3
Distribuição das variáveis externas (granulares)

Nosso objetivo é encontrar, a partir da equação (2.28), uma equação para a derivada em relação ao tempo da função distribuição das variáveis externas que definimos como

$$\mathrm{W}(\chi_T, t) = \int d\chi_I' \, \rho\,(\chi_I', \chi_T\,, t\,). \tag{3.1}$$

3.1 Equação de Fokker-Plank

Uma equação diferencial para uma função de probabilidade em primeira ordem em relação ao tempo e em segunda ordem das derivadas parciais em relação as variáveis estocásticas é o que se conhece como equação de Fokker-Plank.

Uma equação diferencial exata, que envolve infinitos termos, em todas as ordens das derivadas parciais em relação as variáveis estocásticas é conhecida como a equação de Kramers-Moyal. Em geral, para poder trabalhar com uma equação diferencial, a série de Kramers-Moyal é truncada em alguma ordem e como o teorema de Pawula[24] diz que ordens maiores do que dois podem ter como solução uma função de probabilidade que apresente valores negativos, o truncamento deve ser feito na segunda ordem, gerando assim, uma equação de Fokker-Plank.

No presente capítulo geraremos uma equação de Fokker-Plank para a função distribuição definida acima.

3.2 Eliminação de variáveis rápidas

A equação exata (2.28), não é manejável e só pode ser tratada eliminando-se os graus de liberdade microscópicos (rápidos) através de um processo de tomada de médias[25]. Desta maneira, nosso objetivo é encontrar uma equação efetiva para a ditribuição granular reduzida, definida acima.

O método que vamos usar é o método da eliminação das váriaveis rápidas. Ou seja procuraremos uma equação para as variáveis lentas corrigidas pela influência que as variáveis rápidas produzem no sistema[26,25]. A idéia é estimar um parâmetro pequeno que surja naturalmente e estabeleça as diferenças das escalas de tempo no sistema. Nos modelos prévios para sistemas granulares, este papel foi desenvolvido pela razão entre a massa das partículas atômicas e a massa do grão[1], $\varepsilon = \sqrt{\mu/m}$, o que reflete o grande número de átomos que constituem o grão. No obstante, em um estado estacionário granular, o parâmetro ε tem que ser modificado para poder levar em conta o fato de a temperatura granular

$$T_g \equiv \left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{3m} \right\rangle$$

obedecer a $T_g \gg k_B T$. Já que

$$\frac{P^2}{m} \sim m v_g^2 \sim T_g, \qquad \text{e} \qquad \frac{\pi^2}{\mu} \sim \mu \dot{\xi}^{\,2} \sim k_B T,$$

o parâmetro

$$\varepsilon \sim v_g/\dot{\xi} \sim \sqrt{\frac{\mu}{m} \frac{T_g}{k_B T}}$$

fixa a separação da escala de tempo no gás granular. Um valor típico para este parâmetro é da ordem de 10^{-3} enquanto em modelos prévios[1] este era da ordem de 10^{-9}.

3.3 Aplicação do método

Começamos escrevendo a equação (2.28) com o parâmetro ε que servirá para identificar a parte lenta e a rápida desta equação.

$$\partial_t \rho = \mathrm{L}^{(0)} \rho + \varepsilon \mathrm{L}^{(1)} \rho, \tag{3.2}$$

onde, usando (2.6)

$$L^{(0)} = \mathrm{L_I} + \nabla_{\xi^N} \phi \cdot \nabla_{\pi^N} \qquad \text{e} \qquad L^{(1)} = \mathrm{L_T} + \nabla_{r^N} \phi \cdot \nabla_{p^N} + M_\varsigma \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}.$$

3.3.1 Operador de projeção

Conforme detalhado no apêndice, precisamos encontrar o operador de projeção $\mathcal{P}$ que satisfaça a condição (A.3). Podemos ver facilmente que o operador de projeção que satisfaz esta condição é um que atue numa variável dinâmica $g \equiv g(\chi_T, \chi_I, t)$ da seguinte maneira

$$\mathcal{P} g = \tilde{\rho}(r, \chi_I) \int d\chi'_I\, g(\chi_T, \chi'_I, t), \tag{3.3}$$

onde $\tilde{\rho}$ é uma função da forma

$$\tilde{\rho}(r,\chi_I) \equiv \frac{e^{-\beta(H_I+\phi)}}{\int d\chi_I \; e^{-\beta(H_I+\phi)}},$$

tal que

$$\int d\chi_I \; \tilde{\rho}(r,\chi_I) = 1;$$

Com ϕ dado por (2.4). As duas identidades

$$\int d\chi_I \; (\mathrm{L_I} + \nabla_{\xi^N}\phi \cdot \nabla_{\pi^N}) \equiv 0 \qquad \text{e} \qquad (\mathrm{L_I} + \nabla_{\xi^N}\phi \cdot \nabla_{\pi^N})\tilde{\varrho} = 0$$

garantem que a condição (A.3) seja satisfeita[26].

3.3.2 Obtenção da equação de Fokker-Planck

Vamos escrever a equação para as variáveis lentas (A.23). Calculamos cada termo do lado direito dessa equação. Lembremos que $y = \mathcal{P}\rho$ e que no presente caso $y = \tilde{\rho}(r,\chi_I)\mathrm{W}(\chi_T,t)$, assim, temos a seqüência:

Termo Ay

$$\begin{aligned} Ay &= \mathcal{P}\mathrm{L}^{(1)}\mathrm{y} \\ &= \tilde{\rho}(r,\chi_I)\int d\chi_I' \; (\mathrm{L_T} + \nabla_{r^N}\phi \cdot \nabla_{p^N} + M_\varsigma \nabla_{p^N}\cdot\nabla_{p^N})\,\tilde{\rho}(r,\chi_I')\,\mathrm{W}(\chi_T,t) \\ &= \tilde{\rho}(r,\chi_I)(\mathrm{L_T} + \langle\nabla_{r^N}\phi\rangle_o \cdot \nabla_{p^N} + M_\varsigma \nabla_{p^N}\cdot\nabla_{p^N})\mathrm{W}(\chi_T,t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

onde

$$\langle\nabla_{r^N}\phi\rangle_o = \int d\chi_I \; \tilde{\rho}\,\nabla_{r^N}\phi.$$

Termo $BE^{-1}Cy$

Para calcular este termo façamos primeiro agir C em y

$$\begin{aligned} Cy &= \mathcal{Q}L^{(1)}Py \\ &= \mathcal{Q}\{(\mathrm{L_T} + \nabla_{r^N}\phi \cdot \nabla_{p^N} + M_\varsigma \nabla_{p^N}\cdot\nabla_{p^N})\tilde{\rho}(r,\chi_I)\mathrm{W}(\chi_T,t)\} \\ &= \mathcal{Q}\{\tilde{\rho}(r,\chi_I)\mathrm{L_T}\mathrm{W}(\chi_T,t) + \mathrm{W}(\chi_T,t)\mathrm{L_T}\tilde{\rho}(r,\chi_I) + \tilde{\rho}(r,\chi_I)\nabla_{r^N}\phi \cdot \nabla_{p^N}\mathrm{W}(\chi_T,t) \\ &\quad + \tilde{\rho}(r,\chi_I)\, M_\varsigma \nabla_{p^N}\cdot\nabla_{p^N}\mathrm{W}(\chi_T,t)\}. \end{aligned}$$

Como o operador $\mathcal{Q}$ é linear, e por definição ele não age nas funções de variáveis externas, temos que

$$\begin{aligned} Cy &= \mathcal{Q}\{\tilde{\rho}(r,\chi_I)\}\{\mathrm{L_T} + M_\varsigma \nabla_{p^N}\cdot\nabla_{p^N}\}\mathrm{W}(\chi_T,t) \\ &\quad \mathrm{W}(\chi_T,t)\mathcal{Q}\{\mathrm{L_T}\tilde{\rho}(r,\chi_I)\} + \nabla_{p^N}\mathrm{W}(\chi_T,t)\cdot\mathcal{Q}\{\tilde{\rho}(r,\chi_I)\nabla_{r^N}\phi\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima se cancela por causa da seguinte propriedade

$$\mathcal{Q}\{\tilde{\rho}(r,\chi_I)\} \equiv 0.$$

O segundo termo se pode simplificar assim:

$$\begin{aligned} \mathrm{W}(\chi_T,t)\mathcal{Q}\{\mathrm{L_T}\tilde{\rho}(r,\chi_I)\} &= \mathrm{W}(\chi_T,t)\mathcal{Q}\{-\frac{p^N}{m}\cdot\nabla_{r^N}\tilde{\rho}(r,\chi_I)\} \\ &= \mathrm{W}(\chi_T,t)\{-\frac{p^N}{m}\cdot\nabla_{r^N}\tilde{\rho}(r,\chi_I)\}. \end{aligned}$$

É fácil mostrar que

$$\nabla_{r^N}\tilde{\rho}(r,\chi_I) = -\beta\tilde{\rho}(r,\chi_I)\widehat{\nabla_{r^N}\phi},$$

onde definimos

$$\widehat{\nabla_{r^N}\phi} \equiv \nabla_{r^N}\phi - \langle\nabla_{r^N}\phi\rangle_o. \tag{3.6}$$

Então temos que

$$\mathrm{W}(\chi_T,t)\mathcal{Q}\{\mathrm{L_T}\tilde{\rho}(r,\chi_I)\} = \beta\,\mathrm{W}(\chi_T,t)\tilde{\rho}(r,\chi_I)\,\frac{p^N}{m}\cdot\widehat{\nabla_{r^N}\phi}.$$

Assim

$$Cy = \tilde{\rho}(r,\chi_I)\widehat{\nabla_{r^N}\phi}\cdot\{\beta\frac{p^N}{m}+\nabla_{p^N}\}\mathrm{W}(\chi_T,t). \tag{3.7}$$

Vamos simplificar o operador B:

$$\begin{aligned} B &\equiv \mathcal{P}\mathrm{L}^{(1)}\mathcal{Q} \\ &\equiv \tilde{\rho}(r,\chi_I)\int d\chi_I\ (\mathrm{L_T}+\nabla_{r^N}\phi\cdot\nabla_{p^N}+\xi\nabla_{p^N}\cdot\nabla_{p^N})\mathcal{Q} \\ &\equiv \tilde{\rho}(r,\chi_I)(\mathrm{L_T}+\nabla_{r^N}\phi\cdot\nabla_{p^N})\int d\chi_I\ \mathcal{Q}+\tilde{\rho}(r,\chi_I)\int d\chi_I\ \nabla_{r^N}\phi\cdot\nabla_{p^N}\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

Como pode verificar-se a partir da definição do operador $\mathcal{Q}$

$$\int d\chi_I\ \mathcal{Q} \equiv 0.$$

Ao usarmos a definição (3.6) obtemos

$$B \equiv \tilde{\rho}(r,\chi_I)\int d\chi_I\ \widehat{\nabla_{r^N}\phi}\cdot\nabla_{p^N}\mathcal{Q}. \tag{3.8}$$

Portanto

$$BE^{-1}Cy = \tilde{\rho}(r,\chi_I)\int d\chi_I\ \widehat{\nabla_{r^N}\phi}\cdot\nabla_{p^N}\mathcal{Q}E^{-1}\tilde{\rho}(r,\chi_I)\widehat{\nabla_{r^N}\phi}\cdot\{\beta\frac{p^N}{m}+\nabla_{p^N}\}\mathrm{W}(\chi_T,t). \tag{3.9}$$

O operador inverso de E pode ser escrito como

$$E^{-1} = -\int_0^\infty e^{\tau \mathrm{L}^{(0)}} d\tau. \tag{3.10}$$

Notemos que a ação do operador $\mathcal{Q}$ sobre as potências de $\mathrm{L}^{(0)}$ é

$$\mathcal{Q}\{\mathrm{L}^{(0)}\}^{\mathrm{k}} = \{\mathrm{L}^{(0)}\}^{\mathrm{k}},$$

e também que

$$\int d\chi_I \; \tilde{\rho}(r,\chi_I)\widehat{\nabla_{r^N}\phi} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{Q}\tilde{\rho}(r,\chi_I)\widehat{\nabla_{r^N}\phi} = \tilde{\rho}(r,\chi_I)\widehat{\nabla_{r^N}\phi}.$$

Portanto ao inserir a equação (3.10) obtemos

$$\begin{aligned} BE^{-1}Cy &= -\tilde{\rho}(r,\chi_I)\int_0^\infty d\tau \int d\chi_I \; \widehat{\nabla_{r^N}\phi}\cdot\nabla_{p^N}\, e^{\tau \mathrm{L}^{(0)}}\tilde{\rho}(r,\chi_I)\widehat{\nabla_{r^N}\phi}\cdot\{\beta\frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N}\}\mathrm{W}(\chi_T,t) \\ &= -\tilde{\rho}(r,\chi_I)\int_0^\infty d\tau \left\{\int d\chi_I \; \widehat{\nabla_{r^N}\phi}\, e^{\tau \mathrm{L}^{(0)}}\tilde{\rho}(r,\chi_I)\widehat{\nabla_{r^N}\phi}\right\} : \nabla_{p^N}\{\beta\frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N}\}\mathrm{W}(\chi_T,t), \end{aligned}$$

onde a expressão entre chaves é um produto interno. Então

$$BE^{-1}Cy = -\tilde{\rho}(r,\chi_I)\int_0^\infty d\tau \left\{\int d\chi_I \; \tilde{\rho}(r,\chi_I)\widehat{\nabla_{r^N}\phi}\, e^{\tau \mathrm{L}^{(0)\dagger}}\widehat{\nabla_{r^N}\phi}\right\} : \nabla_{p^N}\{\beta\frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N}\}\mathrm{W}(\chi_T,t). \tag{3.11}$$

Pode-se mostrar, integrando por partes, que

$$\mathrm{L}^{0\dagger} = (\mathrm{L_I} + \nabla_{\xi^N}\phi\cdot\nabla_{\pi^N})^\dagger = -(\mathrm{L_I} + \nabla_{\xi^N}\phi\cdot\nabla_{\pi^N}).$$

Usando esta identidade e a definição de $\langle \ldots \rangle_o$ temos

$$BE^{-1}Cy = -\tilde{\rho}(r,\chi_I)\int_0^\infty d\tau \langle \widehat{\nabla_{r^N}\phi}\, e^{-\tau \mathrm{L}^{(0)}}\widehat{\nabla_{r^N}\phi}\rangle_o : \nabla_{p^N}\{\beta\frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N}\}\mathrm{W}(\chi_T,t). \tag{3.12}$$

Definindo o tensor

$$\Gamma(r^N) = \int_0^\infty d\tau \langle \widehat{\nabla_{r^N}\phi}\, e^{-\tau \mathrm{L}^{(0)}}\widehat{\nabla_{r^N}\phi}\rangle_o, \tag{3.13}$$

obtemos finalmente

$$BE^{-1}Cy = -\tilde{\rho}(r,\chi_I)\Gamma(r^N) : \nabla_{p^N}\{\beta\frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N}\}\mathrm{W}(\chi_T,t). \tag{3.14}$$

Equação de Fokker-Planck

A equação para a variável y que procuramos é, em primeira ordem em ε, na escala $s = \epsilon t$, equação (A.22), a seguinte:

$$\partial_s y = \tilde{\rho}(r, \chi_I)(\mathrm{L_T} + \langle \nabla_{r^N} \phi \rangle_o \cdot \nabla_{p^N} + M_\varsigma \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}) \mathrm{W}(\chi_T, t)$$
$$+ \varepsilon \tilde{\rho}(r, \chi_I) \Gamma(r^N) : \nabla_{p^N} \{\beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N}\} \mathrm{W}(\chi_T, t), \quad (3.15)$$

ao substituir y por $\tilde{\rho}(r, \chi_I)\mathrm{W}(\chi_T, t)$ o fator $\tilde{\rho}(r, \chi_I)$ se cancela em ambos lados da equação. Na escala de tempo $t = \varepsilon^{-1} s$ temos

$$\partial_t \mathrm{W}(\chi_T, t) = \varepsilon(\mathrm{L_T} + \langle \nabla_{r^N} \phi \rangle_o \cdot \nabla_{p^N} + M_\varsigma \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N}) \mathrm{W}(\chi_T, t)$$
$$+ \varepsilon^2 \Gamma(r^N) : \nabla_{p^N} \{\beta \frac{p^N}{m} + \nabla_{p^N}\} \mathrm{W}(\chi_T, t). \quad (3.16)$$

Esta é a equação de Fokker-Plank para a distribuição do sistema granular.

3.4 Coeficiente de dissipação

Vamos fazer algumas modificações na equação de Fokker-Planck para podê-la escrever em termos do coeficiente de dissipação que será definido nesta seção.

Escrevemos $\nabla \phi(r^N)$ em função de cada componente vetorial como

$$\nabla_{r_i} \phi = \sum_{k=1}^{N} \nabla_{r_i} \phi(r_{ik}),$$

para mostrar que

$$\int d\chi_I \; \tilde{\rho}(r, \chi_I) \nabla_{r_i} \phi = \sum_{k=1}^{N} \langle \nabla_{r_{ik}} \phi(r_{ik}) \rangle_o .$$

Como conseqüência disso

$$\widehat{\nabla_{r_i} \phi} = \sum_{k=1}^{N} \nabla_{r_{ik}} \widehat{\phi(r_{ik})}. \quad (3.17)$$

O termo de segunda ordem da equação de Fokker-Planck com os produtos internos escritos explicitamente é

$$\varepsilon^2 \sum_{ij} \int_0^\infty d\tau \, \Gamma(r_i, r_j, \tau) : \nabla_{p_j} (\nabla_{p_i} + \beta \frac{p_i}{m}) \mathrm{W}(\chi_T, t) \quad (3.18)$$

onde

$$\Gamma(r_i, r_j, \tau) = \langle \widehat{\nabla_{r_i} \phi} [e^{-\tau \mathrm{L}^{(0)}}] \widehat{\nabla_{r_j} \phi} \rangle_o . \quad (3.19)$$

Substituindo a equação (3.17) obtemos

$$\varepsilon^2 \sum_{jk,il} \int_0^\infty d\tau \Gamma(r_{ik}, r_{jl}, \tau) : \nabla_{p_j} (\nabla_{p_i} + \beta \frac{p_i}{m}) \mathrm{W}(\chi_T, t), \quad (3.20)$$

onde

$$\Gamma(r_{ik}, r_{jl}, \tau) = \langle \widehat{\nabla_{r_{ik}}\phi}[e^{-\tau \mathrm{L}^{(0)}}]\widehat{\nabla_{r_{jl}}\phi}\rangle_o. \tag{3.21}$$

Notemos que

$$\nabla_{r_{ij}}\phi = \phi'_{ij}\frac{r_{ij}}{|r_{ij}|} = \phi'_{ij}\hat{\mathrm{r}}_{ij}, \qquad \text{onde} \qquad \phi'_{ij} \equiv \frac{\partial}{\partial r_{ij}}\phi(r_{ij}, \xi_i, \xi_j). \tag{3.22}$$

Então

$$\nabla_{r_{ik}}\widehat{\phi(r_{ik})} \equiv \widehat{\phi'_{ij}}\,\hat{\mathrm{r}}_{ij}. \tag{3.23}$$

Como $\mathrm{L}^{(0)} \equiv \mathrm{L_I} + \nabla_{\xi^N}\phi \cdot \nabla_{\pi^N}$ só age nas variáveis internas podemos escrever

$$\varepsilon^2 \sum_{jk,il} \int_0^\infty d\tau\, \gamma(|r_{ik}|, |r_{jl}|, \tau)\hat{\mathrm{r}}_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{jl} \colon \nabla_{p_j}(\nabla_{p_i} + \beta\frac{p_i}{m})\mathrm{W}(\mathcal{X}_T, t), \tag{3.24}$$

onde

$$\gamma(|r_{ik}|, |r_{jl}|, \tau) = \langle \widehat{\phi'_{ik}}[e^{-\tau \mathrm{L}^{(0)}}]\widehat{\phi'_{jl}}\rangle_o. \tag{3.25}$$

Já que iremos trabalhar com **sistemas diluídos** supomos que há correlação somente entre ϕ'_{ik} de índices iguais, ou seja somando nos índices (j, l) e considerando os termos com $(j, l) = (i, k)$ e $(j, k) = (k, i)$ obtemos

$$\begin{aligned}\approx \varepsilon^2 \sum_{ik} \int_0^\infty d\tau\, \gamma(|r_{ik}|, |r_{ik}|, \tau)\hat{\mathrm{r}}_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik} \colon \nabla_{p_i}(\nabla_{p_i} + \beta\frac{p_i}{m})\mathrm{W}(\mathcal{X}_T, t)\\ + \varepsilon^2 \sum_{ik} \int_0^\infty d\tau\, \gamma(|r_{ik}|, |r_{ki}|, \tau)\hat{\mathrm{r}}_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ki} \colon \nabla_{p_k}(\nabla_{p_i} + \beta\frac{p_i}{m})\mathrm{W}(\mathcal{X}_T, t).\end{aligned} \tag{3.26}$$

Como

$$\widehat{\phi'_{ik}} = \widehat{\phi'_{ki}} \qquad \text{e} \qquad \hat{\mathrm{r}}_{ki} = -\hat{\mathrm{r}}_{ik},$$

fazendo

$$\gamma_{ik} = \int_0^\infty d\tau\, \gamma(|\,r_{ik}|, |\,r_{ki}|, \tau)$$

obtemos

$$\approx \varepsilon^2 \Big\{ \sum_{ik} \gamma_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik} \colon \nabla_{p_i}(\nabla_{p_i} + \beta\,\frac{p_i}{m}) - \sum_{ik} \gamma_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik} \colon \nabla_{p_k}(\nabla_{p_i} + \beta\,\frac{p_i}{m})\Big\}\mathrm{W}(\mathcal{X}_T, t). \tag{3.27}$$

A função γ_{ik} é o coeficiente de atrito que aparece após a eliminação dos graus rápidos de liberdade: é o que resta da influência dos mesmos no movimento dos grãos. Permutando j por k na equação acima e lembrando que $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ e que $\phi'_{ki} = \phi'_{ik}$ e $\hat{\mathrm{r}}_{ik} = -\hat{\mathrm{r}}_{ki}$ obtemos

$$\approx \varepsilon^2 \Big\{ \sum_{ik} \gamma_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik} \colon \nabla_{p_k}(\nabla_{p_k} + \beta\frac{p_k}{m}) - \sum_{ik} \gamma_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik} \colon \nabla_{p_i}(\nabla_{p_k} + \beta\,\frac{p_k}{m})\Big\}\mathrm{W}(\mathcal{X}_T, t). \tag{3.28}$$

Somamos (3.27) e (3.28) e dividimos por 2;

$$\approx \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_{ik} \gamma_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik}(\nabla_{p_i} - \nabla_{p_k})\Big\{\nabla_{p_i} - \nabla_{p_k} + \beta\,\frac{p_i - p_k}{m}\Big\}\mathrm{W}(\chi_T, t). \tag{3.29}$$

Finalmente temos a equação de Fockker-Plank com alimentação de energia:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathrm{W}(\chi_T, t) = {}& \varepsilon(\mathrm{L_T} + \langle\nabla_{r^N}\phi\rangle_o \cdot \nabla_{p^N} + M_\varsigma \nabla_{p^N} \cdot \nabla_{p^N})\mathrm{W}(\chi_T, t) \\ & + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sum_{ik} \gamma_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik}\hat{\mathrm{r}}_{ik} : (\nabla_{p_i} - \nabla_{p_k})\Big\{\nabla_{p_i} - \nabla_{p_k} + \beta\,\frac{p_i - p_k}{m}\Big\}\mathrm{W}(\chi_T, t).\end{aligned} \tag{3.30}$$

A equação acima representa a equação de movimento da função densidade de estados das partículas do sistema granular para o caso em que o sistema é diluído, com baixa densidade. Os dois primeiros termos no lado direito representam a um sistema livre com potencial efetivo $U + \omega$. O terceiro termo representa a alimentação de energia implementada ao sistema. O último termo no lado direito representa a dissipação de energia no sistema devida à transferência de energia dos graus de liberdade translacionais internos do sistema.

3.5 Energia cinética média por unidade de tempo

Usando a equação encontrada na seção anterior podemos calcular facilmente a variação da energia cinética no sistema

$$\begin{aligned}\partial_t \int d\chi_T\, \frac{p^{N\,2}}{2m}\mathrm{W}(\chi_T, t) = {}& \int d\chi_T\, \frac{p^N}{m}\cdot\nabla_{r^N}(U + \omega)\mathrm{W}(\chi_T, t) + \frac{1}{2m}\sum_{ik}\int d\chi_T\; \gamma_{ik}\mathrm{W}(\chi_T, t) \\ & - \frac{1}{2m}\sum_{ik}\int d\chi_T\; \gamma_{ik}\,\frac{\beta}{2m}\left[\hat{\mathrm{r}}_{ik}\cdot(p_i - p_k)\right]^2 \mathrm{W}(\chi_T, t) + \frac{M_\varsigma}{m},\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde

$$\nabla_{r^N}\omega = \langle\nabla_{r^N}\phi\rangle_o. \tag{3.32}$$

O primeiro termo do lado direito da equação acima representa a média da força externa mais o força efetiva $\nabla_{r^N}\omega$ multiplicada pela velocidade da partícula. Em caso de esfriamento ($M_\varsigma = 0$) este termo só se torna importante a medida de que as partículas param de interagir. No caso de alimentação externa ($M_\varsigma > 0$) este termo pode considerar-se na média igual a zero.

O segundo termo e o terceiro podem ser comparados. O fator $\frac{\beta}{2m}[\hat{\mathrm{r}}_{ik}\cdot$

$(p_i - p_k)]^2 \sim T_g/k_{_B}T \gg 1$ é muito grande quando o sistema constitui um gás granular inelástico.

Então podemos considerar este terceiro termo, negativo e muito maior em valor absoluto que o segundo, como o responsável pela dissipação da energia no sistema granular. Quando o mecanismo de alimentação de energia é acoplado gera-se o termo (M_ς/m) que compensa esta perda de energia no sistema, ou seja, como o termo seguinte

$$\sum_{ik} \int d\chi_{_T}\ \gamma_{ik} \frac{\beta}{2m} [\hat{\mathrm{r}}_{ik} \cdot (p_i - p_k)]^2 \sim \gamma \frac{T_g}{k_{_B}T},$$

apresenta esta ordem de grandeza temos como condição para alcançar o estado estacionário que o termo M_ς/m seja da mesma ordem de grandeza;

$$\gamma \frac{T_g}{k_{_B}T} \sim \frac{M_\varsigma}{m}. \tag{3.33}$$

No capítulo seguinte esta condição será imposta ao assinalar as ordens de grandeza aos termos que conformam as equações da hierarquia BBGKY obtida a partir da equação (3.30), com a finalidade de obter a equação de Boltzmann para o gás granular.