

### 3

## Resultados Computacionais

Com o propósito de validar as heurísticas desenvolvidas para 2PNDP no Capítulo 2, analisam-se os desempenhos das variantes de GRASP e reconexão por caminhos. As soluções obtidas pela melhor variante de GRASP e reconexão por caminhos são comparadas com as soluções obtidas pelo algoritmo guloso de Dahl e Johannessen [25], para verificar como a heurística GRASP combinada com reconexão por caminhos se comporta.

Os resultados computacionais obtidos pela melhor variante de GRASP com reconexão por caminhos são comparados com os resultados obtidos pelas duas melhores variantes de GRASP com busca local tabu e com reconexão por caminhos, a fim de averiguar qual o papel que desempenha o acréscimo de um mecanismo de memória ao procedimento de busca local.

Estas heurísticas foram implementadas em C, usando a versão 2.95.2 do compilador gcc. Os experimentos foram realizados numa Sun Sparc Ultra 1 Creator com 256 Mbytes de RAM e sob o sistema operacional Sun Solaris 2.5.1. Os dados foram obtidos compartilhando-se o poder computacional da máquina com outros usuários e/ou outras aplicações do sistema.

Na Seção 3.1, a geração de problemas teste é discutida. Na Seção 3.2, é realizada uma análise das diferentes variantes de GRASP e reconexão por caminhos. Na Seção 3.3, a melhor variante de GRASP e reconexão por caminhos é comparada ao melhor algoritmo aproximado da literatura. Na Seção 3.4, os resultados obtidos pela melhor variante de GRASP e reconexão por caminhos são comparados com os resultados encontrados por duas variantes de GRASP e reconexão por caminhos acrescentadas de um mecanismo de memória à fase de busca local da heurística GRASP. Finalmente, na Seção 3.5, são feitas algumas considerações finais sobre os resultados seqüenciais.

### 3.1

#### Geração dos Problemas Teste

Para testar-se as variantes de GRASP e reconexão por caminhos, foram geradas 50 instâncias em grafos completos. Nesta classe de problemas, os custos associados às arestas foram gerados aleatoriamente em uma distribuição uniforme no intervalo  $[1, 10]$  e  $|D| = 10 \cdot |V|$ . As maiores instâncias possuíam 500 nós, 124750 arestas e 5000 pares origem-destino.

Já para comparar os resultados obtidos pelo algoritmo guloso de Dahl e Johannessen com os resultados obtidos pela melhor variante de GRASP e reconexão por caminhos, foram criadas 100 instâncias em grafos completos, similares às instâncias com pares origem-destino aleatórios, descritas no Capítulo 1. Nestas instâncias, os grafos continham 70 nós e 35 pares origem-destino. Os custos associados às 2415 arestas foram gerados aleatoriamente em uma distribuição uniforme no intervalo  $[1, 100]$ .

Acredita-se que as instâncias usadas para testar as variantes de GRASP e reconexão por caminhos sejam mais difíceis que as instâncias de [25], pois o conjunto de pares origem-destino é cerca de 20 vezes maior, quando comparadas duas instâncias com o mesmo número de nós.

### 3.2

#### Comparação entre as Diferentes Versões da Heurística GRASP

Para estudar o efeito da reconexão por caminhos como um procedimento de intensificação, cinco variantes de GRASP e reconexão por caminhos foram implementadas e avaliadas:

- G: é um algoritmo GRASP puro, sem reconexão por caminhos;
- GPRf: esta variante adiciona a G uma única trajetória de reconexão por caminhos unidirecional, começando de uma solução localmente ótima e usando como guia uma solução escolhida aleatoriamente dentre aquelas do conjunto de elite (*forward*);
- GPRb: esta variante adiciona a G uma única trajetória de reconexão por caminhos unidirecional, começando de uma solução escolhida aleatoriamente dentre aquelas do conjunto de elite e usando como guia uma solução localmente ótima (*backward*);
- GPRfb: esta variante combina GPRf e GPRb, executando a reconexão por caminhos nas duas direções (bidirecional);
- GPRm: esta variante adiciona a G a reconexão por caminhos mista.

Os resultados resumidos na Tabela 3.1 mostram que o comportamento destas cinco variantes é bastante uniforme sobre diferentes instâncias. Nesta tabela, são apresentados o melhor valor e o valor médio das soluções obtidas em dez execuções (com dez sementes distintas) das cinco variantes de GRASP. São apresentados resultados para cinco instâncias com 100 nós, cinco com 200 nós, cinco com 300 nós, cinco com 400 nós e cinco com 500 nós. Em cada grupo, o tempo de processamento foi limitado àquele obtido em 200 iterações da variante G para a primeira instância de cada grupo. Desta forma, as execuções sobre as instâncias de 100 nós foram limitadas em 95 segundos, as de 200 nós em 485 segundos, as de 300 nós em 1214 segundos, as de 400 nós em 2400 segundos e as de 500 nós em 3859 segundos.

Analisando-se a Tabela 3.1, observa-se que as variantes GPRfb e GPRm são melhores que as outras três, porque são sempre elas que encontram as melhores soluções com as mesmas limitações de tempo de processamento. As variantes GPRfb e GPRm também são sempre as que encontram os melhores valores médios, para todas instâncias testadas. Os resultados obtidos nesta tabela mostram que a variante GPRm é extremamente promissora, encontrando melhores soluções do que as demais em 40% das instâncias.

No restante deste capítulo, aprofunda-se a análise dos resultados obtidos para uma instância de 80 nós, 3160 arestas e 800 pares origem-destino e para uma outra instância maior com 90 nós, 4005 arestas e 900 pares origem-destino.

Nestas cinco variantes, a fase de busca local da heurística GRASP foi realizada pelo procedimento de busca local por ordem circular. Execuções independentes de cada variante foram realizadas para as instâncias pré-especificadas. Cada execução era encerrada quando uma solução de valor menor ou igual a um certo parâmetro alvo era encontrado. Foram considerados três valores alvo para cada instância. Um dos valores de alvo é escolhido como sendo a média de dez soluções encontradas em dez execuções da variante G com 4000 iterações, usando dez sementes distintas. O alvo mais fácil é um pouco superior a esta média. O alvo mais difícil é um pouco inferior a esta média. Para as execuções plotadas nas Figuras 3.1 e 3.4, os valores dos alvos foram 591 e 673, isto é, um pouco maiores que as médias calculadas. Os valores dos alvos 588 e 671 considerados para as execuções plotadas nas Figuras 3.2 e 3.5 foram escolhidos como as médias calculadas. Para as execuções plotadas nas Figuras 3.3 e 3.6, os valores dos alvos foram 558 e 669, isto é, um pouco menores que as médias calculadas. Execuções que excedem um limite de tempo máximo de execução pré-definido são simplesmente descartadas.

Instância	G		GPRf		GPRb		GPRfb		GPRm	
	melhor	média	melhor	média	melhor	média	melhor	média	melhor	média
100-1	779	784.3	760	772.8	763	769.3	749	762.7	755	765.3
100-2	762	769.6	730	749.4	735	746.0	729	741.7	736	745.7
100-3	773	779.2	762	769.3	756	766.1	757	763.6	754	765.1
100-4	746	752.0	732	738.4	723	736.7	719	730.4	717	732.2
100-5	756	762.3	742	749.7	739	746.5	737	742.9	728	743.7
200-1	1606	1614.7	1571	1584.4	1540	1568.0	1526	1562.0	1538	1564.3
200-2	1601	1608.8	1557	1572.8	1559	1567.9	1537	1558.9	1545	1563.3
200-3	1564	1578.2	1523	1541.9	1516	1531.9	1508	1519.9	1509	1528.7
200-4	1578	1585.6	1531	1553.3	1518	1538.1	1510	1532.2	1513	1534.7
200-5	1577	1599.6	1567	1575.4	1543	1563.5	1529	1556.3	1531	1556.1
300-1	2459	2481.9	2408	2425.0	2377	2401.3	2355	2399.2	2366	2393.6
300-2	2520	2527.7	2453	2469.7	2419	2449.1	2413	2438.9	2405	2439.4
300-3	2448	2463.5	2381	2403.1	2339	2373.8	2356	2375.3	2338	2370.3
300-4	2462	2482.1	2413	2436.2	2373	2409.3	2369	2400.9	2350	2401.0
300-5	2450	2458.8	2364	2402.5	2328	2368.6	2347	2373.9	2322	2365.4
400-1	3355	3363.8	3267	3285.5	3238	3257.0	3221	3239.4	3231	3252.2
400-2	3393	3417.5	3324	3338.2	3283	3306.8	3220	3292.2	3271	3301.4
400-3	3388	3394.4	3311	3322.4	3268	3291.9	3227	3275.1	3257	3273.2
400-4	3396	3406.0	3316	3326.5	3249	3292.0	3256	3284.8	3246	3287.9
400-5	3416	3429.3	3335	3365.5	3267	3327.7	3270	3313.9	3259	3323.5
500-1	4338	4350.1	4209	4247.1	4176	4207.6	4152	4196.1	4175	4206.2
500-2	4353	4369.6	4261	4278.6	4180	4233.7	4166	4219.6	4175	4226.3
500-3	4347	4360.7	4239	4257.8	4187	4224.8	4170	4201.9	4187	4217.9
500-4	4317	4333.8	4222	4238.6	4157	4197.4	4156	4182.2	4159	4197.1
500-5	4362	4370.4	4263	4292.0	4203	4294.0	4211	4236.8	4200	4240.2

Tabela 3.1: Resultados obtidos com dez execuções das cinco variantes com tempo de processamento pré-fixado.

Distribuições de probabilidade empíricas do tempo para alcançar o valor alvo são plotadas nas Figuras 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6. Para plotar a distribuição empírica para cada variante, foram realizadas 200 execuções independentes usando 200 sementes diferentes. Em cada execução, foi medido o tempo para alcançar uma solução cujo custo é menor ou igual ao alvo. Os tempos de execução foram ordenados ao final das 200 execuções. Associou-se ao  $i$ -ésimo menor tempo de processamento  $t_i$  a probabilidade  $p_i = (i - 0.5)/200$  e plotaram-se os pontos  $z_i = (t_i, p_i)$ , para  $i = 1, \dots, 200$  [3, 5].

Estas curvas ilustram que as cinco variantes possuem um comportamento semelhante. Para um dado tempo de processamento, a probabilidade de encontrar uma solução pelo menos tão boa quanto o alvo aumenta de G para GPRf, de GPRf para GPRb ou para GPRfb, porque as curvas relacionadas às estas duas estratégias são praticamente idênticas nas Figuras 3.2, 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6, e de GPRb ou de GPRfb para GPRm. Considerando-se, por exemplo, a Figura 3.2, a probabilidade de G encontrar o alvo em menos de 10 segundos é, aproximadamente, 5%, aumentando para 45%, no caso de GPRf. A probabilidade das variantes GPRb e GPRfb encontrarem o alvo em menos de 10 segundos é, aproximadamente, 78%, aumentando para 85%, no caso de GPRm.

Estes exemplos ilustram que a nova estratégia mista GPRm (curva mais à esquerda) revela-se extremamente promissora e melhora ainda mais os resultados alcançados pelas anteriores. Também mostraram que as estratégias GPRb e GPRfb são sistematicamente melhores que a estratégia GPRf. Esta última conclusão está de acordo com as conclusões obtidas por Ribeiro et al. [91]. Eles mostraram que melhores soluções são obtidas quando a reconexão por caminhos usa como solução inicial a solução selecionada aleatoriamente de um conjunto de soluções de elite.

Na Figura 3.7 são ilustradas as distribuições de probabilidade empíricas do tempo para alcançar o valor alvo da estratégia G para a instância de 80 nós, considerando os três valores de alvo das Figuras 3.1, 3.2 e 3.3. Esta figura ilustra que as distribuições de probabilidade empíricas são similares e que o comportamento do algoritmo é o mesmo para qualquer valor alvo, com a curva associada à distribuição de probabilidade deslocando-se para a direita a medida em que o alvo torna-se mais difícil (isto é, menor).

Os resultados obtidos nesta seção ilustram que a técnica de reconexão por caminhos é uma estratégia bastante eficaz para introduzir uma componente de memória em procedimentos do tipo GRASP, levando a implementações robustas.

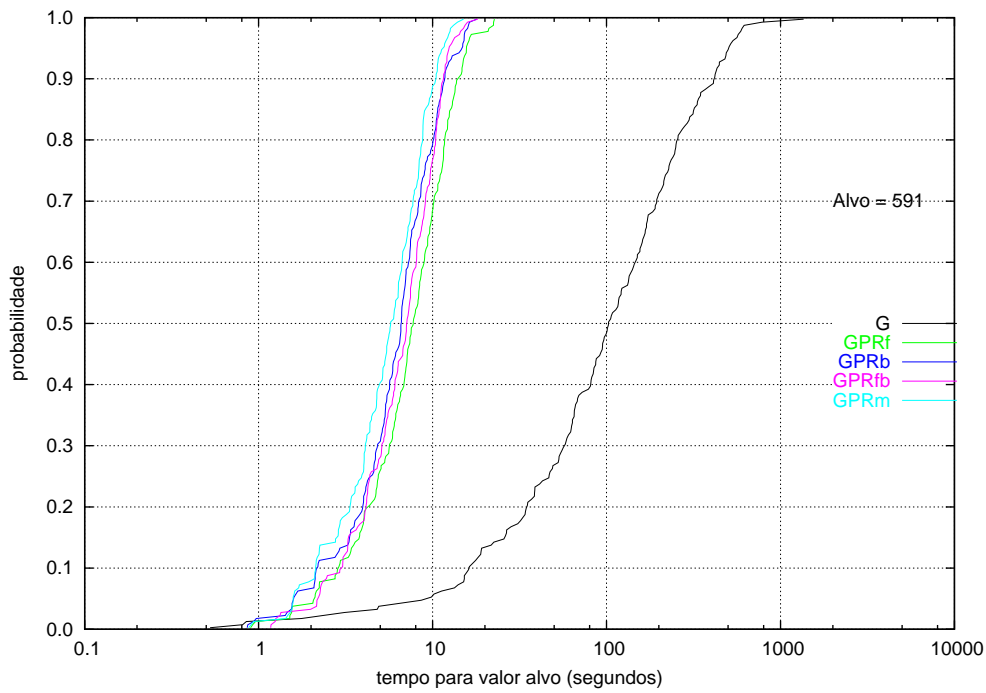


Figura 3.1: Comparação entre as variantes de GRASP e reconexão por caminhos para a instância de 80 nós com o valor do alvo igual a 591.

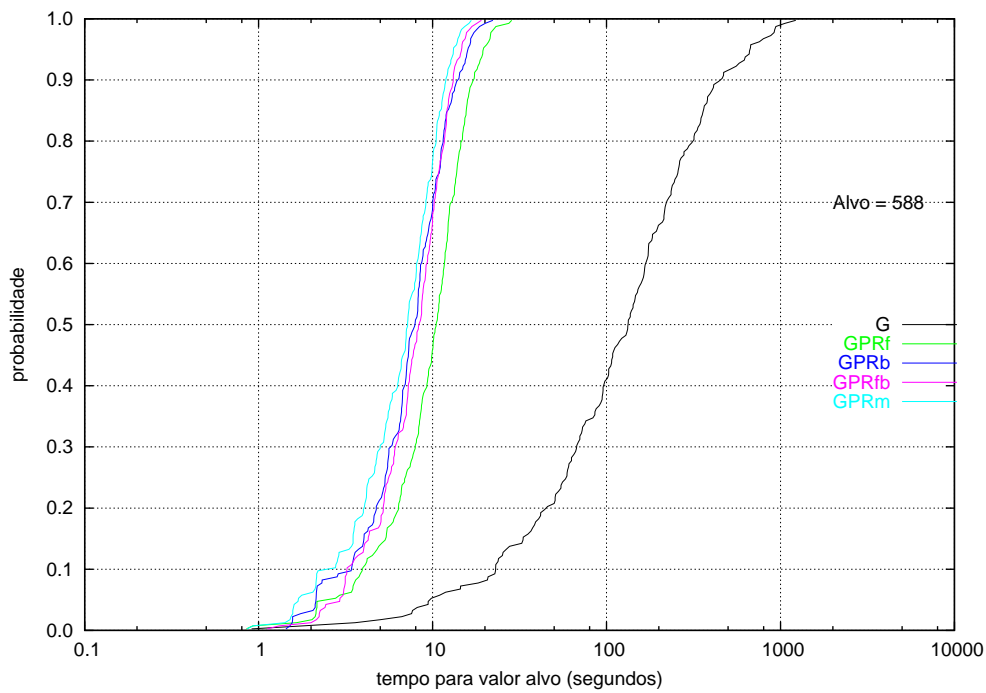


Figura 3.2: Comparação entre as variantes de GRASP e reconexão por caminhos para a instância de 80 nós com o valor do alvo igual a 588.

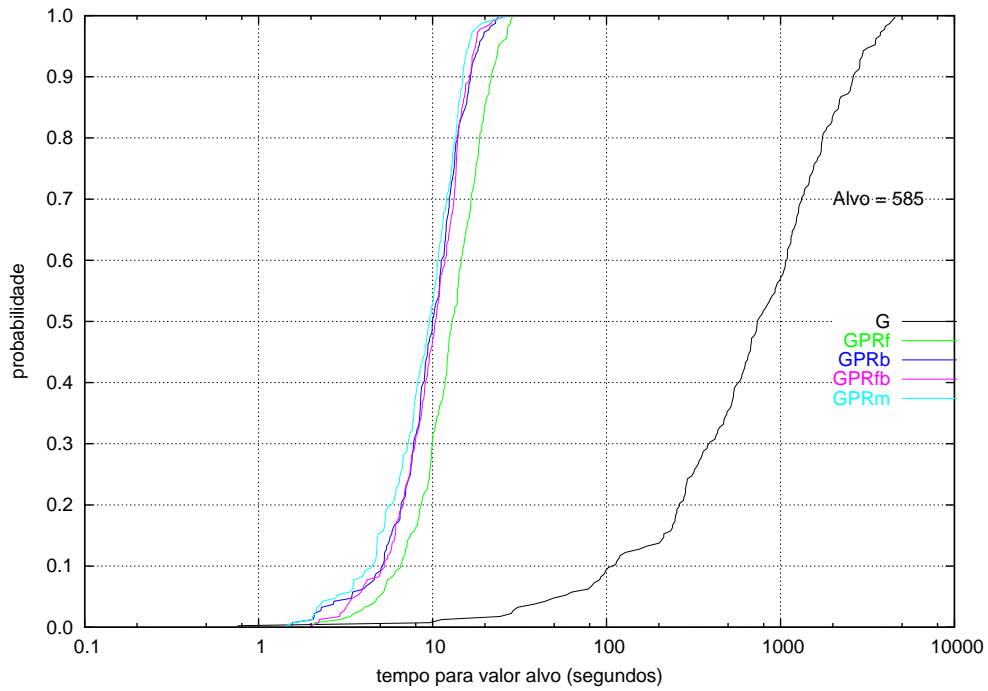


Figura 3.3: Comparação entre as variantes de GRASP e reconexão por caminhos para a instância de 80 nós com o valor do alvo igual a 585.

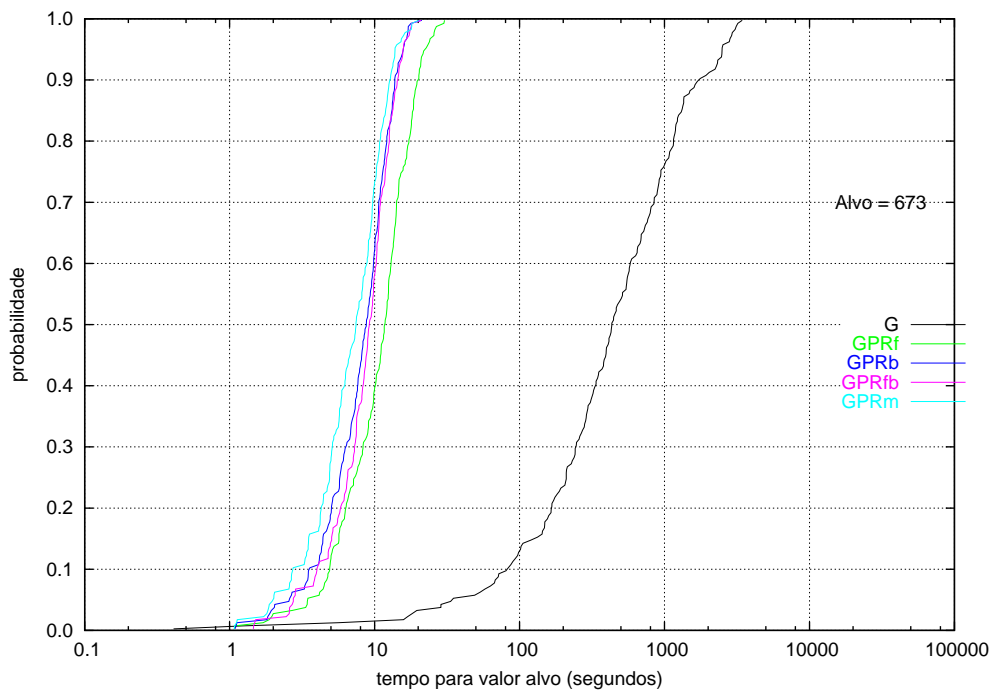


Figura 3.4: Comparação entre as variantes de GRASP e reconexão por caminhos para a instância de 90 nós com o valor do alvo igual a 673.

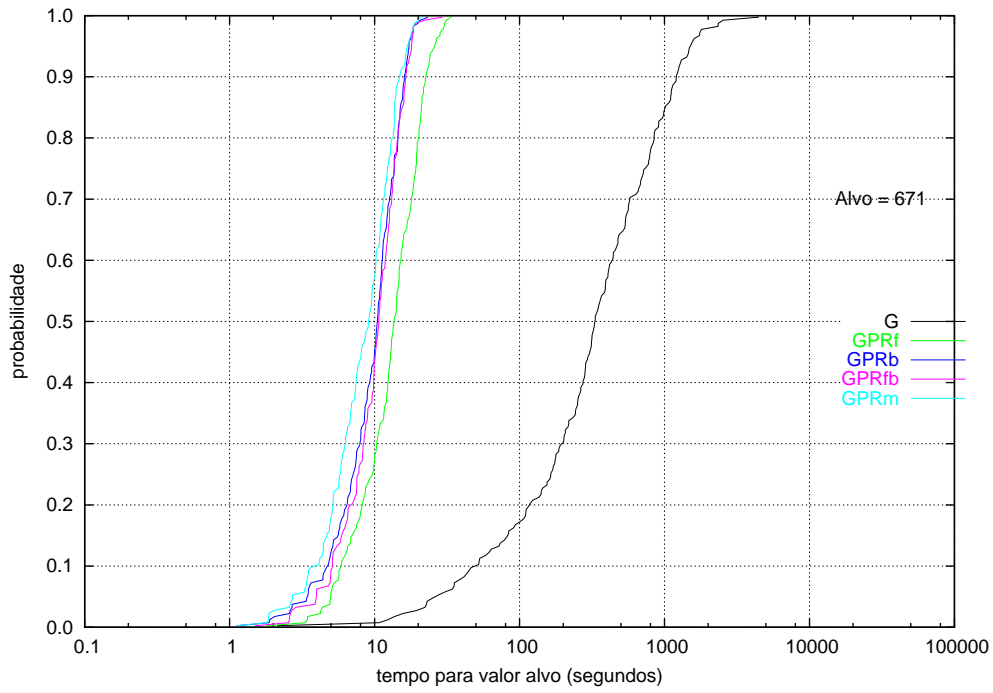


Figura 3.5: Comparação entre as variantes de GRASP e reconexão por caminhos para a instância de 90 nós com o valor do alvo igual a 671.

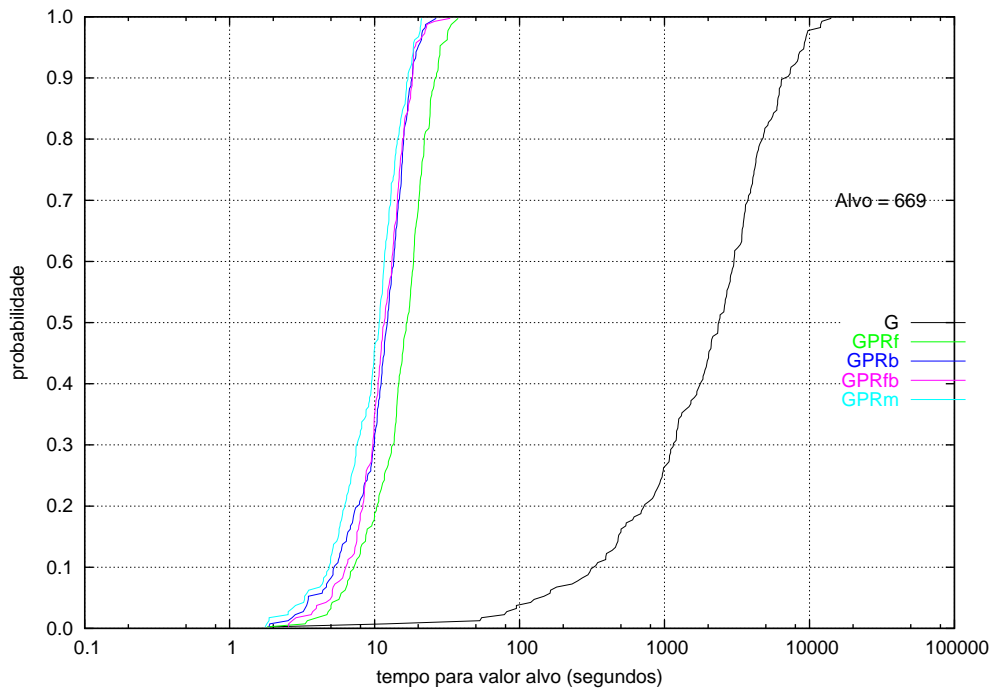


Figura 3.6: Comparação entre as variantes de GRASP e reconexão por caminhos para a instância de 90 nós com o valor do alvo igual a 669.



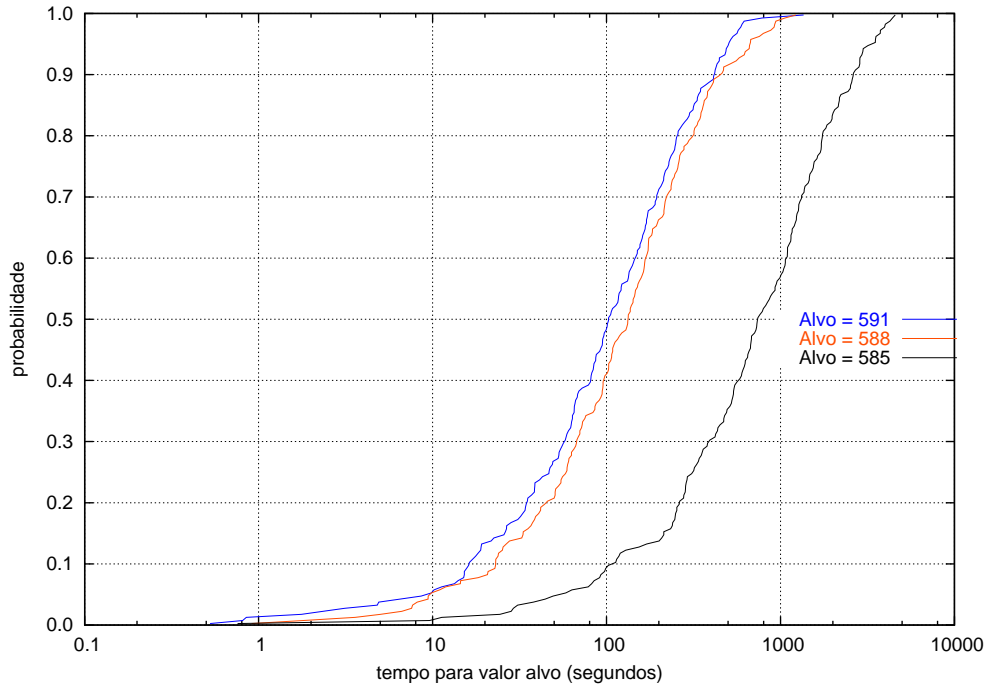


Figura 3.7: Comportamento da estratégia G para a instância de 80 nós, variando os valores do alvo.

Na próxima seção, as soluções encontradas pela variante GPRm são comparadas com as soluções obtidas pelo algoritmo aproximado guloso, para verificar como a heurística GPRm se comporta em termos das melhores soluções encontradas.

### 3.3

#### Comparação de GPRm com o Algoritmo Guloso

Para comparar o algoritmo guloso apresentado em [25] com a heurística GRASP com reconexão por caminhos mista desenvolvida neste trabalho, foi utilizado um teste estatístico baseado em observações desemparelhadas. Este teste só é válido quando não existe correspondência direta entre as observações de duas amostras [51]. De fato, este método foi a melhor maneira de se comparar os dois algoritmos, uma vez que as instâncias geradas por Dahl e Johannessen não foram disponibilizadas até o momento. Para realizar esta comparação, foram geradas 100 instâncias similares às 30 que foram usadas como problemas teste em [25], como descrito na Seção 3.1.

Este teste estatístico baseia-se no cálculo do intervalo de confiança da diferença das médias. Para determinar este intervalo, realiza-se uma estimativa do desvio padrão e dos graus de liberdade efetivos. Sejam  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  e  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  duas amostras aleatórias indepen-

dentos, onde  $|X| = n$  e  $|Y| = m$ . A média de cada amostra é calculada separadamente através da fórmula:

$$\mu_Z = \sum_{i=1}^{|Z|} z_i / |Z|.$$

O desvio padrão de cada amostra é computado usando a seguinte fórmula:

$$S_Z = \sqrt{(\sum_{i=1}^{|Z|} z_i^2 - |Z| \cdot \mu_Z^2) / (|Z| - 1)}.$$

A diferença das médias das duas amostras é calculada por  $\mu_{X-Y} = \mu_X - \mu_Y$  e o desvio padrão da diferença das médias é computado através da fórmula:

$$S_{X-Y} = \sqrt{S_X^2 / |X| + S_Y^2 / |Y|}.$$

Os graus de liberdade efetivos são calculados usando a seguinte fórmula:

$$\lfloor G \rfloor = -2 + S_{X-Y}^4 / [(S_X^2 / |X|)^2 / (|X| + 1) + (S_Y^2 / |Y|)^2 / (|Y| + 1)].$$

Finalmente, o intervalo de confiança das médias é dado por:

$$I = \mu_{X-Y} \pm t_{[1-\alpha/2, \lfloor G \rfloor]} \cdot S_{X-Y},$$

onde o quantile  $(1 - \alpha/2)$  da distribuição  $t$  com  $\lfloor G \rfloor$  graus de liberdade é um valor tabelado. Se o intervalo de confiança  $I$  inclui zero, as duas amostras não são diferentes. Senão, pode-se afirmar com  $100(1 - \alpha)\%$  de confiança que existem diferenças significativas entre as duas amostras.

Os valores das soluções encontradas pelo algoritmo guloso de Dahl e Johannessen para a  $i$ -ésima instância gerada em [25],  $i = 1, \dots, 30$ , são apresentadas na Tabela 3.2. Os valores das soluções obtidas pela variante GPRm para a  $j$ -ésima instância gerada neste trabalho,  $j = 1, \dots, 100$ , são mostradas na Tabela 3.3.

Os valores da média e do desvio padrão para o algoritmo guloso são respectivamente  $\mu_X = 453.66$  e  $S_X = 61.56$ . Os valores da média e do desvio padrão para a variante GPRm são respectivamente  $\mu_Y = 443.73$  e  $S_Y = 40.64$ . Os valores da diferença das médias, do desvio padrão da diferença das médias e dos graus de liberdade efetivos são  $\mu_{X-Y} = 9.93$ ,  $S_{X-Y} = 11.95$  e  $\lfloor G \rfloor = 38$ , respectivamente. Em um intervalo com 40% de confiança, tem-se que  $100(1 - \alpha) = 40$ ,  $\alpha = 0.6$  e  $1 - \alpha/2 = 0.7$ . O  $t$ -valor com 60 graus de liberdade (na verdade, era necessário somente 38) é  $t[0.7, 60] = 0.53$ . Assim,  $I = 9.93 \pm 6.30 = (3.63, 16.23)$ .

Como este intervalo não inclui o zero, pode-se afirmar, com 40% de confiança, que a heurística GRASP com reconexão por caminhos mista é melhor que o algoritmo guloso de [25]. Não foi possível aumentar a percentagem de confiança porque Dahl e Johannessen comprovaram em [25] que seu algoritmo guloso consegue alcançar a otimalidade para uma parte de suas instâncias. Nos testes realizados neste trabalho, a variante GPRm atinge a otimalidade em diversas instâncias usadas na comparação com o algoritmo aproximado guloso. Este é um dos motivos que reforça a idéia de que estas instâncias parecem ser mais fáceis que a classe de instâncias usadas para testar as variantes de GRASP e reconexão por caminhos.

Ainda analisando os resultados obtidos por este teste estatístico, pode-se comprovar que a heurística seqüencial reduziu de cerca de 2.2% o custo médio das soluções encontradas, em relação àquele obtido pelo algoritmo aproximado guloso. Além disto, a heurística GRASP foi aplicada a instâncias bem maiores que as de [25]. Esta heurística foi testada com instâncias que continham 500 nós, 124750 arestas e 5000 pares origem-destino, enquanto que aquela apresentada em [25] foi aplicada a problemas com, no máximo, 120 nós, 7140 arestas e 60 pares origem-destino.

Outro teste estatístico foi usado para comprovar que a heurística GRASP com reconexão por caminhos mista é melhor que o algoritmo guloso de [25]. O teste *Mann-Whitney*, também conhecido como teste *Wilcoxon* ou análise *Kruskal-Wallis one-way*, é comumente usado quando são analisadas duas amostras independentes, possivelmente de tamanhos diferentes, e se deseja utilizar um teste estatístico para rejeitar a hipótese nula de que não existem diferenças significativas entre estas duas amostras, com um nível de significância  $\alpha$  [22, 50, 94].

Segundo [94], este é um dos testes estatísticos não-paramétricos mais utilizados e se constitui numa alternativa para testes que usam a tabela  $t$ , quando os valores calculados estatisticamente são inferiores aos valores da escala de intervalos de  $t$ . Sejam  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  e  $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$  duas amostras aleatórias independentes, onde  $|X| = n$  e  $|Y| = m$ . A hipótese nula é que  $X$  e  $Y$  sejam semelhantes. A hipótese alternativa é que existam diferenças significativas entre  $X$  e  $Y$ . Quando se deseja rejeitar a hipótese nula em favor da hipótese alternativa, os cálculos realizados devem fornecer uma probabilidade de ocorrência da hipótese nula menor ou igual a um valor bastante pequeno chamado de nível de significância ( $\alpha$ ). De acordo com [22, 94], os valores mais comuns de  $\alpha$  são 0.01 e 0.05.

O método é descrito a seguir. Seja  $Z$  a amostra formada por todos os elementos das amostras  $X$  e  $Y$ , com  $|Z| = m+n$ . Os elementos da amostra  $Z$

são ordenados em ordem crescente, isto é,  $z_{i+1} \geq z_i, \forall i = 1, \dots, m+n-1$ . Os elementos da amostra  $X$  e  $Y$  também são ordenados em ordem crescente separadamente. Associa-se um valor  $p_i$  a cada elemento  $z_i$  da amostra  $Z$  ordenada,  $i = 1, \dots, m+n$ . Se o valor  $z_i$  aparece uma única vez na amostra  $Z$  ordenada, define-se  $p_i = i$ . Caso o valor  $z_i$  se repita  $q$  vezes a partir do  $i$ -ésimo elemento da amostra, isto é,  $z_i = z_{i+1} = \dots = z_{i+q-1}$ , define-se  $p_i = p_{i+1} = \dots = p_{i+q-1} = \sum_{j=i}^{i+q-1} j/q$ .

Calcula-se então  $R_X = \sum_{i=1}^{m+n} \{p_i : \exists x \in X \text{ satisfazendo } x = z_i\}$  e  $R_Y = \sum_{i=1}^{m+n} \{p_i : \exists y \in Y \text{ satisfazendo } y = z_i\}$ . O valor de  $T$  é dado por:

$$T = R_X - [n(n+1)]/2.$$

Se  $n$  e  $m$  forem menores ou iguais a 20,  $T$  deve ser comparado ao  $p$ -ésimo quantile  $w_p$  do teste estatístico *Mann-Whitney*, onde  $p = 1 - \alpha$ . Se  $n$  ou  $m$  é maior que 20,  $T$  deve ser comparado com o valor  $w_p$  calculado através da fórmula

$$w_p = nm/2 + s_p \sqrt{nm(n+m+1)/12},$$

onde  $s_p$  é o  $p$ -ésimo quantile da distribuição normal. Se  $T > w_p$  a hipótese nula deve ser rejeitada em favor da hipótese alternativa.

Para comparar a variante GPRm com o algoritmo guloso, as seguintes suposições são feitas:

- hipótese nula: não existem diferenças significativas entre as soluções encontradas pelo algoritmo guloso e pela variante GPRm;
- hipótese alternativa: existem diferenças significativas entre as soluções encontradas pelo algoritmo guloso e pela variante GPRm.

O nível de significância escolhido foi  $\alpha = 0.49$  e os números de execuções do algoritmo guloso e da variante GPRm são 30 e 100, respectivamente.

A soma dos valores atribuídos as soluções encontradas pelo algoritmo guloso é 2006. Para obter o valor de  $T$ , tem-se que:

$$T = R_{DJ} - [n_{DJ}(n_{DJ} + 1)/2] = 1541.$$

Calculando  $w_{0.51}$ , tem-se que

$$w_{0.51} = n_{DJ}n_{GPRm}/2 + s_{0.51} \sqrt{n_{DJ}n_{GPRm}(n_{DJ} + n_{GPRm} + 1)/12} = 1521.74,$$

onde  $s_{0.51} = 0.0251$ . Como  $T > w_{0.51}$ , a hipótese nula deve ser rejeitada em favor da hipótese alternativa. Assim, com uma probabilidade de 51%, pode-se afirmar que existem diferenças significativas entre as soluções encontradas pelo algoritmo guloso e pela variante GPRm.

Instância	Guloso	Instância	Guloso	Instância	Guloso
DJ1	424	DJ11	524	DJ21	511
DJ2	459	DJ12	448	DJ22	425
DJ3	424	DJ13	570	DJ23	457
DJ4	420	DJ14	343	DJ24	410
DJ5	544	DJ15	386	DJ25	453
DJ6	431	DJ16	393	DJ26	504
DJ7	412	DJ17	426	DJ27	578
DJ8	483	DJ18	489	DJ28	444
DJ9	346	DJ19	537	DJ29	430
DJ10	411	DJ20	533	DJ30	395

Tabela 3.2: Resultados da execução do algoritmo guloso de Dahl e Johannessen.

Instância	GPRm	Instância	GPRm	Instância	GPRm	Instância	GPRm
70-1	493	70-26	447	70-51	436	70-76	456
70-2	436	70-27	470	70-52	460	70-77	372
70-3	462	70-28	455	70-53	387	70-78	493
70-4	473	70-29	388	70-54	464	70-79	474
70-5	462	70-30	508	70-55	394	70-80	439
70-6	387	70-31	456	70-56	366	70-81	409
70-7	423	70-32	443	70-57	430	70-82	390
70-8	394	70-33	457	70-58	407	70-83	534
70-9	561	70-34	449	70-59	429	70-84	426
70-10	526	70-35	443	70-60	467	70-85	440
70-11	426	70-36	423	70-61	469	70-86	522
70-12	424	70-37	359	70-62	436	70-87	372
70-13	473	70-38	438	70-63	429	70-88	421
70-14	448	70-39	478	70-64	390	70-89	461
70-15	471	70-40	408	70-65	452	70-90	418
70-16	497	70-41	400	70-66	428	70-91	394
70-17	469	70-42	494	70-67	504	70-92	449
70-18	461	70-43	433	70-68	439	70-93	439
70-19	344	70-44	469	70-69	472	70-94	484
70-20	467	70-45	456	70-70	350	70-95	483
70-21	435	70-46	493	70-71	491	70-96	465
70-22	466	70-47	489	70-72	377	70-97	449
70-23	444	70-48	406	70-73	421	70-98	477
70-24	463	70-49	446	70-74	425	70-99	408
70-25	432	70-50	461	70-75	404	70-100	466

Tabela 3.3: Resultados da execução da heurística GRASP com reconexão por caminhos.

### 3.4

#### GRASP com Reconexão por Caminhos e Busca Local Tabu

Utilizando o mesmo tipo de análise descrita na Seção 3.2, três variantes de GRASP com reconexão por caminhos são analisadas, para estudar o efeito que desempenha o acréscimo de um mecanismo de memória ao procedimento de busca local:

- GPRm: esta variante foi descrita na Seção 3.2;
- GPRm + BLTabu ( $|LT| = 4$ ): esta variante de GRASP com reconexão por caminhos mista usa, na fase de busca local da heurística GRASP, o procedimento de busca local tabu com a cardinalidade da lista de soluções proibidas igual a quatro;
- GPRfb + BLTabu ( $|LT| = 4$ ): esta variante de GRASP com reconexão por caminhos bidirecional usa, na fase de busca local da heurística GRASP, o procedimento de busca local tabu com a cardinalidade da lista de soluções proibidas igual a quatro.

Pelo fato de que as variantes de GRASP com reconexão por caminhos mista e bidirecional forneceram os melhores resultados para as ilustrações realizadas na Seção 3.2, somente elas foram levadas em consideração nesta análise.

O comportamento destas três variantes é bastante uniforme sobre diferentes instâncias. Ilustram-se os resultados obtidos sobre as duas instâncias pré-especificadas na Seção 3.2. Distribuições de probabilidade empíricas do tempo para alcançar o valor alvo são plotadas nas Figuras 3.8 e 3.9. Duzentas execuções independentes de cada variante foram realizadas para as instâncias pré-especificadas. Cada execução era encerrada quando uma solução de valor menor ou igual a um certo parâmetro alvo era encontrado. Os alvos das Figuras 3.8 e 3.9 foram 588 e 671, ou seja, os mesmos usados nas Figuras 3.2 e 3.5 na Seção 3.2.

As curvas das Figuras 3.8 e 3.9 ilustram que as três variantes possuem um comportamento semelhante. Para um dado tempo de processamento, a probabilidade de encontrar uma solução pelo menos tão boa quanto o alvo é maior para GPRm, porque as curvas relacionadas às duas estratégias que possuem o procedimento de busca local tabu são praticamente idênticas.

Estas curvas ilustram que o acréscimo de um mecanismo de memória à fase de busca local não fornece melhoria em termos da convergência para o alvo. As curvas relacionadas às estratégias que possuem o mecanismo de memória no procedimento de busca local encontram-se à direita da curva

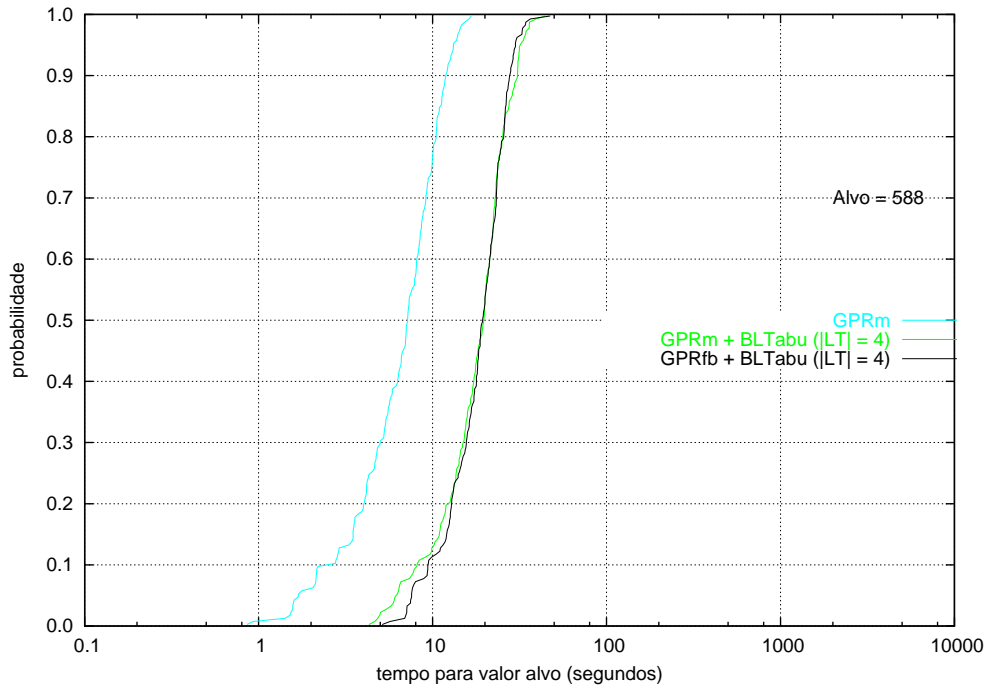


Figura 3.8: Comparação entre as variantes de GRASP e reconexão por caminhos com o procedimento de busca local tabu para a instância de 80 nós com o valor do alvo igual a 588.

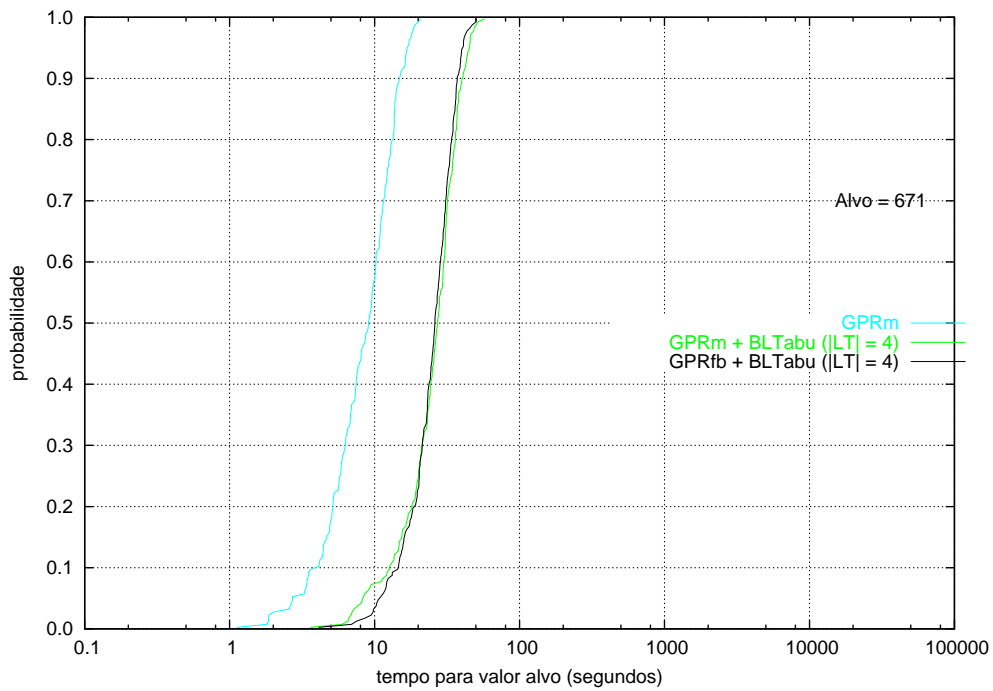


Figura 3.9: Comparação entre as variantes de GRASP e reconexão por caminhos com o procedimento de busca local tabu para a instância de 90 nós com o valor do alvo igual a 671.

cujo procedimento de busca local é desprovido de memória. Uma possível justificativa para este fato é que o tempo gasto nas comparações entre as soluções aprimorantes e as soluções pertencentes à lista de soluções proibidas é sobremaneira significativo.

### 3.5

#### Comentários Finais

Neste capítulo foram realizados experimentos computacionais das implementações das heurísticas seqüenciais para 2PNDP, discutidas no Capítulo 2. Os resultados obtidos pelas execuções da heurística GRASP combinada com a nova estratégia de reconexão por caminhos mista ilustram que esta variante é extremamente promissora, pois melhorou ainda mais os resultados alcançados pelas outras variantes de GRASP e reconexão por caminhos. Além disto, os resultados computacionais obtidos pelas variantes de GRASP e reconexão por caminhos ilustram que a estratégia de reconexão é bastante eficaz para introduzir uma componente de memória em procedimentos do tipo GRASP, levando a implementações robustas.

Quando a variante da heurística GRASP combinada com reconexão por caminhos mista foi comparada ao algoritmo aproximado guloso da literatura, foi possível mostrar que houve uma melhoria significativa na qualidade das soluções encontradas.

Quando um mecanismo de memória foi adicionado à fase de busca local da heurística GRASP com reconexão por caminhos, não foi possível conseguir melhoria em termos da sua convergência para o alvo, porque o tempo gasto nas comparações entre as soluções aprimorantes e as soluções pertencentes à lista de soluções proibidas é grande.

No próximo capítulo são desenvolvidas estratégias independentes e colaborativas para a paralelização da heurística GRASP com reconexão por caminhos bidirecional para 2PNDP.