

5 O Gás Granular livre

5.1 Estado de esfriamento Homogêneo - HCS

Ao desligar a fonte de energia, a temperatura granular tende a zero⁴. Em sistemas inicialmente homogêneos, tem sido encontradas distribuições não Gaussianas quando o sistema é considerado como tendo o coeficiente de restituição constante³⁰. Contudo, esta aproximação se torna inválida quando instabilidades aparecem no sistema³¹. Como nosso modelo mostra um coeficiente de restituição que depende da velocidade, precisamos averiguar se estas instabilidades estão presentes a longo prazo ou se desaparecem como é o caso de sistemas com coeficiente de restituição que dependem do tempo¹¹.

5.1.1 Expansão por polinômios de Sonine

A equação (4.40) é o ponto de partida para a análise assintótica. Expressamo-la em termos da velocidade:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{v}_1) = & \int d\mathbf{v}_2 d\Omega \, |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \sigma(\Omega) (f(\mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}'_2) - f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2)) \\ & + \frac{\mathcal{A}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} \left(\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_1} + \frac{\mathbf{v}_1}{k_B T} \right) f(\mathbf{v}_1), \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde $M_\zeta = 0$.

Assumimos que a distribuição pode ser escalada¹³ com a velocidade granular v_0 conforme à equação¹⁴

$$f(\mathbf{v}, t) = \frac{n}{v_0^3} \tilde{f}(\mathbf{c}, t) \quad (5.2)$$

onde

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad n = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v}, t), \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma(\Omega)}{\sigma_0^2}, \quad (5.3)$$

e σ_0 é o diâmetro granular e $v_0 \equiv v_0(t)$ é dado por $T_g(t) = \frac{1}{2} m v_0^2(t)$.

Usando, a distribuição escalada (5.2) na equação (5.1) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} = - \frac{1}{v_0^2} \frac{d v_0}{d t} \left(3 + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \right) \tilde{f} + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} = \frac{\mu_2}{3} \left(3 + \mathbf{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \right) \tilde{f} + \frac{1}{v_0} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} = n \sigma_0^2 I(\tilde{f}, \tilde{f}), \quad (5.4)$$

onde

$$I(\tilde{f}, \tilde{f}) = I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) + I_2(\tilde{f}),$$

e

$$I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) = \int d\mathbf{c}_2 d\Omega |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| \tilde{\sigma}(\Omega) (\tilde{f}(\mathbf{c}'_1) \tilde{f}(\mathbf{c}'_2) - \tilde{f}(\mathbf{c}_1) \tilde{f}(\mathbf{c}_2)), \quad (5.5)$$

$$I_2(\tilde{f}) = \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}_1} \cdot \left[\frac{1}{mv_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} + \frac{v_0 \mathbf{c}_1}{k_B T} \right] \tilde{f}(\mathbf{c}_1). \quad (5.6)$$

A função $\tilde{f}(c, t)$ será expandida por meio dos polinômios de Sonine (ver apêndice, seção A.2.3, equação A.44) até o coeficiente a_2 :

$$\tilde{f}(c, t) \approx \phi(c) \left\{ 1 + a_2(t) S_2(c^2) \right\},$$

onde

$$\phi(c) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-c^2}.$$

Passaremos a calcular os coeficientes

$$\mu_n = - \int d\mathbf{c} c^n I(\tilde{f}, \tilde{f}). \quad (5.7)$$

na seqüência.

Cálculo de μ_2

O termo $\tilde{I}_1(\tilde{f}, \tilde{f})$ equivale à equação de Enskog-Boltzmann, para o caso elástico. Usamos, então, o resultado achado para a integral $\int d\mathbf{c} c^2 I_1(\tilde{f}, \tilde{f})$ na referência¹¹ com $\delta=0$. Neste caso, o termo que corresponde a $I_1(\tilde{f}, \tilde{f})$ no cálculo de μ_2 se cancela.

$$\int d\mathbf{c} c^2 I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) = 0.$$

O segundo termo contribui para μ_2 :

$$\begin{aligned} \mu_2 &= - \int d\mathbf{c} c^2 I_2 \\ &= - \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[\frac{1}{mv_0} \int d\mathbf{c} c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \tilde{f}(\mathbf{c}) + \frac{v_0}{k_B T} \int d\mathbf{c} c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} \tilde{f}(\mathbf{c}) \right]. \end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} \mu_2 &= - \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[\frac{6}{mv_0} - \frac{2v_0}{k_B T} \langle c^2 \rangle \right] \\ &= - \frac{3\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[\frac{2}{mv_0} - \frac{v_0}{k_B T} \right], \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde usamos $\langle c^2 \rangle = \frac{3}{2}$ (equação A.30).

Cálculo de μ_4

A partir da definição:

$$\mu_4 = - \int d\mathbf{c} c^4 \tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f}) = - \int d\mathbf{c} c^4 [\tilde{I}_1(\tilde{f}, \tilde{f}) + \tilde{I}_2(\tilde{f})]. \quad (5.9)$$

O termo $\tilde{I}_1(\tilde{f}, \tilde{f})$ equivale à equação de Enskog-Boltzmann, na referência¹¹, para o caso elástico. Usamos, então, o resultado achado para a integral $\int d\mathbf{c} c^4 I_1(\tilde{f}, \tilde{f})$ com $\delta = 0$ (caso elástico):

$$\int d\mathbf{c} c^4 I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) = 4\sqrt{2\pi} \left\{ a_2 + \frac{1}{32} a_2^2 \right\}, \quad (5.10)$$

a segunda integral calculâmo-la diretamente para obter

$$\begin{aligned} - \int d\mathbf{c} c^4 I_2(\tilde{f}) &= \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[\frac{1}{mv_0} 20 \langle c^2 \rangle - \frac{4}{k_B T} \langle c^4 \rangle \right] \\ &= \frac{15\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[\frac{2}{mv_0} \langle c^2 \rangle - (1 + a_2) \frac{v_0}{k_B T} \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Onde foi usada a igualdade

$$\langle c^4 \rangle = \frac{15}{4} (1 + a_2).$$

Assim o coeficiente μ_4 se escreve

$$\mu_4 = 4\sqrt{2\pi} \left\{ a_2 + \frac{1}{32} a_2^2 \right\} - \frac{15\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[\frac{2}{mv_0} - (1 + a_2) \frac{v_0}{k_B T} \right]. \quad (5.12)$$

5.1.2 Comportamento a longo-prazo

A temperatura granular $T_g \equiv \frac{1}{2} mv_o^2(t)$ satisfaz¹¹ a equação (A.34) que com o coeficiente μ_2 calculado acima se escreve

$$\begin{aligned} \frac{dT_g}{dt} &= - \frac{2}{3} BT_g \mu_2 \\ &= \mathcal{A} \left(\frac{2}{m} - \frac{v_0^2}{k_B T} \right) \\ &= \frac{2\mathcal{A}}{m} \left(1 - \frac{T_g}{k_B T} \right), \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde $\mathcal{A} = C T_g^{3/5}$ e $B = v_0(t) n \sigma_0^2$, equação (4.41).

Expressando a equação (5.13) em função da variável $u = T_g/T_{g_o}$, onde T_{g_o} é a temperatura granular inicial, obtemos

$$\frac{d}{dt} u = \frac{2C}{T_{g_o}^{2/5} m} u^{3/5} \left(1 - u \frac{T_{g_o}}{k_B T} \right). \quad (5.14)$$

Dessa equação podemos ver que $k_B T / T_{g_o} < u < 1$ e dado que $T_{g_o} / k_B T \gg 1$ podemos aproximar a equação acima por

$$\frac{d}{dt} u = - \frac{2C T_{g_o}^{3/5}}{m k_B T} u^{8/5}. \quad (5.15)$$

A solução é dada por

$$u = \left(1 + \frac{t}{\tau_o}\right)^{-5/3} \quad (5.16)$$

ou expressando-a como a velocidade média

$$v_0 = \sqrt{\frac{2T_{g_o}}{m}} \left(1 + \frac{t}{\tau_o}\right)^{-5/6} \quad (5.17)$$

onde

$$\tau_o = \frac{5m k_B T}{6C T_{g_o}^{3/5}}.$$

Isto equivale à lei de Haff⁴ para sistemas com coeficiente de restituição dependente da velocidade^{20,22,23}.

Vamos agora calcular o coeficiente a_2 a partir da equação diferencial (A.53) que deve ser satisfeita por este coeficiente. Então, usando os coeficientes μ_2 e μ_4 calculados acima, vemos que a dependência temporal de a_2 está dada por¹¹:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_2 &= \frac{4}{3} B \mu_2 (1 + a_2) - \frac{4}{15} B \mu_4 \\ &= \frac{4}{3} n v_0 \sigma_0^2 \frac{3\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[-\frac{2}{m v_0} + \frac{v_0}{k_B T} \right] (1 + a_2) \\ &\quad - \frac{4}{15} n v_0 \sigma_0^2 \left[4\sqrt{2\pi} \left\{ a_2 + \frac{1}{32} a_2^2 \right\} - \frac{15\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[\frac{2}{m v_0} - (1 + a_2) \frac{v_0}{k_B T} \right] \right] \\ &= -\frac{16}{15} n v_0 \sigma_0^2 \sqrt{2\pi} \left\{ a_2 + \frac{1}{32} a_2^2 \right\} - \frac{8\mathcal{A}}{m^2 v_0^2} a_2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A equação acima, quando $\mathcal{A} = 0$, concorda com a equação (53) no artigo de referencia¹¹ que corresponde ao caso $\delta' = 0$. Escrevendo a equação 5.18 em função de u obtemos

$$\frac{d}{dt} a_2 + c_1 u^{-2/5} a_2 + c_2 u^{1/2} \left\{ a_2 + \frac{a_2^2}{32} \right\} = 0, \quad (5.19)$$

onde

$$c_1 = \frac{4C}{m T_{g_o}^{2/5}} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{32}{15} n \sigma_0^2 \sqrt{\frac{2\pi T_{g_o}}{m}}.$$

A solução de esta equação é dada por

$$a_2(t) = \frac{a_2(0) \exp\left[-\int_0^t dt' (c_1 u^{-2/5} + c_2 u^{1/2})\right]}{1 + 1/32 a_2(0) c_2 \int_0^t dt' u^{1/2} \exp\left[-\int_0^{t'} dt'' (c_1 u^{-2/5} + c_2 u^{1/2})\right]}. \quad (5.20)$$

Podemos simplificar a equação acima notando que

$$\int_0^t u^{-2/5} dt = \int_0^t \frac{u^{-2/5}}{du/dt} du,$$

e usando a equação (5.14)

$$\begin{aligned} \int_0^t u^{-2/5} dt &= \int_0^t \frac{u^{-2/5}}{(2\mathcal{C}/m) T_{g_o}^{-2/5} u^{3/5} (1 - uT_{g_o}/k_B T)} \\ &= \frac{mT_{g_o}^{2/5}}{2\mathcal{C}} \ln\left[u \frac{1 - T_{g_o}/k_B T}{1 - uT_{g_o}/k_B T}\right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Então temos que

$$\exp\left[-c_1 \int_0^t u^{-2/5} dt\right] = \left[\frac{1 - uT_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)}\right]^2.$$

Assim obtemos

$$a_2(t) = \frac{a_2(0) u^{-2} \left[\frac{1 - uT_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)}\right]^2 \exp\left[-\int_0^t dt' (c_2 u^{1/2})\right]}{1 + 1/32 a_2(0) c_2 \int_0^t dt' u^{-3/2} \left[\frac{1 - uT_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)}\right]^2 \exp\left[-\int_0^{t'} dt'' (c_2 u^{1/2})\right]}. \quad (5.22)$$

Como $\lim_{t \rightarrow \infty} u = k_B T / T_{g_o}$ temos que

$$\Rightarrow a_2(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0.$$

O sistema mostra uma tendência, para grandes valores do tempo, a ter uma distribuição de velocidades Gaussiana a medida que este se torna mais elástico¹¹. O estado de esfriamento para baixas densidades e baixa dissipação é assim bem descrito pela equação (5.22).

É fácil mostrar que o denominador da equação acima,

$$D = 1 + 1/32 a_2(0) c_2 \int_0^t dt' u^{-3/2} \left[\frac{1 - uT_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)}\right]^2 \exp\left[-\int_0^{t'} dt'' (c_2 u^{1/2})\right],$$

satisfaz as relações

$$1 \leq D \leq 1 + a_2/32 \quad \text{para} \quad a_2 > 0$$

e

$$1 + a_2/32 \leq D \leq 1 \quad \text{para} \quad a_2 < 0.$$

Como a_2 é um número pequeno temos que $D \approx 1$. Desta maneira

$$a_2(t) = a_2(0)u^{-2} \left[\frac{1 - uT_{g_o}/k_B T}{u(1 - T_{g_o}/k_B T)} \right]^2 \exp\left[- \int_0^t dt' c_2 u^{1/2}\right]. \quad (5.23)$$

Podemos ver que quando a_2 é positivo, $a_2(t)$ se mantém positivo e que quando a_2 é negativo, $a_2(t)$ se mantém negativo. Como $T_{g_o} \gg k_B T$ podemos fazer a aproximação

$$\begin{aligned} \int_0^t u^{1/2} dt &\sim -\frac{k_B T m}{2T_{g_o}^{3/5} \mathcal{C}} \int_1^u \frac{ds}{s^{11/10}} \\ &\sim \left(\frac{5k_B T}{\mathcal{C}T_{g_o}^{3/5}} \right) (s^{-1/10} - 1) \end{aligned}$$

Devido a isto podemos escrever

$$a_2(t) \sim a_2(0) (k_B T / T_{g_o})^2 (1/u - T_{g_o} / k_B T)^2 e^{-b(u^{-1/10} - 1)} \quad (5.24)$$

onde

$$b = \frac{32nm^{1/2} \sigma_0^2 k_B T}{3\mathcal{C}T_{g_o}^{1/10}}.$$

5.1.3 Análise da cauda da distribuição de velocidades para o estado de resfriamento homogêneo

Vamos estudar o comportamento da função distribuição de velocidades para \mathbf{c} muito grande, ou seja, $\mathbf{c} \gg 1$. Partimos da equação (A.35)

$$\frac{\mu_2}{3} \left[3 + c \cdot \frac{\partial}{\partial c} \right] \tilde{f} + B^{-1} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \tilde{I},$$

onde $I = I_1 + I_2$. Pode-se mostrar que¹⁴(apêndice A.3)

$$I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) \approx -\pi \mathbf{c} \tilde{f}(\mathbf{c}, t). \quad (5.25)$$

Para poder determinar o comportamento dos outros termos da equação a grandes velocidades seguiremos o Ansatz abaixo sugerido por Pöschel³², supondo uma superpopulação dos estados de alta velocidade:

$$f(c) \sim e^{-\varphi(t)c}. \quad (5.26)$$

Para I_2 notemos que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \tilde{f} = -\frac{2\varphi}{c} \tilde{f} + \varphi^2 \tilde{f},$$

e que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot (\mathbf{c}\tilde{f}) = 3\tilde{f} - \varphi c\tilde{f}.$$

Desta maneira o operador $I_2(\tilde{f})$ se escreve

$$I_2(\tilde{f}) = \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 v_0^2} \left[\frac{-2\varphi}{mv_0} \frac{\tilde{f}}{c} + \left(\frac{\varphi^2}{mv_0} + \frac{3v_0}{k_B T} \right) \tilde{f} - \frac{v_0\varphi}{k_B T} c\tilde{f} \right]$$

que para $c \gg 1$ se torna

$$I_2(\tilde{f}) \approx - \frac{\mathcal{A}\varphi}{nm\sigma_0^2 v_0 k_B T} c\tilde{f}$$

Por outro lado como

$$\frac{\partial}{\partial t} f = - \frac{d\varphi}{dt} c \tilde{f},$$

para $c \gg 1$ podemos escrever

$$\frac{\mu_2}{3} \left[3 + c \cdot \frac{\partial}{\partial c} \right] \tilde{f} + B^{-1} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \approx \frac{\mu_2}{3} (-\varphi c \tilde{f}) + B^{-1} (-\dot{\varphi} c \tilde{f}).$$

Portanto a equação (A.35) para $c \gg 1$ e para o Ansatz (5.26) se torna

$$\dot{\varphi} + \left[\frac{\mu_2}{3} - \frac{\mathcal{A}}{nm\sigma_0^2 k_B T v_0} \right] B\varphi = \pi B. \quad (5.27)$$

Substituindo a expressão achada para μ_2 e expressando B em função da temperatura granular obtemos a equação

$$\dot{\varphi} - \left(\frac{\mathcal{C}}{m} T_g^{-2/5} \right) \varphi = \left(\frac{2}{m} \right)^{1/2} n\sigma_0^2 \pi T_g^{1/2} \quad (5.28)$$

cuja solução é

$$\varphi(t) = \left[\varphi(0) + \left(\frac{2}{m} \right)^{1/2} \sigma_0^2 n\pi \int_0^t dt' T_g^{1/2} e^{-\frac{\mathcal{C}}{m} \int_0^{t'} T_g^{-2/5} dt''} \right] e^{\frac{\mathcal{C}}{m} \int_0^t T_g^{-2/5} dt'}. \quad (5.29)$$

Podemos simplificar esta equação notando que de acordo com a equação (5.21) para $T_g \gg k_B T$ obtemos

$$\int_0^t T_g^{-2/5} dt' = \frac{m}{2\mathcal{C}} \ln \left| \frac{T_g}{k_B T - T_g} \right|.$$

Assim, ao substituir este resultado na equação para φ encontramos

$$\varphi(t) = \left[\varphi(0) + \left(\frac{2}{m} \right)^{1/2} \sigma_0^2 n\pi \int_0^t dt' (T_g - k_B T)^{1/2} \right] \left(\frac{T_g}{T_g - k_B T} \right)^{1/2}. \quad (5.30)$$

Para valores de t tal que $T_g \gg k_B T$ a equação acima se pode aproximar a

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{10\sigma_0^2 n\pi k_B T}{\mathcal{C}} \left(\frac{m}{2} \right)^{1/2} [T_g^{-1/10} - T_g^{-1/10}]. \quad (5.31)$$

Substituindo a dependência temporal de T_g dada pela equação (5.17) encontramos

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{10\sigma_0^2 n \pi k_B T}{\mathcal{C}} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} T_{g_0}^{-1/10} \left[\left(1 + \frac{t}{\tau_0}\right)^{1/6} - 1\right]. \quad (5.32)$$

Esta equação compara-se com a equação (85) na referência¹¹.