáveis u_i e v_j estão presentes, o que sugere uma solução semelhante à do modelo básico: $(u_1^* p_1, \ldots, u_n^* p_n;\, v_1^* q_1, \ldots, v_m^* q_m)$.

Segue o teorema que prova esta afirmação.

Teorema 5.1 *Sejam (P, Q, p, q, c, l, T) os parâmetros do modelo e $\mathcal{V}$ a função característica que define o jogo. Seja (u^*, v^*, w^*, y^*) a solução ótima para o problema dual $\mathcal{D}(N)$.*

Então, $(u_1^* p_1, \ldots, u_n^* p_n; v_1^* q_1, \ldots, v_m^* q_m)$ pertence ao núcleo do jogo $C(\mathcal{V})$.

PROVA: A prova desse teorema é idêntica à do **Teorema 4.1**. As restrições do problema dual são independentes entre si, portanto se for retirado algum produtor ou consumidor isso não afeta a validade da solução.

Na verdade, retirando algum produtor ou consumidor, fica claro que o problema torna-se apenas menos restritivo. Num problema de minimização, isto quer dizer que a solução encontrada para qualquer problemas $\mathcal{D}(S)$ é menor ou igual a soma de $u_i^* p_i$ e $v_j^* q_j$, para $i, j \in S$. Expressando matematicamente, tem-se:

$$\mathcal{V}(S) \leq \sum_{i \in P_S} u_i^* p_i + \sum_{j \in Q_S} v_j^* q_j \qquad \forall S \subset N.$$

Esta é exatamente a condição para a solução $(u_1^* p_1, \ldots, u_n^* p_n; v_1^* q_1, \ldots, v_m^* q_m)$ pertencer ao núcleo. □

5.1.3
Análise de Resultados

Nesta seção é feita a análise do comportamento do modelo com esta extensão. Como feito anteriormente, esta análise é feita através de comentários sobre alguns exemplos de jogos simples.

JOGO 1 - *Coeficiente de Transporte Baixo*: Neste exemplo o coeficiente de transporte é desprezível e não altera as relações entre os participantes do mercado.

Esta situação pode ocorrer quando o coeficiente de transporte é desprezível em relação aos preços dos produtos e também em relação às diferenças de preços entre os jogadores. Ou mesmo quando a tarifação é praticamente uniforme e não haja grandes discrepâncias entre o que é cobrado para cada integrante do mercado.

Por exemplo, suponha uma alíquota cobrada sobre o preço de um determinado produto. Essas alíquotas são muitas vezes um percentual fixo sobre o preço do produto. Neste caso, as relações entre os jogadores permanecem inalteradas, uma vez que a ordem dos preços dos produtores e consumidores não será alterada. [1]

Seguem as tabelas de dados para o jogo:

Produtor			Consumidor		
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Lance
A	120	360	X	125	410
B	100	370	Y	130	400
C	150	375	Z	120	390

Tabela 5.1: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

Coeficientes de Transportes			
	Consumidores		
Produtores	X	Y	Z
A	5	6	8
B	6	7	7
C	7	8	10

Tabela 5.2: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

A Tabela 5.1 segue o mesmo modelo das tabelas de entrada de dados anteriores. A Tabela 5.2 é uma matriz representando os custos de transporte,

[1] Naturalmente, neste caso, pode haver mudança entre as cardinalidades dos conjuntos de produtores e consumidores que participam do mercado (U_p e U_c).

onde a entrada i, j é o custo unitário de transporte do produtor na *i-ésima* linha para o consumidor da *j-ésima* coluna.

Para este jogo foi feita apenas uma rodada com os dados iniciais. As Tabelas 5.3 e 5.4 apresentam os resultados do teste.

Compra e Venda			
	Consumidores		
Produtores	X	Y	Z
A	120	0	0
B	0	0	100
C	5	130	15

Tabela 5.3: Matriz de compras e vendas dos participantes do mercado

A Tabela 5.3 apresenta a matriz de vendas deste exemplo. A entrada i, j representa as vendas do produtor da *i-ésima* linha para o consumidor da *j-ésima* coluna.

Produtor				Consumidor			
Id	Vendas	Retorno	P. Final	Id	Compras	Retorno	P. Final
A	120	22	382	X	125	23	387
B	100	13	383	Y	130	12	388
C	150	5	380	Z	120	0	390

Tabela 5.4: Sumarização dos dados de produtores e consumidores.

A Tabela 5.4 contém as sumarizações dos dados. **Vendas** e **Compras** são os totais vendidos (pelos produtores) e comprados (pelos consumidores). **Retorno** significa a quantidade de lucro do sistema dada a cada jogador por unidade de produto. **P. Final** é o preço final do produto, já levando-se em conta o *retorno* do sistema.

O que pode ser visto na Tabela 5.4 é que não houve mais a fixação de um preço final para todos os integrantes. Para um mercado sem o custo de transporte, esse preço final seria de 390, ou seja, o preço oferecido pelo consumidor **Z** inicialmente.[2]

Porém, para custos que sejam desprezíveis em relação aos preços do mercado, ou mesmo que sejam proporcionais aos preços de cada participante[3], é possível distingüir os comportamentos dos participantes.

[2]Conforme análises feitas no Capítulo 4.

[3]É importante que não se altere a ordem dos participantes com relação ao seu lance no mercado

Por exemplo: como já foi dito, o preço final esperado para este mercado era de 390. Porém, todos os produtores ficaram abaixo deste preço, e alguns consumidores obtiveram preços menores nas compras.

O único participante a ter preço final de 390 foi o consumidor **Z**, já que esse é o seu próprio preço e a sua parcela do lucro é a única nula, já que sua restrição de capacidade é a única com folga.

Também pode-se perceber que os produtores arcaram com os custos do transporte. O produtor **A** pagou 8, **B** pagou 7, **C** pagou 10. O fato de alguns consumidores terem conseguido preços ainda menores que 390, deve-se a um excedente pago pelo transporte por parte dos produtores. Isso gerou um excedente de 3 para o consumidor **X** e de 2 para o consumidor **Y**.

É importante notar que neste jogo, o padrão para se calcular o preço final dos jogadores foi semelhante ao do modelo básico. O conjunto U_c tinha uma demanda maior que a oferta de U_p ($375 > 370$) e portanto o preço base foi o preço da menor oferta dos consumidores.

Este caso segue o mesmo padrão do jogo básico se for invertida a relação entre U_p e U_c. Seguindo a Tabela 5.1 trocando apenas a oferta de **A** por 125 e a demanda de **X** por 120, leva ao resultado apresentado na Tabela 5.5.

Produtor				Consumidor			
Id	Vendas	Retorno	P. Final	Id	Compras	Retorno	P. Final
A	125	17	377	X	120	28	382
B	100	8	378	Y	130	17	383
C	145	0	375	Z	120	5	385

Tabela 5.5: Sumarização dos dados de produtores e consumidores.

Na Tabela 5.5 o que pode ser visto é que o preço base foi o preço de **C** (375), que é o único jogador com folga na restrição de capacidade. O custo do transporte passou a ser debitado do lucro dos consumidores, e os produtores **A** e **B** passaram a captar o excedente retirado do lucro dos consumidores.

A análise deste jogo (e de sua variação) serve para mostrar que quando os coeficientes de transporte são desprezíveis e não alteram os conjuntos U_p e U_c, o comportamento do mercado tem semelhança com o mercado básico. Principalmente no que diz respeito ao *preço base*.

JOGO 2 - **Coeficientes de Transporte Altos**: Neste exemplo os coeficientes de transporte serão menos uniformes e terão grandes discrepâncias entre si.

Esta situação é comum em mercados internacionais. Alguns países mantêm acordos de redução de alíquotas de certos produtos, enquanto com outros países as mesmas alíquotas não sofrem descontos. Isso gera uma grande diferença nos impostos e consequentemente no preço final do produto.

As Tabelas 5.6 e 5.7 mostram os dados de entrada deste jogo:

Produtor			Consumidor		
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Lance
A	120	360	X	125	410
B	100	360	Y	130	400
C	150	375	Z	120	390

Tabela 5.6: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

Coeficientes de Transporte			
	Consumidores		
Produtores	X	Y	Z
A	5	20	40
B	15	2	2
C	10	2	20

Tabela 5.7: Matriz de custos de transporte entre produtores e consumidores.

Para as Tabelas 5.6 e 5.7 procurou ser mantido quase a mesma entrada do jogo anterior, realizando mudanças apenas na capacidade do consumidor **X** e nos coeficientes de transporte, que passaram a ter variações bruscas e valores elevados.

Produtor				Consumidor			
Id	Vendas	Retorno	P. Final	Id	Compras	Retorno	P. Final
A	100	0	360	X	100	45	365
B	100	18	388	Y	130	23	377
C	130	0	375	Z	100	0	390

Tabela 5.8: Sumarização dos dados de produtores e consumidores.

O resultados desse jogo, mostrados na Tabela 5.8 revelam alguns comportamentos diferentes em relação aos jogos anteriores. Dois produtores (**A** e **C**) e um consumidor (**Z**) venderam apenas parte da sua capacidade total, portanto seus preços finais permaneceram iguais aos iniciais.

O produtor **B** vendeu seu total para o consumidor **Z** e obteve um preço final de 388. Seu preço final seria 390, mas do seu lucro foi descontado o custo de transporte (de 2 unidades). O mesmo ocorreu com os consumidores

X e **Y**: **X** comprou seu total de **A** e seu preço final foi o preço de **A** mais transporte (360+5), assim como o preço de **Y** foi o preço de **C** mais transporte (375+2).

Os resultados apresentados por este jogo mostram que num mercado em que o custo de transporte é considerável e sofre muitas oscilações, a determinação do preço final não pode mais ser feita seguindo o padrão do modelo básico. Isto ocorre porque os conjuntos U_p e U_c não podem mais ser determinados da mesma maneira, já que o custo de transporte praticamente determina um preço diferente para cada par i, j de produtor e consumidor.

Esta situação acaba sendo bastante semelhante à apresentada no trabalho de Soriano et. al [12], onde é analisado o jogo de transporte. A diferença para o jogo aqui mostrado é que ele concentra num coeficiente b_{ij} o custo $l_j - c_i - t_{ij}$.

A conclusão tirada é que a única garantia para produtores e consumidores neste tipo de situação é que: produtores nunca receberão menos do que o preço pedido. E consumidores nunca pagarão mais do que o preço oferecido. E isto é garantido na construção do modelo, em sua função objetivo.

Como observação final, não é provado aqui que o conjunto de soluções duais são as únicas soluções de núcleo existentes. No trabalho de Soriano et. al [12], é visto que o conjunto de soluções do núcleo contém soluções que não estão no conjunto de soluções ótimas do problema dual.

5.2
Jogo com Economia de Escala

Nesta seção será apresentado o jogo associado ao modelo com economia de escala na oferta dos consumidores e o seu núcleo será deduzido e analisado. De maneira análoga ao que foi feito no capítulo 4, nesta seção será apresentado o modelo de programação linear do jogo (sec. 5.2.1), em seguida é apresentado o núcleo (sec. 5.2.2) e na seção 5.2.3 são feitas algumas análises.

5.2.1
O Jogo

Conforme explicado na seção 2.3.2, a economia de escala no preço oferecido pelo consumidor permite que este estabeleça preços de acordo com as quantidades compradas. Para isso cada consumidor define um vetor b^j de *faixas de preços* e um vetor l^j contendo um preço para cada faixa definida. As matrizes B e L contêm as faixas e os preços de todos os consumidores.

O jogo com economia de escala pode ser definido por uma tupla $\langle P, Q, p, q, c, L, B\rangle$. O conjunto de jogadores N é $P \cup Q$ e a função de valoração $\mathcal{V}$ que avalia o lucro de cada coalizão $S \subset N$.

Segue o modelo do jogo:

$$\mathcal{L}(S): \; Max \sum_{j\in Q_S} \psi_j - \sum_{i \in P_S} \gamma_i \tag{5-9}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in Q_S} x_{ij} &\le p_i & & i \in P_S \\
\sum_{i\in P_S} x_{ij} &\le q_j & & j \in Q_S \\
\gamma_i &= \sum_{j\in Q_S} c_i x_{ij} & & i \in P_S \\
\psi_j &\le \sum_{i\in P_S} l_j^k x_{ij} + \beta_j^k & & j \in Q_S \qquad k = 1, \ldots, |b^j|
\end{aligned} \tag{5-10}$$

l_j^k Preço do consumidor j para a faixa de preço k.

β_j^k Coeficiente linear da reta. Na seção 2.3.2 é mostrado como se calcula esse valor.

$|b^j|$ Dimensão do vetor b^j. É o número de faixas de preço para o consumidor j.

5.2.2
A Distribuição do Lucro

Esta seção contém a distribuição do lucro para o jogo com economia de escala. Seguindo o mesmo raciocínio do modelo básico, serão procuradas soluções que pertençam ao núcleo, com o intuito de que essas soluções gerem distribuições que cumpram com os objetivos iniciais do mercado.

Novamente, será introduzido o modelo dual, para se obter uma solução que pertence ao núcleo a partir das variáveis duais. Será que visto que também para este jogo, as variáveis duais definem uma solução de núcleo.

Segue o modelo dual associado a este jogo:

$$\mathcal{D}(S): \; Min \sum_{i \in P_S} p_i u_i + \sum_{j \in Q_S} q_j v_j + \sum_{j \in Q_S} \sum_{k=1}^{|b^j|} y_j^k \beta_j^k \tag{5-11}$$

Sujeito a:

$$u_i + v_j + c_i w_i - \sum_{k=1}^{|b^j|} l_j^k z_j^k \geq 0 \qquad i \in P_S \qquad j \in Q_S \tag{5-12}$$

$$u_i \geq 0 \qquad i \in P_S$$

$$v_j \geq 0 \qquad j \in Q_S$$

$$w_i \geq 1 \qquad i \in P_S$$

$$y_j^k \geq 1 \qquad j \in Q_S \qquad k = 1, \ldots, |b^j|$$

Para este dual, uma mudança importante com relação ao dual básico. A função objetivo (eq. 5-11) passa a ter as variáveis y_j^k. Como essas variáveis são relativas às restrições de gasto dos consumidores, é natural que a contribuição dessas variáveis para o lucro seja distribuída entre os consumidores.

Portanto, a distribuição de lucro induzida pelas variáveis duais seria: cada produtor i recebendo $u_i p_i$ e cada consumidor j recebendo $v_j q_j + \sum_k y_j^k \beta_j^k$.

O teorema a seguir prova esta afirmação. A prova segue a mesma linha das anteriores.

Teorema 5.2 *Sejam (P, Q, p, q, c, L, B) os parâmetros do modelo e $\mathcal{V}$ a função característica que define o jogo. Seja (u^*, v^*, w^*, y^*) a solução ótima para o problema dual $\mathcal{D}(N)$.*

Então, $(u_1^* p_1, \ldots, u_n^* p_n; v_1^* q_1 + \sum_k y_1^{*k} \beta_1^k, \ldots, v_m^* q_m + \sum_k y_m^{*k} \beta_m^k)$ pertence ao núcleo do jogo $C(\mathcal{V})$.

Prova: A prova desse teorema é bastante semelhante à dos Teoremas 4.1 e 5.1 e será resumida aqui.

Se o problema $\mathcal{L}(S)$ tem solução ótima, sabe-se pelo **Teorema da Dualidade** que o problema dual $\mathcal{D}(S)$ também a tem e o valor da função objetivo é igual. Portanto: $\mathcal{V}(S) = \mathcal{L}(S) = \mathcal{D}(S)$.

Além disso, está claro que a solução do problema $\mathcal{D}(N)$, $(u_1^* p_1, \ldots, u_n^* p_n; v_1^* q_1 + \sum_k y_1^{*k} \beta_1^k, \ldots,\ v_m^* q_m + \sum_k y_m^{*k} \beta_m^k)$, é uma solução factível para o problema $\mathcal{D}(S)$. Portanto, por $\mathcal{D}(S)$ ser uma minimização:

$$\mathcal{D}(S) \leq \sum_{i \in P_S} u_i^* p_i + \sum_{j \in Q_S} (v_j^* q_j + \sum_k y_j^{*k} \beta_j^k)$$

Portanto, a distribuição $(u_1^* p_1, \ldots, u_n^* p_n; v_1^* q_1 + \sum_k y_1^{*k} \beta_1^k, \ldots, v_m^* q_m + \sum_k y_m^{*k} \beta_m^k)$ pertence ao núcleo do jogo. □

5.2.3
Análises

Nesta seção é feita a análise da distribuição do lucro sugerida na seção anterior. É observado se ela cumpre com os objetivos primordiais do mercado. Além disso, é analisado o padrão de comportamento dessa distribuição dadas as variações do mercado.

JOGO 1 - *Variação da Oferta do Produtor*: Este jogo apresenta 3 produtores e 3 consumidores com economia de escala no preço oferecido pelos produtos. O teste visa capturar o comportamento do mercado à alteração da demanda de um dos produtores.

A Tabela 5.9 contém os parâmetros iniciais do jogo. Esta tabela segue o mesmo padrão das anteriores, adicionando a informação da economia de escala. As *faixas de preço* no consumidor indica como é feita a compra. Cada coluna das *faixas de preço* correspondem a uma coluna no *lance*. Por exemplo, para o consumidor **X**, as primeiras 10 unidades ele compra a 100, as 90 seguintes a 90 e as 500 seguintes a 78.

Produtor			Consumidor							
Id	Oferta	Lance	Id	Demanda	Faixas de Preço			Lance		
A	120	70	X	500	10	90	500	100	90	78
B	310	74	Y	400	100	300	-	90	82	-
C	230	75	Z	500	50	250	300	100	85	70

Tabela 5.9: Dados de Entrada dos Produtores e Consumidores.

A partir desses dados, foram feitas 10 rodadas de testes acrescentando 100 unidades na oferta do produtor **A** a cada rodada. Os resultados para estes testes estão nas tabelas 5.10 e 5.11.

A primeira observação a ser feita sobre os resultados é que foi mantido o comportamento de estabelecer um preço final único para produtores e consumidores. Este comportamento foi visto no modelo básico e não se manteve com a adição do custo de transporte.

Este modelo tem em comum com o modelo básico o fato de não haver diferença de preço de um produtor para outros consumidores, situação

Rodada	Qt. Ofertadas			Qt. Vendidas			Preços Finais		
#	A	B	C	A	B	C	A	B	C
1	120	310	230	120	310	230	82	82	82
2	220	310	230	220	310	230	82	82	82
3	320	310	230	320	310	230	78	78	78
4	420	310	230	420	310	230	78	78	78
5	520	310	230	520	310	230	78	78	78
6	620	310	230	620	310	230	78	78	78
7	720	310	230	720	310	170	75	75	75
8	820	310	230	820	310	70	75	75	75
9	920	310	230	920	280	0	74	74	-
10	1020	310	230	1020	180	0	74	74	-

Tabela 5.10: Resultados para os produtores no JOGO 1.

Rodada	Qt. Demandadas			Qt. Compradas			Preços Finais
#	X	Y	Z	X	Y	Z	X, Y, Z
1	500	400	500	100	260	300	82
2	500	400	500	100	360	300	82
3	500	400	500	160	400	300	78
4	500	400	500	260	400	300	78
5	500	400	500	360	400	300	78
6	500	400	500	460	400	300	78
7	500	400	500	500	400	300	75
8	500	400	500	500	400	300	75
9	500	400	500	500	400	300	74
10	500	400	500	500	400	300	74

Tabela 5.11: Resultados para os consumidores no JOGO 1.

possível em um mercado com custo de transporte. Isto é, não faz diferença para um produtor, o consumidor para o qual ele está vendendo e vice-versa. Com isso, o conceito dos conjuntos U_p e U_c permanece praticamente o mesmo do modelo básico, com pequenas alterações para se adequar ao sistema de preço com economia de escala.

Logo no resultado da primeira rodada, já pode ser notado um comportamento peculiar deste jogo. Todos os produtores vendem o total de sua capacidade de produção. Nenhum dos consumidores teve sua demanda total suprida. Ainda assim, os consumidores receberam algum retorno do sistema devido à contribuição $\sum_j \sum_k y_j^k \beta_j^k$.

O consumidor **X** vendeu 100 unidades, 10 por 100 e 90 por 90. O consumidor **Y** comprou 260 unidades, 100 a 90, 160 a 82. O consumidor **Z** comprou 300 unidades, 50 a 100 e 250 a 85. Se ao invés de serem consideradas as demandas totais, passarem a ser consideradas as faixas de preço, pode-se ver que apenas um consumidor não vendeu o total de sua faixa: o consumidor **Y**, que vendeu 160 de 300. O preço dessa faixa é 82, que é o preço final estabelecido nessa rodada.

Interessante notar que apesar do consumidor **Y** ter comprado algumas unidades a 90 e outras a 82, o sistema consolidou o preço de 82. Para os outros consumidores o preço também foi fixado nesse valor, já que o *Teorema 4.2* é válido neste caso.

A partir da 3^a rodada, quando o consumidor **Y** supriu sua demanda, os produtores passaram a vender para o consumidor **X**, na sua 3^a faixa de preço (78), e esse passa a ser o preço estabelecido até a 7^a rodada, quando o consumidor **X** supriu sua demanda total e o produtor **C** deixou de vender o total de sua produção, portanto o preço passou a ser o preço oferecido por **C** (75). Na 9^a rodada, o produtor **C** saiu do mercado e o preço passou a ser o de **B** (74).

A principal mudança do comportamento desse jogo para o jogo *básico* é que a determinação do preço final não depende mais exclusivamente das capacidades de produção e consumo. As faixas de preço funcionam como delimitadores de consumo e com isso passam a determinar o preço de mercado.

5.3
Jogo com Múltiplos Produtos

Esta seção contém o jogo associado ao modelo com múltiplos produtos no mercado. Seguindo o modelo das seções anteriores, na seção 5.3.1 é apresentado o jogo, na seção 5.3.2 é apresentado o seu núcleo e na na seção 5.3.3 são feitas algumas análises sobre exemplos de jogos.

Em seguida é apresentado como restrições de acoplamento pode alterar esse jogo Restrições de acoplamento são aquelas que reúnem mais de um produto sob uma mesma restrição. Por exemplo, pode haver uma restrição de capacidade total de produção, ou uma restrição de total gasto pelos consumidores.

Restrições desse tipo pode gerar a compra de produtos em quantidades fracionárias. Se o produto puder ser comercializado com quantidades fracionárias, o modelo pode ser aplicado sem mudanças. Porém, se o mercado estiver lidando com produtos indivisíveis (isto é, se o ítem só puder ser comercializado a quantidades inteiras) ocorrem mudanças profundas de como este modelo deve ser encarado.

Na seção 5.3.4 é apresentado o jogo com uma restrição de acoplamento e na seção 5.3.5 é feita uma análise das implicações da inserção desse tipo de restrição com produtos indivisíveis ou não.

5.3.1
O Jogo

O jogo com múltiplos produtos é fundamentalmente o jogo básico extendido para mais de um produto, acrescido de eventuais *restrições de acoplamento* sobre os produtos. Segue o modelo do jogo:

$$\mathcal{L}(S): \; Max \sum_{j \in Q_S} \sum_{k=1}^{\rho} \psi_j^k - \sum_{i \in P_S} \sum_{k=1}^{\rho} \gamma_i^k \tag{5-13}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j \in Q_S} x_{ij}^k \leq p_i^k \qquad i \in P_S \qquad k = 1, \ldots, \rho \tag{5-14}$$

$$\sum_{i \in P_S} x_{ij}^k \leq q_j^k \qquad j \in Q_S \qquad k = 1, \ldots, \rho \tag{5-15}$$

$$\gamma_i = \sum_{j \in Q_S} c_i^k x_{ij}^k \qquad i \in P_S \qquad k = 1, \ldots, \rho \tag{5-16}$$

$$\psi_j = \sum_{i \in P_S} l_j^k x_{ij}^k \qquad j \in Q_S \qquad k = 1, \ldots, \rho \tag{5-17}$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \qquad i \in P_S \qquad j \in Q_S \qquad k = 1, \ldots, \rho$$

Todas as variáveis e parâmetros aparecem com um índice k (ex: x_{ij}^k) que indica o produto correspondente. A quantidade ρ representa o número de produtos no mercado.

5.3.2
Distribuição do Lucro

Nessa seção é apresentada a distribuição do lucro para o modelo com múltiplos produtos. A organização segue os padrões anteriores: primeiro é introduzido o problema dual e é apresentada a solução induzida pelas variáveis duais. Depois é provado que esta solução pertence ao núcleo.

Segue o modelo dual:

$$\mathcal{D}(S): \ Min \ \sum_{i \in P_S} \sum_{k=1}^{\rho} p_i^k u_i^k + \sum_{j \in Q_S} \sum_{k=1}^{\rho} q_j^k v_j^k \tag{5-18}$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} u_i^k + v_j^k + c_i^k w_i^k - l_j^k t_j^k &\geq 0 \qquad i \in P_S \qquad j \in Q_S \\ u_i^k &\geq 0 \qquad i \in P_S \\ v_j^k &\geq 0 \qquad j \in Q_S \\ w_i^k &\geq 1 \qquad i \in P_S \\ t_j^k &\geq 1 \qquad j \in Q_S \end{aligned} \tag{5-19}$$

A mudança em relação ao modelo básico está apenas em considerar os outros produtos, com isso a parcela dos produtores na função objetivo passa a ser $\sum_i \sum_k u_i^k p_i^k$ e a dos consumidores é $\sum_j \sum_k u_i^k p_i^k$. As restrições do problema permaneceram iguais, apenas foram multiplicadas pelo número ρ de produtos.

O teorema a seguir mostra que a solução induzida pelas variáveis duais pertence ao núcleo deste jogo.

Teorema 5.3 *Sejam (P, Q, p, q, c, l) os parâmetros do modelo e $\mathcal{V}$ a função característica que define o jogo. Seja (u^*, v^*, w^*, t^*) a solução ótima do problema dual $\mathcal{D}(N)$.*

Então, $\left(\sum_{k=1}^{\rho} u_1^{*k} p_1^{*k}, \ldots, \sum_{k=1}^{\rho} u_n^{*k} p_n^{*k}; \sum_{k=1}^{\rho} v_1^{*k} q_1^{*k}, \ldots, \sum_{k=1}^{\rho} v_m^{*k} q_m^{*k} \right)$ *pertence ao núcleo do jogo $C(\mathcal{V})$.*

Prova:Como já foi dito, este jogo com ρ produtos é equivalente a ρ jogos *básicos*. E como não há qualquer ligação entre as restrições dos diferentes produtos, os argumentos para provar o núcleo do jogo *básico* seguem valendo neste caso.

Em suma, as restrições do problema permanecem independentes, portanto a solução $(\sum_k u_1^{*k} p_1^{*k}, \ldots, \sum_k u_n^{*k} p_n^{*k}; \sum_k v_1^{*k} q_1^{*k}, \ldots, \sum_k v_m^{*k} q_m^{*k})$ é sempre válida para o problema. Sendo o dual, um problema de minimização é válido que:

$$\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\mathcal{D}(S)) \leq \sum_{i \in P_S} \sum_k u_i^{*k} p_i^k + \sum_{j \in Q_S} \sum_k v_j^{*k} q_j^k$$

E o teorema é válido trivialmente. $\square$

5.3.3 Análises

Nesta seção são feitas as análises das características desse jogo através de comentários sobre exemplos.

JOGO 1 - *Variações Distintas para Cada Produto:* Este exemplo mostra como este jogo tem comportamento independente para cada produto, e como ele se comporta como se fossem jogos *básicos* distintos.

São 2 produtos no mercado, cada um com lances, ofertas e demandas distintos entre os jogadores. Foram feitas 10 rodadas variando 2 parâmetros no jogo (um para cada produto):

- A capacidade de produção do primeiro produto para o produtor **A** foi aumentada em 10 unidades por rodada.
- O lance do segundo produto para o consumidor **Z** foi diminuído em 2 unidades por rodada.

Seguem as tabelas com os dados:

Produtores				
Id	Ofertas		Lances	
A	150	80	370	180
B	150	100	395	178
C	120	60	390	190

Tabela 5.12: Dados de Entrada dos Produtores para o JOGO 1.

A Tabela 5.12 contém a entrada de dados dos produtores para o JOGO 1. As colunas *Ofertas* e *Lances* tem duas colunas, uma para cada produto do leilão (esquerda para o produto 1, direita para o produto 2).

Consumidores				
Id	Demandas		Lances	
Y	220	120	400	200
Z	230	100	410	197

Tabela 5.13: Dados de Entrada dos Produtores para o JOGO 1.

A Tabela 5.13 contém os dados de entrada do JOGO 1 para os consumidores. Sua organização segue os padrões da Tabela 5.12.

A Tabela 5.14 apresenta os resultados do jogo para os produtores. São apresentadas as *Quantidades Vendidas* e os *Preços Finais*. Cada produtor

(**A**, **B** e **C**) tem duas colunas de resultados: à esquerda são os dados do produto 1 e à direita os dados do produto 2.

A Tabela 5.15 apresenta os dados dos consumidores e tem organização semelhante.

Rodada	Quantidades Vendidas						Preços Finais					
#	A		B		C		A		B		C	
1	150	80	150	100	120	40	400	190	400	190	400	190
2	160	80	150	100	120	40	400	190	400	190	400	190
3	170	80	150	100	120	40	400	190	400	190	400	190
4	180	80	150	100	120	40	400	190	400	190	400	190
5	190	80	140	100	120	0	395	189	395	189	395	-
6	200	80	130	100	120	0	395	187	395	187	395	-
7	210	80	120	100	120	0	395	185	395	185	395	-
8	220	80	110	100	120	0	395	183	395	183	395	-
9	230	80	100	100	120	0	395	181	395	181	395	-
10	240	20	90	100	120	0	395	180	395	180	395	-

Tabela 5.14: Resultados para os produtores no JOGO 1.

Rodada	Quantidades Compradas				Preços Finais			
#	Y		Z		Y		Z	
1	190	120	230	100	400	190	400	190
2	200	120	230	100	400	190	400	190
3	210	120	230	100	400	190	400	190
4	220	120	230	100	400	190	400	190
5	220	120	230	60	395	189	395	189
6	220	120	230	60	395	187	395	187
7	220	120	230	60	395	185	395	185
8	220	120	230	60	395	183	395	183
9	220	120	230	60	395	181	395	181
10	220	120	230	0	395	180	395	-

Tabela 5.15: Resultados para os consumidores no JOGO 1.

O que pode ser visto pelos resultados é que de fato as mudanças associadas a um produto não interferem no outro. O mercado funciona como 2 leilões independentes.

Para o primeiro produto houve apenas uma mudança no preço, na 5^a rodada, quando $cap(U_p)$ passa a ser maior que $cap(U_c)$. Com isso, o preço passa de 400 (preço de **Y**) para 395 (preço de **B**).

Para o segundo produto, até a 4^a rodada $cap(U_p) > cap(U_c)$, com isso o preço vigente era o de **C** (190). A partir da 5^a rodada a relação entre as capacidades se inverteu e o preço passou a ser determinado pelo preço de **Z**.

O preço foi diminuindo a cada rodada (189 a 181) até que o consumidor **Z** deixou de vender, e o preço passou a ser determinado pelo produtor **A** (180).

5.3.4
Restrições de Acoplamento

Restrições de acoplamento são aquelas que unem sob uma regra mais de um produto do mercado. Nesta seção será estudado o que muda no comportamento do jogo a adição de uma restrição deste tipo no mercado.

A restrição adicionada é a mesma citada na seção 2.3.3: será estabelecida uma quantia máxima a ser gasta no mercado. Ao modelo apresentado na seção anterior basta adicionar este conjunto de restrições:

$$\sum_{k=1}^{\rho} \psi_j^k \leq \theta_j \qquad j \in Q_S \tag{5-20}$$

O modelo dual não fica muito diferente. A função objetivo passa a ser:

$$\mathcal{D}(S): \ Min \sum_{i \in P_S} \sum_{k=1}^{\rho} p_i^k u_i^k + \sum_{j \in Q_S} \sum_{k=1}^{\rho} q_j^k v_j^k + \sum_{j \in Q_S} z_j \theta_j \tag{5-21}$$

E a restrição 5-19 passa a ser:

$$u_i^k + v_j^k + c_i^k w_i^k - l_j^k t_j^k + l_j^k z_j \geq 0 \qquad i \in P_S \quad j \in Q_S \tag{5-22}$$

Onde z_j é a variável dual associada a restrição do *j-ésimo* consumidor.

Não será mostrado aqui, mas é razoável considerar que para este problema, a solução induzida pelas variáveis duais seja uma solução de núcleo. Todos os argumentos para provar os teoremas anteriores permanecem válidos.

5.3.5
Análises

Esta seção contém jogos semelhantes ao apresentado na seção 5.3.3, porém contendo a restrição da quantia máxima a ser gasta. Um jogo contém variáveis que contínuas e o outros contém variáveis inteiras.

JOGO 1 - *Jogo com Variáveis Contínuas*: Para este jogo as variáveis x_{ij}^k (as mercadorias em questão) podem assumir valores não inteiros. Além disso, o limite de gastos imposto que não é suficiente para que o consumidor supra toda a sua demanda por produtos. É claro que se o limite de gasto não for atingido, o problema se torna equivalente a uma formulação sem essa restrição.

Para esta análise é feita apenas uma rodada, pois ela será suficiente para mostrar as diferenças no comportamento deste jogo.

Seguem as tabelas de entrada de dados:

Produtores				
Id	Ofertas		Lances	
A	150	80	370	180
B	150	100	395	178
C	120	60	390	190

Tabela 5.16: Dados de Entrada dos Produtores para o JOGO 1.

A Tabela 5.16 está organizada de maneira idêntica à da seção anterior.

Consumidores					
Id	Demandas		Lances		Limite
Y	220	120	400	200	100000
Z	230	100	410	197	105100

Tabela 5.17: Dados de Entrada dos Consumidores para o JOGO 1.

A Tabela 5.17 contém os dados de entrada do JOGO 1 para os consumidores. Ela é praticamente idêntica à Tabela 5.13, com o acréscimo da coluna referente ao *Limite* de gastos.

As Tabelas 5.18 e 5.19 contém os resultados para esta instância do problema.

Produtores						
Id	Vendas		Retornos		Preços Finais	
A	150	80	25	9.723	395	189.973
B	147.512	100	0	11.792	395	189.973
C	120	0	5	-	395	-

Tabela 5.18: Resultado dos Produtores para o JOGO 1.

Para a tabela 5.18, a coluna *Vendas* indica o total vendido pelo produtor correspondente (à esquerda, produto 1 e à direita, produto 2), a coluna *Retorno* indica a parcela do lucro retornada ao produtor *por unidade de produto*. A coluna *Preços Finais* mostram o preço final de uma unidade do produto. O preço final considera o lance inicial e o retorno do sistema.

Nesta tabela já foi possível ver a maior conseqüência da inserção de uma restrição de acoplamento: a venda do produto 1 do produtor **B** não foi um número inteiro. Isto ocorreu pelo fato da restrição de gasto máximo não ter permitido a compra de uma unidade inteira do produto, portanto foi comprada uma fração dele.

Consumidores							
Id	Compras		Retorno 1		Retorno 2	Preços Finais	
Y	190	120	0	7.707	1250	395	189.973
Z	227.512	60	0	0	3845.121	395	189.973

Tabela 5.19: Resultado dos Consumidores para o Jogo 1.

Para a Tabela 5.19, a organização é semelhante à da 5.18. A diferença é que os *Retornos* estão divididos em 2 colunas. Isto acontece porque para os consumidores, a função objetivo (ou, o retorno do sistema) tem 2 contribuições distintas:

– $\sum_j \sum_k q_j^k v_j^k$ - associada às restrições de capacidade de consumo *(Retorno 1)*.

– $\sum_j z_j \theta_j$ - associada às restrições de gasto máximo *(Retorno 2)*.

As quantidades em *Retorno 1* são os retornos por *unidade de produto*, enquanto em *Retorno 2* são os retornos *absolutos* dados pelo sistema.

A razão desta diferença é que a contribuição $\sum_j z_j \theta_j$ não discrimina os produtos. Portanto, não se sabe a princípio como esta quantia será dividida entre os produtos para formar o preço final da mercadoria.[4]

Para determinar o preço final, basta observar os produtores. Para eles não há indefinição. Seu preço final pode ser calculado normalmente já que sua parcela do lucro é bem definida para cada produto:

– $\sum_i \sum_k p_i^k u_i^k$ - associada as restrições de capacidade de produção.

Tendo o preço final determinado para os produtores, deve-se reparar que o Teorema 4.2 é válido nessa situação, portanto os preços finais são únicos para todos os integrantes do mercado.

[4]Vale lembrar que para o consumidor isto não faz diferença já que a quantia será creditada a ele de qualquer maneira. Porém, em certas ocasiões pode ser necessário calcular o preço da mercadoria.

Obviamente, com o preço final é possível determinar que parte do *Retorno 2* vai para qual produto. Por exemplo, dos 1250 dados ao consumidor **X**, 950 são para o produto 1 (para levar o preço a 395) e 300 são para o produto 2 (levando o preço a 189.973).

JOGO 2 - *Jogo com Variáveis Inteiras*: Este jogo é idêntico ao anterior a não ser pelo fato das variáveis do modelo serem inteiras. Esta diferença é muito importante pois com variáveis inteiras o modelo passa a lidar com ítens indivisíveis.

A entrada do problema é igual a do jogo anterior (tab. 5.16 e 5.17). E as soluções estão apresentadas nas Tabelas 5.20 e 5.21.

Produtores						
Id	Vendas		Retornos		Preços Finais	
A	150	80	40	17	410	197
B	147	100	0	19	395	197
C	120	1	10	0	400	190

Tabela 5.20: Resultado dos Produtores para o JOGO 2.

Consumidores							
Id	Compras		Retorno 1		Retorno 2	Preços Finais	
Y	190	120	?	?	?	?	?
Z	227	61	?	?	?	?	?

Tabela 5.21: Resultado dos Consumidores para o JOGO 2.

Primeiramente esta solução, apesar de ser a ótima para o problema inteiro, não é a solução ótima para a sua relaxação linear. O valor da função objetivo para este jogo foi de 12332, enquanto que para sua relaxação linear foi de 12332.68293.

Este fato traz uma conseqüência imediata. A distribuição do lucro deixa de poder ser determinada pela solução do problema dual. Primeiramente porque a solução dual não é mais necessariamente igual a primal (premissa fundamental para as provas dos Teoremas de distribuição de lucro). Neste jogo, por exemplo existe um *gap de integralidade*, e portanto a solução ótima primal é menor que a dual. Conseqüentemente a distribuição do lucro não pode ser determinada pelas variáveis do problema dual, já que o lucro a ser dividido ($\mathcal{L}(S)$) é menor que o total determinado pela solução dual ($\mathcal{D}(S)$). Isto explica os sinais de '?' nas colunas *Retorno 1*, *Retorno 2* e *Preço Final*, uma vez que esses valores não puderam ser determinados para este jogo.

Sendo mais específico, havendo *gap de integralidade* já não é certo de que haja solução de núcleo para o jogo. Para muitos problemas, é $\mathcal{NP}$-*Completo* verificar se o núcleo é vazio ou não. Goemans e Skutella [13] provaram que este é o caso para o problema *Facility Location*, e um comportamento semelhante é esperado para o modelo em questão.

Como observação final vale dizer que esta instância pequena do EXEMPLO 2 levou praticamente 10 minutos para ser resolvida. Apesar do computador utilizado[5] ser rápido para os padrões atuais, o método de resolução foi muito simplista. Foi feito um *Branch & Bound* para a determinação do valor das variáveis inteiras. Foram resolvidos aproximadamente 120000 problemas lineares (mostrando que o número de *branches* foi grande, mesmo para uma instância tão pequena).

Este fato vem comprovar a necessidade de métodos eficientes para se resolver o problema inteiro. Estes métodos não foram desenvolvidos neste trabalho, mas são um bom tema para trabalhos futuros.

[5]PC Athlon 1 GHz, 256 Mb.