

## Referências

- [1] Schofield and I. Oppenheim, *Physica A* **196**, 209 (1993).
- [2] O. Reynolds, On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact, *Philos. Mag. Ser. 5469* (1885) 20-50.
- [3] J.J.Alonso, J. P. Hovi, e H. J. Herrmann *Phys. Rev. E* **58** 672 (1998).
- [4] P. K. Haff, *J. Fluid Mech.* **134** (1983) 401.
- [5] Florence Rouyer and Narayan Menon, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3676 (2000)
- [6] S. McNamara and W.R. Young, *Phys. Rev. E* **53**, 5089 (1996); S. McNamara, *Physics of Fluids A* **5**, 3056 (1993).
- [7] I. Goldhirsch and G. Zanetti, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 1619 (1993).
- [8] H.J. Herrmann, *Physica A* **313** (2002) 188.
- [9] S. Luding and H. J. Herrmann, *Chaos* **9**, 673 (1999).
- [10] R. Cafiero and S. Luding and H. J. Herrmann, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 6014(2000).
- [11] N.V. Brilliantov and T. Pöschel, *Phys. Rev. E* **61**, 5573 (2000); N.V. Brilliantov and T. Pöschel, *Phys. Rev. E* **67**, 061304 (2003).
- [12] R.C.Proleon and W.A.Morgado, *Brazilian journal of Physics*, vol. **34**, no. **3**, September, 2004.
- [13] A.Goldshtein and M. Shapiro, *J. Fluid Mech.* (1995), vol 282, pp 75-114.
- [14] T.P.C. Van Noije, and M.H. Ernst, *Granular Matter* **1**, 57 (1998).
- [15] N. V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, and T. Pöschel, *Phys. Rev. E* **53**, 5382 (1996).
- [16] N. V. Brilliantov, F. Spahn J. M. Hertzch and T. Pöschel, *Phys. Rev. E* **53**, 5382 (1996).
- [17] W. A. Morgado and I. Oppenheim, *Phys. Rev. E* **55**(1997).
- [18] Thomas Schwager and Thorsten Pöschel *Phys. Rev. E* **57**, 650 (1998).
- [19] Granular Gases the early stage, Nicolai V. Brilliantov and Thorsten Pöschel, cond-mat/0203401.

- [20] W.A.M. Morgado, I. Oppenheim, Phys. Rev. E **55** (1997) 1940.
- [21] W.A.M. Morgado and E.R. Mucciolo, Physica A **311** (2002) 150.
- [22] N.V. Brilliantov, F. Spahn, J.-M. Hertzsch, T. Pöschel, Phys. Rev. E **53** (1996) 5382.
- [23] G. Kuwabara, K. Kono, Jpn. J. Appl. Phys. **26** (1987) 1230.
- [24] H. Risken *The Fokker-Plank Equation*, Springer-Verlag, 1989. Pag. 70
- [25] I. Oppenheim, and N.G. van Kampen, Physica A **196**, 231 (1996).
- [26] N.G. van Kampen, Phys. Rep. **124**, 69 (1985).
- [27] S.Chapman and T.G.Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.
- [28] G. Sandri, Ann. Phys. **24** (1963)332; Ann. Phys. **24** (1963) 380.
- [29] W.A.M. Morgado and I. Oppenheim, Physica A **246**, 547 (1997);  
W.A.M. Morgado and I. Oppenheim, Physica A **252**, 308 (1998).
- [30] V. Garzó and J. Dufty, Phys. Rev. E **60** (1999) 5706; T. Pöschel, N.V. Brilliantov and T. Schwager, Physica A **325**, 274 (2003).
- [31] J.J. Brey, J.W. Dufty, C.S. Kim, and A. Santos, Phys. Rev. E **58**, (1998) 4638; J. M. Pasini and P. Cordero, Phys. Rev. E **63** (2001) 041302.
- [32] T. Schwager and T. Pöschel, Phys. Rev. E **61**, 1716 (2000).

# A

## Apêndices

### A.1 Eliminação das variáveis rápidas

Seja a seguinte equação

$$\frac{\partial \rho(x, \tau)}{\partial \tau} = L(\varepsilon) \rho(x, \tau) = (L^{(0)} + \varepsilon L^{(1)}) \rho(x, \tau) \quad (\text{A.1})$$

onde consideramos  $L$  um operador e  $\rho$  um vetor cujas componentes se definem pelo índice  $x$ . Precisamos separar  $\rho(x, \tau)$  em suas componentes lentas e rápidas. Definimos as variáveis lentas como as que se tornam constantes de movimento da equação não perturbada, ou seja, da equação (A.1) quando  $\varepsilon = 0$ :

$$\frac{\partial \rho(x, \tau)}{\partial \tau} = L^{(0)} \rho(x, \tau). \quad (\text{A.2})$$

Para isso definimos o operador de projeção  $\mathcal{P}$  tal que satisfaça

$$\mathcal{P}L^{(0)} = 0 \quad \text{e} \quad L^{(0)}\mathcal{P} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Assim multiplicando pela direita a equação não perturbada pelo operador  $\mathcal{P}$  obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{P} \rho(x, \tau) = \mathcal{P} L^{(0)} \rho(x, \tau) = 0, \quad (\text{A.4})$$

onde vemos claramente que as variáveis lentas

$$y = \mathcal{P} \rho(x, \tau) \quad (\text{A.5})$$

são as constantes de movimento da equação não perturbada e portanto representam as variáveis lentas do sistema. As variáveis rápidas são então

$$z = \rho(x, \tau) - \mathcal{P} \rho(x, \tau), \quad (\text{A.6})$$

definindo o operador  $\mathcal{Q}$  de maneira que se satisfaça

$$\rho(x, \tau) = \mathcal{P} \rho(x, \tau) + \mathcal{Q} \rho(x, \tau), \quad (\text{A.7})$$

temos que

$$z = \mathcal{Q} \rho(x, \tau). \quad (\text{A.8})$$

Vamos separar a equação (A.1) em duas, uma para as variáveis rápidas e outra para as variáveis lentas.

Multiplicando a equação (A.1) pela esquerda por  $\mathcal{P}$  e por  $\mathcal{Q}$  obtemos respectivamente

$$\partial_t \mathcal{P}\rho = \varepsilon \mathcal{P}L^{(1)}\mathcal{P}\rho + \varepsilon \mathcal{P}L^{(1)}\mathcal{Q}\rho \quad (\text{A.9})$$

$$\partial_t \mathcal{Q}\rho = \mathcal{Q}L^{(0)}\mathcal{Q}\rho + \varepsilon \mathcal{Q}L^{(1)}\mathcal{P}\rho + \varepsilon \mathcal{Q}L^{(1)}\mathcal{Q}\rho. \quad (\text{A.10})$$

Usando o fato de que, por definição, os operadores satisfazem

$$\mathcal{P}^2 \equiv \mathcal{P} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}^2 \equiv \mathcal{Q},$$

podemos escrever

$$\partial_t y = \varepsilon Ay + \varepsilon Bz, \quad (\text{A.11})$$

$$\partial_t z = Ez + \varepsilon Cy + \varepsilon Dz, \quad (\text{A.12})$$

onde

$$A = \mathcal{P}L^{(1)}\mathcal{P}, \quad B = \mathcal{P}L^{(1)}\mathcal{Q}, \quad C = \mathcal{Q}L^{(1)}\mathcal{P}, \quad (\text{A.13})$$

$$D = \mathcal{Q}L^{(1)}\mathcal{Q}, \quad (\text{A.14})$$

$$E = \mathcal{Q}L^{(0)}\mathcal{Q}. \quad (\text{A.14})$$

Na escala de tempo das variáveis lentas  $s = \varepsilon\tau$  temos

$$\partial_s y = Ay + Bz, \quad (\text{A.15})$$

$$\partial_s z = \frac{1}{\varepsilon} Ez + Cy + Dz. \quad (\text{A.16})$$

Da equação de movimento para  $z$  vemos que a solução para esta variável dependerá do parâmetro  $\varepsilon$ , então podemos escrever

$$z = z^{(0)} + \varepsilon z^{(1)} + \varepsilon^2 z^{(2)} + \dots \quad (\text{A.17})$$

Substituindo esta equação na equação (A.16), agrupando termos comuns até ordem  $\varepsilon^{(0)}$ , obtemos

$$\partial_s z^{(0)} + \mathcal{O}(z) = \frac{1}{\varepsilon} Ez^{(0)} + Ez^{(1)} + Cy + Dz^{(0)} + \mathcal{O}(z). \quad (\text{A.18})$$

Igualando ambos lados da equação acima encontramos para o termo de ordem  $\frac{1}{\varepsilon}$  a equação

$$Ez^{(0)} = 0, \quad (\text{A.19})$$

e para o termo de ordem  $\varepsilon^{(0)}$  a equação

$$\partial_s z^{(0)} = E z^{(1)} + C y = 0. \quad (\text{A.20})$$

Da equação (A.19) obtemos

$$z^{(0)} = 0$$

e da equação (A.20) obtemos

$$z^{(1)} = -E^{-1} C y. \quad (\text{A.21})$$

Finalmente obtemos em primeira ordem em  $\varepsilon$  a seguinte equação para  $y$

$$\partial_s y = A y - \varepsilon B E^{-1} C y \quad (\text{A.22})$$

e passando à escala de tempo definida por  $\tau$ ,  $\tau = \varepsilon^{-1} s$  obtemos

$$\partial_\tau y = \varepsilon A y - \varepsilon^2 B E^{-1} C y. \quad (\text{A.23})$$

Esta é a equação a ser obedecida pelas variáveis lentas do sistema. Os operadores  $A$ ,  $B$  e  $E^{-1}$  serão calculados a partir do operador  $\mathcal{P}$  do sistema e dos operadores  $L^{(0)}$  e  $L^{(1)}$ .

## A.2 Expansão em polinômios de Sonine com coeficientes dependentes do tempo

Vamos seguir aqui a técnica apresentada por Pöschel<sup>11</sup> para estudar o comportamento da função distribuição de velocidades em relação a uma distribuição Gaussiana quando o coeficiente de restituição do sistema depende da velocidade.

### A.2.1 Fundamentos

Vamos supor que temos uma distribuição de velocidades  $f(\mathbf{v}, t)$  cuja equação de movimento esteja dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{v}, t) = I(f, f). \quad (\text{A.24})$$

Seja a transformação

$$f(\mathbf{v}, t) = \frac{n}{v_0^3} \tilde{f}(\mathbf{c}, t), \quad (\text{A.25})$$

onde

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}}{v_0} \quad \text{e} \quad n = \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v}, t). \quad (\text{A.26})$$

Desta maneira a nova função distribuição fica normalizada

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{c} v_0^3 \frac{n}{v_0^3} \tilde{f} &= \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v}, t), \\ \Rightarrow n \int d\mathbf{c} \tilde{f} &= n \\ \Rightarrow \int d\mathbf{c} \tilde{f} &= 1. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v}}{v_0^2} \frac{\partial v_0}{\partial t} = -\frac{\mathbf{c}}{v_0} \frac{\partial v_0}{\partial t},$$

então, derivamos ambos lados da equação (A.25) em relação ao tempo obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} &= -\frac{3n}{v_0^4} \frac{dv_0}{dt} \tilde{f} + \frac{n}{v_0^3} \left[ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{c}} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right] \\ &= \frac{n}{v_0^4} \frac{dv_0}{dt} \left[ -3 - \mathbf{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \right] \tilde{f} + \frac{n}{v_0^3} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

onde  $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}$  é a derivada parcial em relação à variável explícita  $t$ . Da definição de temperatura granular temos que

$$\frac{3}{2} n T(t) = \int d\mathbf{v} \frac{m \mathbf{v}^2}{2} f(\mathbf{v}, t). \quad (\text{A.28})$$

Usando a equação (A.25) temos que

$$\frac{3}{2}nT(t) = n \frac{mv_0^2}{2} \int d\mathbf{c} \mathbf{c}^2 \tilde{f},$$

e como

$$T(t) = \frac{mv_0^2(t)}{2}, \quad (\text{A.29})$$

obtemos

$$\int d\mathbf{c} \mathbf{c}^2 \tilde{f} = \langle c^2 \rangle = \frac{3}{2}. \quad (\text{A.30})$$

Supondo que ao substituir a transformação (A.25) no lado direito da equação de movimento (A.24) este fica na forma

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \sigma_0^2 \frac{n^2}{v_0^2} \tilde{I}(\tilde{f}, \tilde{f}). \quad (\text{A.31})$$

Multiplicando ambos lados da equação acima por  $\mathbf{v}^2 = \mathbf{c}^2 v_0^2$  e integrando em  $\mathbf{c}$  obtemos

$$\int d\mathbf{c} \mathbf{v}^2 \frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \sigma_0^2 n^2 \int d\mathbf{c} \mathbf{c}^2 \tilde{I}.$$

Passando da integral na variável  $\mathbf{c}$  para uma na variável  $\mathbf{v}$  no lado esquerdo da equação acima e lembrando que

$$T = \frac{1}{3n} \int d\mathbf{v} m \mathbf{v}^2 f(v, t),$$

obtemos

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{m}{3} \sigma_0^2 n v_0^3 \int d\mathbf{c} \mathbf{c}^2 \tilde{I}. \quad (\text{A.32})$$

Definindo

$$B = v_0 \sigma_0^2 n \quad \text{e} \quad \mu_p = - \int d\mathbf{c} \mathbf{c}^p \tilde{I}, \quad (\text{A.33})$$

escrevemos (A.32) como

$$\frac{dT}{dt} = - \frac{2}{3} BT \mu_2. \quad (\text{A.34})$$

Ao substituir a equação (A.27) no lado esquerdo da equação (A.31) obtemos a equação de movimento em termos de  $\tilde{f}$  e a temperatura granular  $T_g$ , dada pela equação (A.29):

$$- \frac{1}{v_0^2} \frac{dT}{dt} \left[ 3 + c \cdot \frac{\partial}{\partial c} \right] \tilde{f} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \sigma_0^2 n v_0 \tilde{I},$$

substituindo agora (A.34) na equação acima

$$\frac{\mu_2}{3} \left[ 3 + c \cdot \frac{\partial}{\partial c} \right] \tilde{f} + B^{-1} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \tilde{I}. \quad (\text{A.35})$$

Multiplicando esta equação por  $c^p$  e integrando em  $\mathbf{c}$  e lembrando a definição

$$\langle c^p \rangle = \int d\mathbf{c} c^p \tilde{f},$$

obtemos

$$\frac{\mu_2}{3} \left[ 3 \langle c^p \rangle + \int d\mathbf{c} c^p \mathbf{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \tilde{f} \right] + B^{-1} \int d\mathbf{c} c^p \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = -\mu_p. \quad (\text{A.36})$$

Podemos mostrar facilmente que

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{c} c^p \mathbf{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \tilde{f} &= \int dc_x dc_y dc_z c^p (c_x \frac{\partial}{\partial c_x} + c_y \frac{\partial}{\partial c_y} + c_z \frac{\partial}{\partial c_z}) \tilde{f} \\ &= - \int dc_x dc_y dc_z \left[ \frac{\partial}{\partial c_x} (c_x c^p) + \frac{\partial}{\partial c_y} (c_y c^p) + \frac{\partial}{\partial c_z} (c_z c^p) \right] \tilde{f} \\ &= - \int dc_x dc_y dc_z (3c^p + p c_x^2 c^{p-2} + p c_y^2 c^{p-2} + p c_z^2 c^{p-2}) \tilde{f} \\ &= -(3 + p) \langle c^p \rangle. \end{aligned}$$

Substituindo esta última igualdade na equação (A.36) obtemos

$$\frac{\mu_2 p}{3} \langle c^p \rangle - B^{-1} \int d\mathbf{c} c^p \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \mu_p. \quad (\text{A.37})$$

Para continuar a desenvolver esta equação precisamos conhecer  $\partial_t \tilde{f}$  para isso vamos expressar  $\tilde{f}$  em função dos polinômios de Sonine.

### A.2.2 Polinômios de Sonine

O polinômio de sonine é dado pela série

$$S_m^{(n)}(x) = \sum_{p=0}^n \frac{(-x)^p (m+n)_{n-p}}{p!(n-p)!} \quad (\text{A.38})$$

onde  $r_q$  denota o produto de  $q$  fatores  $r, r-1, \dots, r-q+1$ . Em particular

$$S_m^{(0)}(x) = 1, \quad S_m^{(1)}(x) = m+1-x. \quad (\text{A.39})$$

Os polinômios de Sonine que serão usados são os correspondentes a  $m = 1/2$  e se entenderá que  $S_p \equiv S_{1/2}^{(p)}$ , então, para este caso temos

$$S_0(x) \equiv S_{1/2}^{(0)}(x) = 1 \quad (\text{A.40})$$

$$S_1(x) \equiv S_{1/2}^{(1)}(x) = -x + \frac{3}{2} \quad (\text{A.41})$$

$$S_2(x) \equiv S_{1/2}^{(2)}(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + \frac{15}{8}. \quad (\text{A.42})$$



Os polinômios de Sonine satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_0^\infty dx e^{-x} S_m^{(p)}(x) S_m^{(q)} x^m = 0 \quad (p \neq q)$$

$$= \frac{\Gamma(m+p+1)}{p!} \quad (p = q), \quad (\text{A.43})$$

onde  $\Gamma$  é a função gama.

### A.2.3 Expansão da distribuição de velocidades em polinômios de Sonine

Vamos usar a expansão da função  $\tilde{f}(\mathbf{c})$  em termos dos polinômios de Sonine  $S_p(c^2)$

$$\tilde{f}(\mathbf{c}) = \phi(c) \left\{ 1 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p S_p(c^2) \right\}, \quad (\text{A.44})$$

onde

$$\phi(c) = \frac{e^{-c^2}}{2\pi^{3/2}} \quad (\text{A.45})$$

Devido a substituição da variável  $x$  por  $c^2$  na definição dos polinômios de Sonine podemos expressar agora a relação de ortogonalidade (A.43) por outra onde a variável de integração seja o vetor  $\mathbf{c}$ . Substituindo, então,  $c^2$  por  $x$  na relação de ortogonalidade temos

$$2 \int_0^\infty e^{-c^2} S_p(c^2) S_q(c^2) c^2 dc = \frac{\Gamma(3/2+p)}{p!} \delta_{pq}.$$

Por causa da simetria esférica  $d\mathbf{c} = 4\pi c^2 dc$ , então podemos escrever a integral acima de maneira a encontrar a seguinte relação de ortogonalidade,

$$\int d\mathbf{c} \phi(c) S_p(c^2) S_q(c^2) = \mathcal{N}_p \delta_{pq} \quad (\text{A.46})$$

onde a constante de normalização é

$$\mathcal{N}_p = \frac{\Gamma(3/2+p)}{\pi^{1/2} p!}. \quad (\text{A.47})$$

É fácil mostrar que  $\mathcal{N}_0 = 1$  e  $\mathcal{N}_1 = 3/2$ . Usando esse resultado podemos calcular o valor de  $a_1$  e de  $\langle c^4 \rangle$ . Notando que  $c^2 = \frac{3}{2} S_0(c^2) - S_1(c^2)$  podemos calcular

$$\langle c^2 \rangle = \int d\mathbf{c} \phi(c) \left[ \frac{3}{2} S_0(c^2) - S_1(c^2) \right] \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(c^2) \right\}$$

como  $S_0(C^2) = 1$  e usando a relação de ortogonalidade encontramos

$$\langle c^2 \rangle = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}a_1. \quad (\text{A.48})$$

Como por definição de temperatura  $\langle c^2 \rangle = \frac{3}{2}$ , equação (A.30), concluímos que  $a_1 = 0$ . Similarmente podemos calcular  $\langle c^4 \rangle$  notando que  $c^4 = 2S_2 - 5S_1 + \frac{15}{4}S_0$

$$\begin{aligned} \langle c^4 \rangle &= \int \mathbf{c} \phi(c) \left[ c^4 = 2S_2 - 5S_1 + \frac{15}{4}S_0 \right] \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k S_k(c^2) \right\} \\ &= \frac{15}{4}(1 + a_2). \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Para poder calcular  $a_2$  precisamos resolver uma equação que podemos encontrá-la a partir da equação (A.37), para isso calculamos

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \phi(c) \sum_k \dot{a}_k S_k(c^2).$$

Multiplicando esta equação por  $c^p$  e integrando em  $\mathbf{c}$  obtemos

$$\int d\mathbf{c} c^p \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} = \sum_{k=1} \dot{a}_k V_{kp}, \quad (\text{A.50})$$

onde

$$V_{kp} = \int d\mathbf{c} c^p \phi(c) S_k(c^2). \quad (\text{A.51})$$

Então substituindo a equação acima na (A.37) obtemos

$$\frac{\mu_2 p}{3} \langle c^p \rangle - B^{-1} \sum_{k=1} \dot{a}_k V_{kp} = \mu_p. \quad (\text{A.52})$$

Esta equação representa um conjunto de equações para os coeficientes  $a_2, a_3, \dots$ . Vamos a ver esta equação para  $p=2$  e  $p=4$ :

### Caso $p=2$ :

Fazendo  $p = 2$  na equação (A.52) obtemos

$$\sum_{k=1} \dot{a}_k V_{k2} = 0.$$

Calculamos os coeficientes  $V_{k2}$  fazendo  $c^2 = \frac{3}{2}S_0 - S_1$ . Assim

$$V_{k2} = \int d\mathbf{c} \left( \frac{3}{2}S_0 - S_1 \right) S_k(c^2) \phi(c).$$

Logo

$$\begin{aligned} V_{02} &= \frac{3}{2}, \\ V_{12} &= -N_1 = -\frac{3}{2}, \\ V_{k2} &= 0 \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

Como  $a_0 = 1$  e  $a_1 = 0$  a equação em este caso é uma identidade.

**Caso p=4:**

Neste caso a equação (A.52) se reduz a

$$\frac{\mu_2}{3}15(1+a_2) - B^{-1} \sum_{k=1} \dot{a}_k V_{k4} = \mu_4,$$

dado  $\langle c^4 \rangle = \frac{15}{4}(1+a_2)$ . Calculamos os coeficientes  $V_{k4}$  fazendo  $c^4 = 2S_2 - 5S_1 + \frac{15}{4}S_0$ . Então

$$V_{k4} = \int d\mathbf{c} (2S_2 - 5S_1 + \frac{15}{4}S_0) S_k(c^2) \phi(c).$$

Logo

$$\begin{aligned} V_{04} &= \frac{15}{4}, \\ V_{14} &= -5N_1 = -\frac{15}{2}, \\ V_{24} &= 2N_2 = \frac{15}{4}, \\ V_{k4} &= 0 \quad k > 2. \end{aligned}$$

Assim obtemos a equação que deve satisfazer  $a_2$

$$\dot{a}_2 - \frac{4}{3}B\mu_2(1+a_2) + \frac{4}{15}B\mu_4 = 0.. \tag{A.53}$$

Esta equação será usada para calcular a evolução temporal de  $a_2$ .

**A.2.4 Integrais importantes**

Vamos mostrar o calculo de algumas integrais usadas para o calculo dos valores médios usados no presente trabalho de tese:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{c} c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \tilde{f}(c) &= \int d\mathbf{c} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \left( \frac{\partial^2}{\partial c_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial c_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial c_z^2} \right) \tilde{f}(c) \\ &\text{integrando por partes duas vezes} \\ &= 2 \times 3 \int d\mathbf{c} \tilde{f}(c) \\ &= 6 \end{aligned} \tag{A.54}$$

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{c} c^2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} \tilde{f}(c) &= \int d\mathbf{c} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \left( \frac{\partial}{\partial c_x} c_x \tilde{f}(c) + \frac{\partial}{\partial c_y} c_y \tilde{f}(c) + \frac{\partial}{\partial c_z} c_z \tilde{f}(c) \right) \\ &= -2 \int d\mathbf{c} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \tilde{f}(c) \\ &= -2 \int d\mathbf{c} c^2 \tilde{f}(c) \\ &= -2 \langle c^2 \rangle \\ &= -3 \end{aligned} \tag{A.55}$$

$$\begin{aligned}
 \int d\mathbf{c} \, c^4 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} \tilde{f}(c) &= \int d\mathbf{c} \, c^4 \left( \frac{\partial^2}{\partial c_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial c_y^2} + \frac{\partial^2}{\partial c_z^2} \right) \tilde{f}(c) \\
 &= \int d\mathbf{c} \left( -4c^3 \frac{\partial c}{\partial c_x} \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_x} - 4c^3 \frac{\partial c}{\partial c_y} \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_y} - 4c^3 \frac{\partial c}{\partial c_z} \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_z} \right) \\
 &\quad \text{como } \partial_{c_\alpha} c = c_\alpha / c \text{ então} \\
 &= \int d\mathbf{c} \left( -4c^2 c_x \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_x} - 4c^2 c_y \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_y} - 4c^2 c_z \frac{\partial \tilde{f}(c)}{\partial c_z} \right) \\
 &= 4 \int d\mathbf{c} \left( 2c \frac{\partial c_x}{\partial c_x} + c^2 + 2c \frac{\partial c_y}{\partial c_y} + c^2 + 2c \frac{\partial c_z}{\partial c_z} \tilde{f}(c) + c^2 \right) \\
 &= 4 \int d\mathbf{c} \left( 3c^2 + 2c^2 \right) \tilde{f}(c) = 20 \langle c^2 \rangle = 30 \tag{A.56}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int d\mathbf{c} \, c^4 \frac{\partial}{\partial \mathbf{c}} \cdot \mathbf{c} \tilde{f}(c) &= \int d\mathbf{c} \, c^4 \left( \frac{\partial}{\partial c_x} c_x \tilde{f}(c) + \frac{\partial}{\partial c_y} c_y \tilde{f}(c) + \frac{\partial}{\partial c_z} c_z \tilde{f}(c) \right) \\
 &= - \int d\mathbf{c} \left( 4c^3 c_x \frac{\partial c}{\partial c_x} + 4c^3 c_y \frac{\partial c}{\partial c_y} + 4c^3 c_z \frac{\partial c}{\partial c_z} \right) \tilde{f}(c) \\
 &= -4 \int d\mathbf{c} \left( c^3 \frac{c_x^2}{c} + c^3 \frac{c_y^2}{c} + c^3 \frac{c_z^2}{c} \right) \tilde{f}(c) \\
 &= -4 \int d\mathbf{c} \, c^4 \tilde{f}(c) \\
 &= -4 \langle c^4 \rangle \\
 &= -15(1 + a_2) \tag{A.57}
 \end{aligned}$$

### A.3 Equação de Boltzmann para valores grandes da velocidade

Seja equação

$$I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) = \int d\mathbf{c}_2 d\Omega |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2| \tilde{\sigma}(\Omega) (\tilde{f}(\mathbf{c}'_1) \tilde{f}(\mathbf{c}'_2) - \tilde{f}(\mathbf{c}_1) \tilde{f}(\mathbf{c}_2)) \quad (\text{A.58})$$

Para  $\mathbf{c} \gg 1$  o termo de ganho pode ser desprezado em relação ao termo de perda na equação. A partir da equação (1.8) encontramos que as velocidades pré-colisionais  $\mathbf{c}'_1$  e  $\mathbf{c}'_2$  se relacionam com as velocidades pós-colisionais  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_2$  pelas equações

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_1 &= \mathbf{c}_1 - \frac{1}{2}(1 + \alpha^{-1})\mathbf{c}_{12} \cdot \hat{\sigma} \\ \mathbf{c}'_2 &= \mathbf{c}_2 + \frac{1}{2}(1 + \alpha^{-1})\mathbf{c}_{12} \cdot \hat{\sigma} \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

onde  $\alpha$  é o coeficiente de restituição. Para  $\mathbf{c} \gg 1$  estas relações se tornam

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'_1 &= \mathbf{c}_1 - \frac{1}{2}(1 + \alpha^{-1})(\mathbf{c}_1 \cdot \hat{\sigma})\hat{\sigma} \\ \mathbf{c}'_2 &= \mathbf{c}_2 + \frac{1}{2}(1 + \alpha^{-1})(\mathbf{c}_1 \cdot \hat{\sigma})\hat{\sigma} \end{aligned}$$

onde se substituiu  $\mathbf{c}_{12}$  por  $\mathbf{c}_1$ . Se  $|\mathbf{c}_1 \cdot \hat{\sigma}|$ , como é o caso típico, nas relações acima podemos desprezar  $\mathbf{c}_2$  fazendo  $\mathbf{c}_2 = 0$ . Isto implica que os módulos de  $\mathbf{c}'_1$  e  $\mathbf{c}'_2$  são

$$\begin{aligned} c'_1 &= c_1 \sqrt{1 - \frac{1}{4}(1 + \alpha^{-1})(3 - \alpha^{-1})\hat{\mathbf{c}}_1 \cdot \hat{\sigma}} \\ c'_2 &= \frac{1}{2}(1 + \alpha^{-1})c_1 |\hat{\mathbf{c}}_1 \cdot \hat{\sigma}| \end{aligned}$$

onde  $\hat{\mathbf{c}}_1$  é um vetor unitário. Supondo que  $\tilde{f}$  é da forma  $\tilde{f}(c) \sim \exp(-ac^b)$  comparamos o fator  $\tilde{f}(c'_1)\tilde{f}(c'_2)$  com  $\tilde{f}(c_1)\tilde{f}(c_2)$  para  $c$  muito grande:

$$\frac{\tilde{f}(c'_1)\tilde{f}(c'_2)}{\tilde{f}(c_1)\tilde{f}(c_2)} \sim \exp - a\{(c'_1)^b + (c'_2)^b - (c_1)^b\} \quad (\text{A.60})$$

onde se desprezou  $c_2$  em relação  $c_1$ . Podemos ver que para o caso  $b=1$

$$\begin{aligned} c'_1 + c'_2 - c_1 &= c_1(\sqrt{1 - (\hat{\mathbf{c}}_1 \cdot \hat{\sigma})^2} + |\mathbf{c}_1 \cdot \hat{\sigma}| - 1) \\ &= 2c_1 |\hat{\mathbf{c}}_1 \cdot \hat{\sigma}| \frac{\sqrt{1 - |\hat{\mathbf{c}}_1 \cdot \hat{\sigma}|}}{\sqrt{1 + |\hat{\mathbf{c}}_1 \cdot \hat{\sigma}|} + \sqrt{1 - |\hat{\mathbf{c}}_1 \cdot \hat{\sigma}|}} \gg 0. \end{aligned}$$

Desta maneira para  $c$  muito grande o expoente diverge e a exponencial é zero. Portanto podemos desprezar o fator  $\tilde{f}(c'_1)\tilde{f}(c'_2)$  quando tomamos o limite  $\mathbf{c}_1 \gg 1$ . Então fazendo  $\mathbf{c}_1 \gg 1$  na equação (A.58) temos

$$I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) \sim -\tilde{f}(\mathbf{c}_1) c_1 \int d\mathbf{c}_2 d\Omega \tilde{\sigma}(\Omega) \tilde{f}(\mathbf{c}_2) \quad (\text{A.61})$$

onde a constante

$$\int d\mathbf{c}_2 d\Omega \tilde{\sigma}(\Omega) \tilde{f}(\mathbf{c}_2) = \pi,$$

então finalmente temos que

$$I_1(\tilde{f}, \tilde{f}) \sim -\pi c_1 \tilde{f}(\mathbf{c}_1) \quad (\text{A.62})$$