3
Taxação de Terras[1]

O Imposto Territorial Rural (ITR), desde sua criação através do Estatuto da Terra, em 1964, tem por objetivo auxiliar as políticas públicas de desconcentração da terra. Entretanto, observou-se um grau elevado de evasão e inadimplência que abalou sua eficácia como instrumento de política fundiária. E, tentando mitigar os problemas detectados, foram feitas duas grandes reformulações em 1979 e 1996, que ainda não se revelaram suficientes.

O capítulo tem como objetivo mostrar que a assimetria de informação presente na relação entre governo e produtores agropecuários pode constituir a origem dos problemas que ainda persistem na aplicação do imposto. Diante de uma situação onde há terra ociosa, como ocorre no Brasil, o modelo teórico a seguir mostra que o uso do ITR como único instrumento tributário não é capaz de implementar o esquema ótimo. E a solução apontada pelo modelo envolve a utilização de um esquema misto que considera o Imposto sobre a Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS) e o ITR.

3.1
A Literatura sobre Taxação de Terras

O modelo apresentado nas seções seguintes tenta preencher uma lacuna existente entre os modelos de taxação sob informação assimétrica e os modelos de taxação de terra. De um lado, os modelos de taxação ótima abordam fundamentalmente impostos sobre o consumo e renda, não considerando tópicos relevantes e específicos da atividade agrícola [Mirrlees (1971, 1986)]. Por outro lado, os artigos que tratam da taxação de terras se concentram em outras questões, descritas brevemente a seguir.

Henry George (1839-1897) foi o primeiro a estabelecer uma racionalidade econômica para a taxação de terras, em Progress and Poverty, pub-

[1]Este capítulo foi publicado como: Assunção, J. J. e H. Moreira (2001) "Toward a truthful land taxation mechanism in Brazil", *Brazilian Review of Econometrics*, 21(1): 49-99.

licado em 1879. O autor atribuiu o desemprego e os baixos salários a uma escassez artificial de terras e ao mau funcionamento do mercado. Essa escassez artificial seria o resultado de uma distribuição desigual das terras públicas e de atividades especulativas. Nesse contexto, George propõe a utilização do imposto sobre a propriedade da terra para dinamizar o mercado de terras, sendo capaz de induzir ao pleno uso do solo, sem distorcer os incentivos marginais. Arnott e Stiglitz (1979) analisam a generalidade da proposição que ficou conhecida como teorema de Henry George, tornando-se uma referência clássica nessa direção.

Outros autores também salientam as vantagens inerentes ao uso do imposto sobre a terra como fonte de arrecadação [Deininger e Feder (2000) e Skinner (1991b)]. O imposto sobre a terra não distorce a alocação de recursos e constitui um dos poucos exemplos de imposto *lump-sum*, o qual poderia garantir um nível mínimo de arrecadação, dado que a oferta de terra é inelástica. Além disso, o tamanho dos estabelecimentos é observado - principalmente em regiões onde a propriedade da terra é individualizada, existem informações acessíveis e confiáveis sobre o tamanho das propriedades.

O artigo de Hoff (1991), por outro lado, questiona a utilização do imposto sobre terra. A autora argumenta que em um ambiente de incerteza como a agricultura, em que os produtores são avessos ao risco, o uso exclusivo do imposto sobre a terra promove uma alocação ineficiente do risco. Um esquema de taxação baseado exclusivamente no imposto sobre terra impõe risco aos produtores agrícolas, que encontram–se obrigados a recolher um montante fixo por hectare independente da colheita. Dessa forma, a utilização de um esquema misto que considera também o imposto sobre o produto revela-se Pareto-superior. A composição ótima de imposto sobre o produto e imposto sobre a terra é determinada pelo dilema entre distorção (introduzida pelo imposto sobre o produto) e compartilhamento de risco.

Carter e Mesbah (1993), utilizando um modelo de equilíbrios múltiplos, mostram que a utilização de um imposto sobre a terra é ineficaz para o deslocamento da “barreira de acumulação”. Essa barreira é estabelecida pelo tamanho crítico do estabelecimento que determina se o produtor será um pequeno ou um grande proprietário. Entretanto, este resultado é decorrente do esquema linear de imposto sobre a terra utilizado pelos autores. Regras com alíquotas progressivas, como no caso do ITR, poderiam afetar significativamente, nesse modelo, a barreira de acumulação.

Skinner (1991a) enfatiza os altos custos informacionais requeridos para a administração desse tipo de imposto. Entretanto, apesar de considerar a possibilidade de tipos de produtores diferentes, não trata do problema de desenho de mecanismos com o qual o governo se depara. Na relação entre governo e produtores, apenas o comportamento dos últimos é estratégico. O governo tem apenas uma probabilidade positiva de avaliar incorretamente o valor das terras.

Outra questão avaliada por Skinner (1991a) estabelece que a perda de capital resultante da aplicação do imposto é transitória, afetando apenas os atuais proprietários de terra. Entretanto, quando os agentes têm acesso a outros ativos, uma condição de não-arbitragem garante que o imposto seja completamente absorvido por uma redução no preço da terra.

3.2 Experiência Brasileira

O imposto sobre a propriedade da terra foi instituído no Brasil pela Constituição Republicana de 1891, vigorando em âmbito estadual. A responsabilidade dos estados pela cobrança e administração do imposto foram mantidas nas Constituições de 1934, 1937 e 1946. Em 1961, com a promulgação da Emenda Constitucional no. 5, o ITR foi transferido aos municípios e, em 1964, com a Emenda Constitucional no. 10, ocorreu a transferência da competência para a União. A promulgação do Estatuto da Terra em 1964 impôs funções extra-fiscais ao imposto que passa, em princípio, a auxiliar as políticas públicas de desconcentração da terra [Oliveira (1993) e Reydon et al. (2000)].

A seguir, são descritas brevemente as mudanças ocorridas nas três fases que sucederam à implantação do Estatuto da Terra. Esta retrospectiva histórica permite que sejam analisadas as razões que levaram às principais modificações e a abrangência das soluções adotadas. Ao final desta seção, espera-se que o leitor se convença que, mesmo após uma série de mudanças, ainda persiste um problema crônico com a implementação do imposto que impede a obtenção do nível de arrecadação desejado. E é esse o objeto central do modelo teórico apresentado na seção 5.3.

3.2.1 Primeira Fase: 1964-1979

Após a promulgação do Estatuto da Terra (Lei no. 4504, 30 de novembro de 1964), a cobrança do ITR tornou-se responsabilidade do

INCRA. Utilizando a descrição de Oliveira (1993), a alíquota básica era de 0,2%, corrigida por coeficientes relacionados à dimensão (A), localização (B), condições sociais (C) e produtividade (D), o que determinava uma carga tributária dada por

$$ITR = (0.002 \times A \cdot B \cdot C \cdot D)VTN,$$

onde VTN representa o valor da terra nua. Dadas as faixas de variação de cada coeficiente, a alíquota variava de 0,24% a 3,456%.

Entretanto, verificou-se que os objetivos que pautaram o desenho do imposto estavam longe de ser alcançados. Oliveira e Costa (1979), citados por Oliveira (1993), concluíram que o ITR nunca chegou a constituir uma boa fonte de receita e tampouco conseguiu promover as mudanças desejadas no meio rural. As principais conclusões apresentadas pelos autores são:

1. "Dado o pequeno impacto do ITR (e tributos paralelos) sobre o lucro e taxa de retorno dos imóveis rurais e, dado o não cumprimento das obrigações fiscais por grande parte dos contribuintes, pode-se inferir que o referido imposto não contribui e dificilmente contribuirá para alterar as relações econômico-sociais na agricultura brasileira.

2. Do ponto de vista de categorias de imóveis, o ITR apresenta incoerências, ao tributar mais pesadamente o minifúndio do que o latifúndio e, em inúmeros casos, trata-se a empresa rural com mais rigor do que os latifúndios. A razão de tais inversões decorre da sistemática de cálculo do imposto que não discrimina o contribuinte segundo categoria de imóveis (minifúndio, empresa rural e latifúndio).

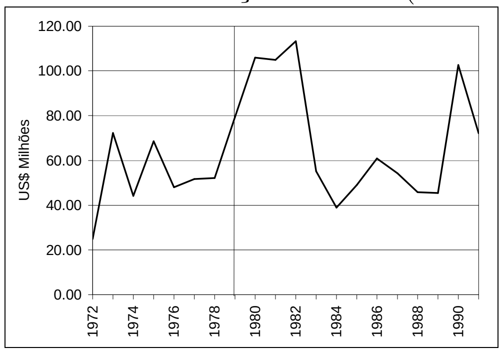
3. A categorização de imóveis rurais adotada pelo INCRA para definir minifúndios, empresa rural e latifúndios não tem contrapartida na realidade.

4. A pretendida variação de alíquotas legais não é observada. Isto se deve ao fato de os coeficientes de dimensão, localização, condições sociais e produtividade não se adequarem à realidade da estrutura rural brasileira.

5. O problema de evasão é grave.

6. O sistema de atualização do valor da terra nua, nos anos entre-recadastramento, segundo índice de correção monetária, não reflete o comportamento da base tributária no tempo" [Oliveira e Costa (1979)].

Figura 3.1: Arrecadação do ITR (1972-1991)



Fonte: Oliveira (1993)

Enfim, o quadro que se estabelecia nos anos 70, resumidamente apresentado acima, evidencia uma série de problemas com a implementação do ITR. Nessa época, em virtude da importância dos problemas operacionais, responsáveis por grandes distorções, questões de natureza mais estrutural não ocupavam o espaço devido nas discussões. Acreditava-se, e estas crenças ainda persistem, que os problemas envolvidos com o ITR são apenas de ordem operacional.

3.2.2
Segunda Fase: 1979-1996

As complicações enfatizadas acima motivaram à primeira reformulação importante na legislação do ITR. As modificações mais significativas para as questões relacionadas com este trabalho recaíram sobre o artigo 49 do Estatuto da Terra, segundo o qual, "as normas gerais para a fixação do Imposto sobre a Propriedade Territorial Rural passam a obedecer a critérios de progressividade e regressividade, levando-se em conta os seguintes fatores: o valor da terra nua; a área do imóvel rural; o grau de utilização da terra na exploração agrícola, pecuária e florestal; o grau de eficiência obtido nas diferentes explorações; a área total, no País, do conjunto de imóveis rurais de um mesmo proprietário; a classificação das terras e suas formas de uso e rentabilidade".

Utilizando novamente a descrição de Oliveira (1993), a reformulação ainda manteve o VTN como base do tributo. A alíquota tornou-se uma função do grau de utilização da terra (GUT) e do grau de eficiência da exploração (GEE), de modo que

$$ITR = t\,(GUT, GEE) \cdot VTN.$$

E, de acordo com esse esquema, a alíquota teria uma variação entre 0,2% e 3,5% (para propriedade acima de 100 módulos fiscais).

Os dados apresentados por Oliveira (1993) apontam uma frustração com a arrecadação. Os níveis da arrecadação se elevaram nos anos subsequentes à mudança mas retornaram, em 1983, aos níveis anteriores, como mostra a figura 3.1. Mesmo em 1990, o nível arrecadado corresponde à insignificante quantia de US$ 20,30 por imóvel rural. A carga tributária correspondeu a 25% de um salário mínimo/ano em janeiro de 1992.

Segundo a Secretaria de Comunicação de Governo da Presidência da República, o percentual do VTN declarado em relação ao preço real da terra na década de 80 variava de 20% para as propriedades com menos de 10 ha a 1,2% para as grandes propriedades com mais de 10 mil ha. A área declarada aproveitável era muito menor que a real, com os maiores proprietários declarando algo em torno de 50% e os menores 94%. E a declaração da produtividade era ainda mais irreal, com casos, aceitos pelo INCRA, em que a produtividade era mais de dez vezes superior ao valor esperado calculado pelo IBGE.

O impacto diferenciado do esquema de cobrança do ITR sobre pequenos e grandes proprietários pode ser entendido no contexto do modelo da seção 5.3. Os esquemas que usam apenas o ITR têm o efeito desejado em pequenos produtores. Entretanto, para os grandes proprietários que operam com terra ociosa, torna-se necessária a utilização de um outro instrumento, o ICMS.

Apesar dos problemas de sub-tributação e evasão encontrados, a questão da assimetria de informação na relação entre governo e proprietários de terra ainda não era incorporada na análise. Ao contrário, análises como a de Sayad (1982) consideravam hipóteses que já eliminavam essa característica fundamental do problema de taxação no mercado de terras. Dentre as hipóteses enunciadas pelo autor, destacam-se: “agricultores e não agricultores têm a mesma expectativa de valorização, ou seja, ambos são igualmente otimistas ou pessimistas com relação à evolução futura dos preços dos imóveis rurais; e não existe cultura de vitrine, ou seja, a possibilidade de burlar o imposto através da manutenção de cultivo agrícola apenas suficiente para evitar a taxação”.

Novamente o debate concentrava-se em questões operacionais, principalmente na complexidade do cálculo do imposto e no descontrole administrativo. Os altos níveis de evasão eram atribuídos à ineficiência do órgão arrecadador. E, como conseqüência destas constatações, a administração do ITR passa para a Secretaria da Receita Federal em 1990.

Área total do imóvel (em hectares)	Grau de Utilização				
	>80	65 a 80	50 a 65	30 a 50	<30
até 50	0.03	0.20	0.40	0.70	1.00
50 a 200	0.07	0.40	0.80	1.40	2.00
200 a 500	0.10	0.60	1.30	2.30	3.30
500 a 1000	0.15	0.85	1.90	3.30	4.70
1000 a 5000	0.30	1.60	3.40	6.00	8.60
acima de 5000	0.45	3.00	6.40	12.00	20.00

Tabela 3.1: Cálculo da Alíquota do ITR

3.2.3 Terceira Fase: Pós 1996

Em resposta aos problemas detectados, foi feita uma reformulação em dezembro de 1996 que, dentre outras modificações, determinou:

– aumento da alíquota dos imóveis grandes e improdutivos - o limite máximo de 4,5% para a propriedade acima de 15 mil hectares passou para 20% sobre propriedades acima de 5 mil hectares;

– simplificação das faixas de cobrança de 12 para 6;

– fim da diferenciação regional das alíquotas;

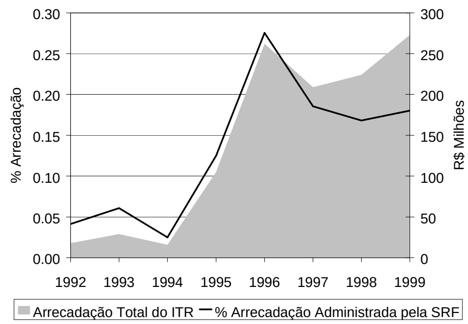
– valor declarado pelo proprietário, para efeito do pagamento do ITR, será considerado em caso de desapropriação.

As alíquotas diferenciam-se apenas pelo grau de utilização e pela área total do imóvel, de acordo com a tabela 3.1. Pode-se verificar que há uma acentuada progressividade no tamanho da propriedade e regressividade no grau de utilização, modificada de forma que os imóveis produtivos foram privilegiados.

Reydon et al. (2000) salientam a descontinuidade presente nas alíquotas adotadas, observando que um imóvel com 50,1 ha e um grau de utilização de 80,0% pode pagar um montante de imposto 13 vezes maior que um imóvel de 50,0 ha com grau de utilização igual a 80,1%. A solução apontada por alguns autores é o uso de redutores, como ocorre no Imposto de Renda.

Além disto, Reydon et al. (2000) mostram que, apesar dos aperfeiçoamentos administrativos e legais, as expectativas geradas em torno da reformulação não se confirmaram. As principais razões associam-se à dificuldade de avaliação do valor da terra nua e da imprecisão do conceito de área utilizada. A tabela 3.2 mostra, de um lado, a melhoria obtida com a reformulação de 1996 e, por outro, o baixo grau de arrecadação. Entre 1995 e

Figura 3.2: Arrecadação do ITR (1992-1999)



Fonte: Secretaria da Receita Federal

1996 a arrecadação bruta do ITR duplicou, mas continua a ser uma fonte de arrecadação sem expressão, responsável por menos de 0.3% da arrecadação administrada pela Secretaria da Receita Federal.

Segundo cálculos de Oliveira (1993), a receita do ITR iria variar entre 1,4 e 2,8 bilhões de dólares por ano, caso fossem utilizadas alíquotas entre 0.5% e 1.0% e o imposto fosse efetivo. Apesar dos cálculos não considerarem o efeito da aplicação efetiva dessas alíquotas sobre as decisões dos proprietários de terra, a magnitude das estimativas deixam claro o espaço existente para o aumento da arrecadação.

Enfim, mesmo após a melhoria de uma série de problemas operacionais, o ITR ainda continua pouco efetivo. A situação descrita nessa seção caracteriza a incapacidade do governo em aplicar corretamente um esquema de taxação e com isso mitigar os altos graus de evasão e sub-tributação. Os dados fornecidos apontam ainda para o fato de que esta incapacidade ainda é mais crônica as para grandes propriedades.

3.3 Estrutura do Modelo

O modelo a seguir tem uma relação estreita com a realidade brasileira e os artigos mencionados na seção 3.1. A adaptação à realidade brasileira é dada pelo tipo de diferenciação dos produtores agrícolas e pela ausência do mercado de arrendamento de terras. A evidência empírica aponta que pequenos produtores, mais produtivos, convivem com grandes latifundiários, com lucros por hectare bem menores. Uma possível interpretação sobre o mecanismo de geração dessa relação é dada pela proposição 1.2 e sugere que, para alguns produtores, a propriedade da terra oferece benefícios não-agrícolas enquanto para outros, os ganhos mais relevantes são obtidos com a atividade agrícola. Nesse contexto, o governo pode tentar utilizar o imposto sobre terra para combater esse uso não-agrícola da terra, como mostrado na seção 3.2.

Ao tratar o desenho do esquema de taxação ótimo sob informação assimétrica, o modelo mostra que o problema de custos informacionais levantado por Skinner (1991a), presente na realidade brasileira, pode ser ao menos parcialmente resolvido pela utilização do imposto sobre o produto. A utilização desse imposto, além de transferir menos risco aos produtores (como no modelo de Hoff (1991)), constitui um instrumento essencial para a obtenção de declarações corretas dos parâmetros de produtividade e quantidade de terra cultivada. Nesse sentido, o resultado é uma aplicação do argumento de Hoff (1991) ao caso de seleção adversa ao invés da questão de compartilhamento ótimo de risco. Ou seja, o imposto sobre o produto passa a importar não apenas para estabelecer uma alocação mais eficiente de risco como também para coibir evasão fiscal num ambiente de informação assimétrica.

O modelo mantém as duas hipóteses que vem sendo utilizadas até o momento. Primeiro, a propriedade da terra tem duas finalidades básicas: pode ser utilizada para a produção agrícola ou para fins não-agrícolas. Segundo, não existe mercado de arrendamento. A atividade não-agrícola é considerada de forma ad hoc, como uma forma reduzida em que a terra é utilizada para fins não-agrícolas. O modelo concentra-se no problema de um governo que maximiza sua utilidade desenhando um mecanismo de taxação baseado na quantidade produzida e no tamanho da propriedade.

Considere uma economia em que os tipos dos produtores rurais são indexados por $(\theta, \eta) \in \Theta$, onde $\Theta = \left[\underline{\theta}, \overline{\theta}\right] \times \left[\underline{\eta}, \bar{\eta}\right]$, distribuídos segundo a função de distribuição $F_{\theta\eta}$, com suporte em todo o retângulo. Os parâmetros θ e η referem-se, respectivamente, à produtividade das atividades agrícola e não-agrícola.

O modelo é de equilíbrio parcial. O preço do produto agrícola é normalizado em 1, existe uma quantidade ilimitada de terras ao preço p e cada hectare cultivado custa w.[2] Tanto o produto quanto as terras são perfeitamente homogêneos.

O agricultor do tipo (θ, η) que compra uma propriedade de tamanho T, cultiva uma área A e paga uma transferência t para o governo, tem o

[2] Implicitamente, para simplificar, a tecnologia de produção é de proporções fixas, em que w representa o gasto com mão-de-obra e insumos intermediários por hectare, como no capítulo 1.

lucro dado por:

$$\Pi = \theta Q(A) - wA + \eta\phi(T) - pT - t, \quad (3\text{-}1)$$

onde Q e ϕ são as funções de produção e de benefícios não-agrícolas, respectivamente, estritamente crescentes e côncavas, respeitando as condições de Inada. A transferência t é determinada pelo governo, que pode condicioná-la à quantidade produzida e ao tamanho da propriedade, que são observáveis. Pode-se notar que quanto maior η, maior o benefício da especulação e, quanto maior θ, maior é a produtividade da atividade agrícola.

Assume-se que não há mercado de arrendamento e que, portanto, a escolha de cada produtor deve respeitar a condição de escassez $A \leq T$. Desse modo, diante de um esquema de taxação t, os agricultores se deparam com o programa

$$\max_{A,T} \Pi \text{ s.a. } A \leq T. \quad (P)$$

O governo tem sua utilidade dependente da receita tributária e do uso não-agrícola da terra. Sendo $\lambda \in [0,1]$ o "preço sombra" atribuído à atividade não-agrícola, a função de utilidade do governo é definida por

$$U = t - \lambda\eta\phi(T). \quad (3\text{-}2)$$

Dessa forma, o governo passa a se opor à atividade não-agrícola.

Para simplificar a análise, é considerado apenas o caso em que há uma relação determinista entre os tipos θ e η, ou seja, $\theta = \theta(\eta)$, com

$$\dot{\theta} < 0 \text{ e } \ddot{\theta} = 0. \quad (A1)$$

Dessa forma, os produtores agrícolas podem ser especificados completamente pelo parâmetro η e $\Theta = \left[\underline{\eta}, \bar{\eta}\right]$. O caso bidimensional geral é matematicamente muito mais complexo e sua solução envolve a adoção de ordenamentos que não adicionariam muito aos resultados obtidos [veja Rochet e Choné (1997)]. A distribuição de η em Θ é dada pela função distribuição F.

A hipótese $(A1)$ determina que a produtividade agrícola seja decrescente em η, o que encontra-se de acordo com a evidência apresentada nas seções 2.3 e 3.4. Os produtores com alta produtividade agrícola tem baixos benefícios não-agrícolas com a propriedade da terra e vice-versa. Em culturas intensivas em mão-de-obra, aqueles produtores com maior acesso à atividade não-agrícola não estão envolvidos inteiramente com a agricultura e, diante de imperfeições do mercado de trabalho, tornam-se menos produtivos [Deininger e Feder (2000)].

A seguir, são apresentadas hipóteses técnicas sobre a distribuição dos tipos e as tecnologias de produção. O uso dessas hipóteses facilita a caracterização dos resultados. A seção 3.6.1 discute o efeito de cada hipótese sobre o esquema ótimo de taxação.

Supõe-se que a distribuição dos tipos é tal que

$$\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F(\eta)}{f(\eta)}\right)<0, \qquad (A2)$$

ou seja, assume-se que a razão de verossimilhança seja monótona. A condição $(A2)$ é usual na literatura de desenho de mecanismo para evitar complicações técnicas para a solução do modelo [Salanié (1998)]. Essa hipótese não afeta qualitativamente os resultados obtidos e é atendida para o caso de várias distribuições de probabilidade conhecidas como, por exemplo, uniforme, normal, logística, exponencial, dentre outras.

Para facilitar a caracterização dos resultados, assume-se ainda que as funções θ, ϕ e Q são tais que, para $A=T$ e k suficientemente grande,[3]

$$\dot{\theta}Q+\phi>0, \qquad (A3a)$$

$$k\dot{\theta}Q'+\phi'>0, \qquad (A3b)$$

$$\frac{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F}{f}\right)\phi'}{\left[1-\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F}{f}\right)\right]\dot{\theta}Q'}>1. \qquad (A3c)$$

As hipóteses $(A3a)$ e $(A3b)$ determinam que um aumento marginal em η provoca um aumento no ganho e no benefício marginal não-agrícola suficientemente maior do que o da atividade produtiva. Em outras palavras, o benefício não-agrícola deve ser suficientemente lucrativa. Dadas as hipóteses $(A3a)$ e $(A3b)$, com $k=2$, note que $(A1)$ e $(A3c)$ são atendidas para o caso da distribuição uniforme. Essas hipóteses dizem respeito à diversidade de produtores na economia, introduzindo no modelo e enfatizando a relação inversa entre tamanho de propriedade e produtividade, mencionada nas seções 2.3 e 3.4.

Os resultados apresentados nas próximas seções são demonstrados

[3] O valor mínimo de k é determinado na demonstração da proposição 3.3.

rigorosamente no apêndice. Para ilustrar graficamente os resultados, foi considerado um exemplo numérico em que $Q = \log A$, $\phi = k \log T$, $\theta = m - \eta$ e $\eta \sim U[0,1]$, onde as constantes foram fixadas em valores convenientes para produzir figuras com características típicas do enunciado dos resultados.[4]

3.4 Resultados com Informação Completa

Inicialmente, a escolha do mecanismo de taxação é feita em um ambiente de informação completa. Ou seja, o governo observa com exatidão o tipo dos agentes, conseguindo fixar as regras de cobrança dos impostos com base na disposição de cada agricultor em utilizar a terra para fins produtivos ou não. Esse exercício inicial permite a identificação precisa das questões introduzidas pela assimetria de informação.

O governo, sob informação completa, pode determinar as alocações de cada produtor, via um esquema de punição para a taxação. As únicas condições que restringem a escolha do governo são a restrição de escassez (RE) e a restrição de participação (RP) para cada produtor. Os produtores aceitam qualquer esquema de taxação do governo que produza um nível de lucro não-negativo em equilíbrio. O mecanismo ótimo de taxação para cada produtor de tipo $\eta \in \Theta$, nesse caso, é definido pelo programa abaixo:

$$\max_{\{t,A,T\}} U \tag{$P.FB$}$$

sujeito a

$$\Pi \geq 0, \tag{RP}$$

$$A \leq T. \tag{RE}$$

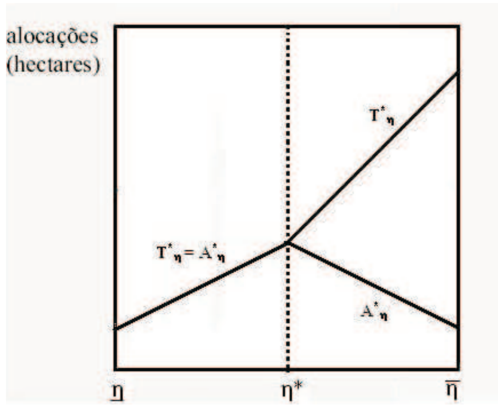
A solução desse programa é dada pela proposição abaixo.

Proposição 3.1 *Sob (A1), o mecanismo ótimo de taxação no caso de informação completa pode envolver duas categorias de produtores: (i) aqueles que operam sem terra ociosa e são restritos por (RE) - $\eta \in \Theta_R$; e (ii) aqueles para os quais a restrição (RE) não é ativa - $\eta \in \Theta_I$. A alocação ótima é definida por $\left(t_\eta^*, A_\eta^*, T_\eta^*\right)_{\eta \in \Theta}$ e apresenta as seguintes características:*

- *em Θ_R, a alocação ótima é tal que a área cultivada é igual ao tamanho da propriedade. Ambas são crescentes em η e determinadas*

[4] $k = 4, m = 5, w = 0.045, r = 0.01$ e $\lambda = 0.5$.

Figura 3.3: Alocação Ótima com Informação Completa



pela igualdade entre o benefício marginal total, $\theta Q' + \eta\phi'$, e o custo social marginal, $w + r + \lambda\eta\phi'$, de cada hectare cultivado;

– *em Θ_I, os produtores não encontram-se restritos por (RE). A área cultivada é decrescente em η e determinada pela igualdade entre o benefício marginal, $\theta Q'$, e o custo marginal de cada hectare cultivado, w. O tamanho da propriedade é crescente em η e tal que iguala o benefício marginal da atividade não-agrícola, $\eta\phi'$, ao seu custo marginal social, $r + \lambda\eta\phi'$;*

– *o governo consegue apropriar todo o lucro dos produtores.*

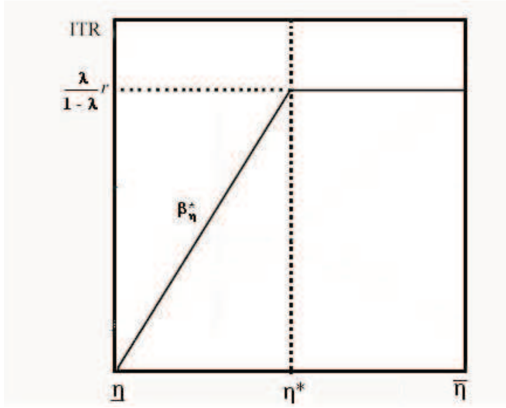
Prova. ver apêndice B. □

Note que o custo marginal social difere do custo marginal individual em $\lambda\eta\phi'\left(T^*_\eta\right)$, o que sugere uma interpretação natural para λ. Quando $\lambda = 0$, o governo não se importa com o benefício não-agrícola da propriedade da terra e os níveis de A e T determinados por $(P.FB)$ coincidem com aqueles determinados pelos agentes segundo o programa (P). Nesse caso, o preço sombra da atividade não-agrícola é zero e o governo, ao maximizar a receita tributária, maximiza o lucro individual de cada produtor, que é completamente apropriado. Por outro lado, caso $\lambda = 1$, o governo inibe completamente a existência de terra ociosa, uma vez que o preço sombra da restrição de escassez torna-se constante e igual a r para todo $\eta \in \Theta$.

As transferências exigidas pelo governo representam todo o lucro dos produtores. No modelo com informação completa, todas as restrições (RP) são ativas em equilíbrio. A figura 3.3 ilustra qualitativamente o formato das alocações associadas ao esquema ótimo de taxação.

O resultado a seguir mostra que esse esquema pode ser implementado por um esquema análogo ao do ITR.

Figura 3.4: Alíquotas Ótimas do ITR com Informação Completa



Proposição 3.2 *Sob (A1) e informação completa, a solução do problema de taxação ótima pode ser descentralizada por um menu de impostos lineares da forma:*

$$t_\eta^* = \beta_\eta^* T + \gamma_\eta^*,$$

onde $\beta_\eta^* = \lambda \eta \phi' \left(T_\eta^*\right)$ *corresponde à diferença entre o custo marginal social e o custo marginal individual da propriedade da terra; e* γ_η^* *é uma parcela fixa que ajusta o nível da arrecadação.*
Prova. ver apêndice B. □

Na forma de implementação descrita pelo resultado acima, o governo oferece um par $\left(\beta_\eta^*, \gamma_\eta^*\right)$ para o produtor do tipo η. E, ao resolver (P), cada agricultor escolhe quantidades A e T iguais a A_η^* e T_η^*, respectivamente. Note que há uma analogia direta entre o ITR, em cumprimento à sua função sobre a distribuição de terra, e o parâmetro β_η^*. A alíquota é mais alta quanto maior λ e quanto maior a disposição do agricultor em utilizar terra de forma não produtiva, o que é medido por η. Caso $\lambda = 0$, o governo não distorce a escolha dos produtores, não taxando a propriedade da terra.

Em Θ_I, tem-se que $\beta_\eta^* = \frac{\lambda}{1-\lambda} r$ e, portanto, a alíquota de ITR não varia segundo o tipo do produtor. Com isso, o modelo mostra que, num contexto de informação completa, pode-se usar uma alíquota única para produtores que operam acima de determinado tamanho de propriedade. A figura 3.4 ilustra o formato que as alíquotas ótimas para o ITR devem obedecer no caso de informação completa.

O resultado mostra que, se o governo conseguisse observar com precisão os parâmetros de produtividade dos proprietários de terra, existiriam alíquotas capazes de implementar um esquema ótimo de taxação. Portanto, o ITR seria capaz de implementar a solução ótima. E nessa solução, se

$\lambda > 0$, o governo inibiria o uso não-agrícola da terra, sendo que, com $\lambda = 1$, não haveria terra ociosa em equilíbrio.

3.5 Resultados com Informação Assimétrica

Considere o modelo mais realista em que há informação assimétrica sobre a produtividade e o benefício não-agrícola da terra. O problema de escolha ótima do esquema de taxação transforma-se em um problema típico de desenho de mecanismos.

A primeira vista, o problema do governo sob informação assimétrica não é tratável dada a complexidade dos mecanismos de taxação possíveis. Entretanto, pode-se utilizar um resultado, conhecido como *Princípio da Revelação*, para simplificar o problema e torná-lo manipulável. Segundo esse resultado, basta o governo concentrar-se naqueles mecanismos diretos e reveladores da verdade, uma vez que são capazes de replicar qualquer equilíbrio Bayesiano desse jogo de informação incompleta [Mirrlees (1971)].

O princípio da revelação implica que o governo pode concentrar-se nos esquemas declaratórios e, com base na informação declarada pelo agente, $\hat{\eta}$, determinar a alocação $(t_{\hat{\eta}}, A_{\hat{\eta}}, T_{\hat{\eta}})$ com o objetivo de induzir a revelação do verdadeiro valor de η. Seja $\Pi(\hat{\eta}|\eta)$ o lucro do produtor do tipo η quando escolhe a alocação desenhada para o tipo $\hat{\eta}$, isto é,

$$\Pi(\hat{\eta}|\eta) = \theta Q(A_{\hat{\eta}}) - wA_{\hat{\eta}} + \eta\phi(T_{\hat{\eta}}) - pT_{\hat{\eta}} - t_{\hat{\eta}}$$

para todo $(\eta, \hat{\eta}) \in \Theta \times \Theta$. Pode-se então caracterizar uma alocação como *implementável* se, e somente se,

$$\Pi(\eta|\eta) \geq \Pi(\hat{\eta}|\eta), \ \forall (\eta, \hat{\eta}) \in \Theta \times \Theta. \tag{3-3}$$

Dessa forma, além de considerar as restrições de escassez e de participação, o esquema de tributação é condicionado por restrições de incentivos (RI). A determinação do mecanismo de tributação ótimo sob informação assimétrica é feita pelo governo através da resolução do seguinte programa de maximização:

$$\max_{\{t_\eta, A_\eta, T_\eta\}_{\eta\in\Theta}} \int_\Theta t_\eta - \lambda\eta\phi(T_\eta)\, dF(\eta) \qquad (P.SB)$$

sujeito a que, para todo $\eta \in \Theta$,

$$\Pi(\eta|\eta) \geq 0, \tag{RP_η}$$

$$\Pi(\eta|\eta) \geq \Pi(\hat{\eta}|\eta), \ \forall \hat{\eta} \in \Theta, \tag{RI_η}$$

e

$$A_\eta \leq T_\eta. \tag{RE_η}$$

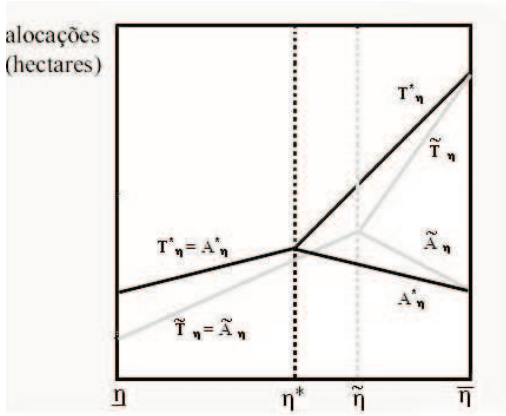
Note que o programa de maximização do governo está escrito nas variáveis t, A e T, apesar de que, no modelo, o governo observa apenas T e θQ ao determinar t. Entretanto, como fica provado na demonstração da proposição 11, no apêndice, um mecanismo baseado em t, A e T pode ser implementado por um mecanismo em t, T e θQ, e vice-versa. Ao escolher o mecanismo ótimo, o governo incorpora as restrições (RE_η) em sua decisão, uma vez que a restrição de escassez e a racionalidade dos agentes são de conhecimento comum.

A solução do modelo com informação assimétrica pode ser dada então pela seguinte proposição.

Proposição 3.3 *Assuma (A1)-(A3). O esquema ótimo de tributação $\left(\tilde{t}_\eta, \tilde{A}_\eta, \tilde{T}_\eta\right)$, sob informação assimétrica, tem as seguintes características:*

- *existem no máximo 2 categorias de produtores: $\tilde{\Theta}_R = \left[\underline{\eta}, \tilde{\eta}\right]$ e $\tilde{\Theta}_I = (\tilde{\eta}, \bar{\eta}]$ tais que $\tilde{A}_\eta = \tilde{T}_\eta$ para todo $\eta \in \tilde{\Theta}_R$ e há um aumento do número de produtores restritos por (RI_η), ou seja $\Theta_R \subset \tilde{\Theta}_R$;*
- *em $\tilde{\Theta}_R$, $\left(\tilde{A}_\eta, \tilde{T}_\eta\right)$ são determinados pela igualdade entre o benefício marginal e o custo marginal "virtual" total do hectare cultivado, que corresponde ao custo marginal social, $w + r + \lambda\eta\phi'$, somado à renda informacional marginal, $\frac{1-F}{f}\left(\dot{\theta}Q' + \phi'\right)$; e mais $\dot{A}_\eta = \dot{T}_\eta > 0$;*
- *em $\tilde{\Theta}_I$, $\left(\tilde{A}_\eta, \tilde{T}_\eta\right)$ são determinados pela igualdade entre o benefício marginal e o custo marginal "virtual" de cada hectare cultivado, $w + \frac{1-F}{f}\dot{\theta}Q'$, e cada hectare de terra, $r + \lambda\eta\phi' + \frac{1-F}{f}\phi'$; e mais, $\dot{A}_\eta < 0$ e $\dot{T}_\eta > 0$;*
- *em decorrência da informação assimétrica, as transferências para o governo são descontadas da renda informacional obtida por cada agente;*
- *apenas o agente do tipo $\underline{\eta}$ não recebe renda informacional - para os demais, as restrições (RP_η) são inativas.*

Figura 3.5: Alocações Ótimas



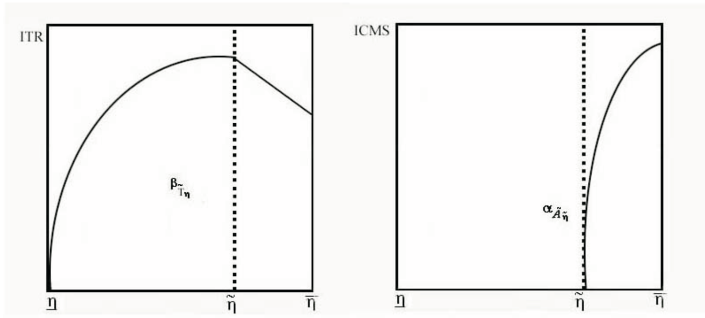
Prova. ver apêndice B. □

Esse resultado demonstra o efeito da assimetria de informação sobre a escolha da quantidade de terra utilizada de forma produtiva e a quantidade de terra ociosa. Caso exista um $\tilde{\eta} \in (\underline{\eta}, \bar{\eta})$, o esquema ótimo de tributação do governo não consegue inibir totalmente a existência de terra ociosa, mesmo se $\lambda = 1$.

Mesmo para os produtores sem terra ociosa, $\eta \in \tilde{\Theta}_R$, há uma distorção na determinação do tamanho do estabelecimento em relação ao caso com informação completa. Para esses produtores, essa distorção significa uma redução no tamanho dos estabelecimentos. Entretanto, para os produtores em $\tilde{\Theta}_I$, o custo marginal virtual de cada hectare cultivado é menor do que o custo marginal, pois a renda informacional toma a forma de um subsídio a produção. A figura 3.5 apresenta uma comparação entre as alocações obtidas nos casos de informação completa e assimétrica. Note que, exceto para aqueles produtores de tipo $\bar{\eta}$, as escolhas da área cultivada e do tamanho do estabelecimento são distorcidas.

O resultado de implementação da alocação ótima via um mecanismo de impostos lineares é estabelecido na proposição 3.4. O total de imposto pago por cada produtor agrícola constitui-se de três parcelas: imposto sobre o produto (cuja alíquota depende da área cultivada ou da produção, equivalentemente), imposto sobre a propriedade da terra, e uma parte fixa. A parte fixa é tal que não afeta as escolhas da área cultivada A ou do tamanho do estabelecimento T, servindo apenas para que o governo ajuste a arrecadação ao nível máximo suportado por cada produtor. As alocações são inteiramente determinadas pelo imposto sobre produto e o imposto sobre a propriedade da terra. Matematicamente, tem-se que $\frac{\partial \gamma}{\partial A} = \frac{\partial \gamma}{\partial T} = 0$ em equilíbrio.

Figura 3.6: Alíquotas Ótimas de ICMS e ITR



Proposição 3.4 *Sob (A1)-(A3) e informação assimétrica, a solução de (P.SB) pode ser descentralizada por um menu de impostos lineares da forma*

$$\alpha_A \theta Q\left(A\right) + \beta_T T + \gamma_{(A,T)},$$

onde $\alpha_A = 0$ *para todo* $A \in \left[\tilde{A}_{\underline{\eta}}, \tilde{A}_{\tilde{\eta}}\right]$. *Nesse esquema, o governo oferece* $\left(\alpha_A, \beta_T, \gamma_{(A,T)}\right)$ *observando o produto* $\theta Q\left(A\right)$ *e o tamanho do estabelecimento* T. *E os proprietários, maximizando lucro, determinam* A *e* T *de acordo com as condições da proposição 10.*
Prova. ver apêndice B. □

As proposições acima mostram que o esquema proposto como solução do modelo com informação completa não é implementável sob assimetria de informação. Essa incapacidade de implementar o ITR como solução do problema com informação assimétrica oferece subsídio teórico ao que o governo observou na comparação dos dados declarados com os dados reais, na década de 80. E é também consistente com o fato de que os pequenos produtores, em geral sem terra ociosa, declaram mais corretamente a utilização de suas terras.

Em uma economia como a brasileira, onde os produtores operam com terra ociosa e o governo não observa com precisão os parâmetros das atividades produtivas e não-agrícolas disponíveis aos diversos produtores, a proposição 3.4 mostra que não existem alíquotas capazes de fazer com que o ITR consiga implementar o esquema ótimo de tributação. O uso do ICMS torna-se necessário para que aqueles produtores com melhor acesso a atividades de especulação sejam devidamente taxados.

A figura 3.6 mostra o formato das alíquotas de ICMS e ITR que implementam o esquema ótimo de tributação. O ICMS é zero para os produtores que encontram-se restritos por (RE_η), operando sem terra ociosa. Na medida em que há um aumento na área ociosa, a alíquota do

ICMS cresce enquanto observa-se um declínio no ITR. Ainda que o imposto sobre o produto provoque uma distorção na alocação de recursos, o seu uso justifica-se por sua capacidade de compor um mecanismo implementável (ou revelador) de tributação.

3.6 Discussão

3.6.1 Hipóteses do Modelo / Generalidade do Argumento

Os resultados derivados nas seções anteriores dependem formalmente das hipóteses adotadas, que simplificaram matematicamente o problema e enfatizaram características presentes na economia brasileira. Entretanto, o argumento geral de ineficácia do ITR como instrumento de política tributária pode ser estendido a um contexto mais amplo.

Quanto à função de utilidade do governo, suponha uma função mais geral do tipo $U(t, A, T) = t - \lambda u(A, T)$, onde u é estritamente decrescente em A e estritamente crescente em T. Ou seja, a satisfação do governo aumenta com a produção agrícola e decresce com a existência de grandes propriedades.[5] Nesse caso, o uso de um imposto sobre o produto também é requerido no caso de informação completa. O ITR não poderia implementar o esquema ótimo de tributação nem mesmo em uma situação onde o governo observa os parâmetros de produtividade.

Por outro lado, a função de utilidade do governo adotada nas seções anteriores mostra que a tentativa do uso do ITR como instrumento de política tributária pode ser racionalizada em um determinado ambiente econômico. Em particular, as proposições 3.3 e 3.4 mostram que o ambiente adequado para o uso do ITR é tal que o parâmetro de produtividade é observado pelo governo, direta ou indiretamente. O governo pode observá-los diretamente no caso de informação completa ou pode estimá-los com precisão no caso em que os agentes não mantenham terra ociosa em equilíbrio no caso de informação assimétrica, uma vez que a observação de T é equivalente à de A.

A análise manteve-se restrita ao caso em que $\dot{\theta} < 0$. Caso $\dot{\theta} > 0$, a maior modificação iria ocorrer na natureza do uso do imposto sobre produto, cuja informação poderia ser usada para subsídios em certos casos. Mas, como

[5] Essa forma funcional inclui os casos em que o governo tenta combater terra ociosa explicitamente, seja medida em termos de T/A ou $T - A$.

mencionado anteriormente, o caso definido por $(A1)$ é o mais interessante para a realidade brasileira.

As hipóteses $(A3a)$-$(A3c)$ foram utilizadas para facilitar a caracterização das alocações ótimas no caso de informação assimétrica. Novamente, essas hipóteses não afetam significativamente o argumento. Por exemplo, a condição $(A3a)$ estabelece que o problema imposto pela assimetria de informação é tal que os produtores com maior benefício não-agrícola da terra tentam se passar pelos demais. Em outras palavras, a renda informacional é crescente em η e, portanto, apenas a (RP_{η}) do tipo $\underline{\eta}$ é ativa. Se $(A3a)$ não fosse utilizada, a solução do programa $(P.SB)$ só poderia ser analisada com formas funcionais específicas.

A condição $(A3b)$ determina que, com o aumento do índice η, o aumento dos benefícios agrícolas são suficientes para compensar uma proporção k da perda na produtividade agrícola. Como mencionado anteriormente, a adoção dessa hipótese enfatiza características observadas no caso brasileiro. Ou seja, para valores de A e T fixos, produtores com maiores valores de η tem um lucro total maior. O uso dessa hipótese permite que a a alocação de equilíbrio seja tal que a condição (3.5) estabelecida no apêndice deste capítulo não seja ativa. Caso contrário, a solução teria que considerar o que ficou conhecido na literatura de desenho de mecanismos como "ironing principle". Essa condição, juntamente com a $(A3c)$ sobre a distribuição de probabilidade dos tipos, apenas viabiliza a análise sem que seja necessário o uso de formas funcionais específicas.

Dada a hipótese $(A1)$, $(A3a)$-$(A3c)$ servem como condições suficientes para que o multiplicador da restrição de escassez seja decrescente e o lucro seja crescente em η, o que simplifica bastante a caracterização do equilíbrio. Caso contrário, dependendo da evolução das receitas provenientes das duas atividades com respeito a η, a análise da restrição imposta pelo mercado de arrendamento torna-se mais complicada. Especificamente, as classes de produtores agrícolas com e sem terra ociosa iriam constituir intervalos não-conexos em Θ.

3.6.2
Implementação dos Resultados

O resultado enunciado na proposição 3.4 constitui a principal contribuição do capítulo para o debate sobre a taxação de terras no Brasil. Nessa subseção, são levantadas questões relacionadas à implementação deste resultado.

Na proposição 3.4, o imposto total constitui-se de três parcelas: o imposto sobre produto (ICMS), o imposto sobre a propriedade rural (ITR) e uma parcela fixa. A parcela fixa não afeta as alocações de equilíbrio e existe apenas para a extração de excedente dos produtores. Para a análise da implementação do mecanismo, esse termo pode ser ignorado. De fato, a discussão a seguir não irá restringir-se ao formato específico induzido pelo modelo, concentrando-se no argumento básico e nas maneiras mais viáveis de operacionalização.

Pelo menos duas questões principais surgem na transcrição dos resultados obtidos em prescrições para uma possível reforma tributária. Primeiro, o modelo trata apenas do caso em que a relação entre θ e η é determinista. Como consequência, todos os estabelecimentos rurais podem ser perfeitamente descritos pelo seu tamanho. Em equilíbrio, um estabelecimento com tamanho $\tilde{T}_\eta$ tem, com certeza, uma área cultivada igual a $\tilde{A}_\eta$. Apesar dessa hipótese constituir uma aproximação natural e razoável para o argumento teórico, não parece adequada como uma descrição da realidade brasileira. Para questões operacionais, seria melhor considerar que exista um contínuo de possíveis alocações para cada tamanho de estabelecimento. E diferenças tecnológicas de outra natureza podem também apresentar um efeito semelhante.

A segunda questão diz respeito ao uso do imposto sobre o produto (ICMS) na composição do esquema de taxação ótimo. No Brasil, o ICMS já tem uma estrutura bem definida que pode ser tratada como exógena. Entretanto, como qualquer reforma tributária tem custos políticos (e portanto sociais) muito altos, a discussão a seguir concentra-se em sugestões para a mudança na coleta do ITR, tomando como dada a estrutura do ICMS.

Uma forma natural de implementar o argumento da proposição 3.4 é tornar a alíquota do ITR uma função da área total do imóvel e também do total de ICMS pago por hectare de área total. O grau de utilização, que é uma variável não-observada pelo governo, é substituído por uma variável que é verificável e constitui uma boa proxy para a produtividade agrícola. Essa reformulação implicaria apenas uma mudança nas colunas da tabela 3.1. Entretanto, de acordo com a observação acima, o modo como a alíquota depende do ICMS por hectare e do tamanho do estabelecimento é modificado com relação ao que é sugerido pela proposição 3.4. Nesse novo esquema, as alíquotas seriam progressivas no tamanho da propriedade e regressivas no montante de ICMS pago por hectare.[6]

[6]Seja t_{ij} a alíquota desenhada para um estabelecimento com área na faixa i e ICMS por hectare na faixa j. A proposição 3.4 implica que t_{ij} é constante em j para valores

Essa sugestão de reformulação, além de ser capaz de melhorar a qualidade das declarações do ITR, pode potencialmente melhorar a arrecadação do ICMS. O esquema proposto oferece um custo adicional para a sonegação do ICMS de produtos agrícolas devido ao aumento na alíquota do ITR. Portanto, do ponto de vista de incentivo para a declaração dos dois impostos, o esquema proposto constitui um avanço. Note que a única referência ao ICMS diz respeito ao montante arrecadado. Ou seja, não é necessária nenhuma grande mudança nas instituições já existentes - a informação sobre a arrecadação é suficiente.

Entretanto, a definição os parâmetros específicos de uma nova reformulação envolve uma investigação mais profunda e interdisciplinar para a determinação das alíquotas, exceções, diferenciações regionais, definições apropriadas, etc. Só o fato das alíquotas se tornarem efetivas e serem realmente implementadas já merece uma atenção especial. Por exemplo, uma faixa de alíquotas entre 0.03% e 20% pode não ser a mais adequada ou mesmo comprometer a produção agrícola no novo regime. Além das questões jurídicas, deve-se ter o cuidado de garantir que o instrumento promova um maior dinamismo na agricultura, não sendo apenas uma fonte adicional de recursos para o governo.

baixos de i e vice-versa. E o aumento marginal pode ser não-monotônico em i para valores altos de i e j.

Apêndice B

Prova. [Demonstração da Proposição 8]Inicialmente, note que as restrições (RP) são sempre ativas. Caso não seja ativa para algum η, o governo poderia aumentar sua receita aumentando t_η até que se torne ativa. Portanto, o programa de maximização com o qual o governo se depara para cada par (θ, η) é

$$\max \theta Q(A_\eta) - wA_\eta + (1-\lambda)\eta\phi(T_\eta) - rT_\eta \;\; s.a. \;\; A_\eta \leq T_\eta$$

As condições de 1a. ordem são:

$$\begin{aligned} \theta Q'(A_\eta) &= w + \mu_\eta, \\ (1-\lambda)\eta\phi'(T_\eta) &= r - \mu_\eta, \\ \mu_\eta(A_\eta - T_\eta) &= 0, \;\; \mu_\eta \geq 0. \end{aligned}$$

Diferenciando μ_η, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_\eta &= \dot{\theta}Q' + \theta Q''\dot{A}_\eta \\ &= \frac{(1-\lambda)\left[\eta\dot{\theta}Q'\phi'' - \theta Q''\phi'\right]}{\theta Q'' + (1-\lambda)\eta\phi''}. \end{aligned}$$

Sob $(A1)$, tem-se que $\dot{\mu}_\eta < 0$ e existe no máximo um η^* tal que $\mu_{\eta^*} = 0$. Portanto, pode-se identificar Θ_R e Θ_I. □

Prova. [Demonstração da Proposição 9]Considere $t^*_\eta = \beta^*_\eta T + \gamma^*_\eta$,onde $\beta^*_\eta = \lambda\eta\phi_T\left(T^*_\eta\right)$ e $\gamma^*_\eta = t^*_\eta - \beta^*_\eta T^*_\eta$. As condições de 1a. ordem são:

$$\begin{aligned} \theta Q'(A) &= w + \mu_\eta, \\ \eta\phi'(T) &= r + \beta^*_\eta - \mu_\eta. \end{aligned}$$

Considerando a definição de β^*_η, $\mu_\eta = r$ e então $A = A^*_\eta$ e $T = T^*_\eta$. □

Lema 3.5 *Se a alocação (t_η, A_η, T_η) é implementável e $\mathcal{C}^1$ por partes, então:*

$$\frac{d}{d\eta}\Pi(\eta|\eta) = \dot{\theta}Q(A_\eta) + \phi(T_\eta) \tag{3-4}$$

e

$$\dot{\theta}Q'(A_\eta)\dot{A}_\eta + \phi'(T_\eta)\dot{T}_\eta \geq 0 \;\; q.t.p. \;\; em \;\; \left[\underline{\eta}, \bar{\eta}\right]. \tag{3-5}$$

Prova. [Demonstração do Lema]Seja (t_η, A_η, T_η) uma alocação implementável e $\mathcal{C}^1$ por partes. Então, para todo $\eta \in [\underline{\eta}, \bar{\eta}]$, tem-se que

$$\Pi(\eta|\eta) \geq \Pi(\hat{\eta}|\eta) = \Pi(\hat{\eta}|\hat{\eta}) + \left(\theta - \hat{\theta}\right) Q(A_{\hat{\eta}}) + (\eta - \hat{\eta})\,\phi(T_{\hat{\eta}}),$$

onde $\hat{\theta} \equiv \theta(\hat{\eta})$. Portanto,

$$\Pi(\eta|\eta) - \Pi(\hat{\eta}|\hat{\eta}) \geq \left(\theta - \hat{\theta}\right) Q(A_{\hat{\eta}}) + (\eta - \hat{\eta})\,\phi(T_{\hat{\eta}})$$

e, invertendo η e $\hat{\eta}$, obtém-se

$$\begin{aligned} &\left(\theta - \hat{\theta}\right) Q(A_{\eta}) + (\eta - \hat{\eta})\,\phi(T_{\eta}) \geq \\ &\geq \Pi(\eta|\eta) - \Pi(\hat{\eta}|\hat{\eta}) \geq \left(\theta - \hat{\theta}\right) Q(A_{\hat{\eta}}) + (\eta - \hat{\eta})\,\phi(T_{\hat{\eta}}). \end{aligned}$$

Dividindo a desigualdade acima por $(\eta - \hat{\eta})$ e tomando $\hat{\eta} \to \eta$, tem-se que Π é $\mathcal{C}^1$ por partes e

$$\frac{d}{d\eta}\Pi(\eta|\eta) = \dot{\theta} Q(A_{\eta}) + \phi(T_{\eta}) \;\; q.t.p..$$

Fazendo o mesmo para $(\eta - \hat{\eta})^2$,

$$\dot{\theta} Q'(A_{\eta})\,\dot{A}_{\eta} + \phi'(T_{\eta})\,\dot{T}_{\eta} \geq 0 \;\; q.t.p..$$

$\square$

Prova. [Demonstração da Proposição 10]A demonstração da proposição utiliza o lema 12, demonstrado acima. Sob $(A3b)$, a condição (3-4) estabelece que $\Pi(\eta|\eta)$ seja crescente em η e somente a (RP_{η}) do tipo $\underline{\eta}$ é ativa. Integrando (3-4) por partes e substituindo na função objetivo de $(P.SB)$, obtém-se um novo programa de maximização:

$$\max_{\{t_{\eta}, A_{\eta}, T_{\eta}\}_{\eta \in \Theta}} \int_{\Theta} t_{\eta} - \lambda \eta \phi(T_{\eta})\, dF(\eta) \tag{3-6}$$

sujeito a que, para todo $\eta \in \Theta$,

$$\dot{\theta} Q'(A_{\eta})\,\dot{A}_{\eta} + \phi'(T_{\eta})\,\dot{T}_{\eta} \geq 0 \tag{3-7}$$

$$A_{\eta} \leq T_{\eta}. \tag{3-8}$$

As condições de 1a. ordem do programa, ignorando (3-7), são dadas por:

$$\theta Q'\left(A_\eta\right) = w + \frac{1-F\left(\eta\right)}{f\left(\eta\right)}\dot{\theta}Q'\left(A_\eta\right) + \frac{\mu_\eta}{f\left(\eta\right)},$$
$$\left(1-\lambda\right)\eta\phi'\left(T_\eta\right) = r + \frac{1-F\left(\eta\right)}{f\left(\eta\right)}\phi'\left(T_\eta\right) - \frac{\mu_\eta}{f\left(\eta\right)},$$
$$\mu_\eta\left(A_\eta - T_\eta\right) = 0, \quad A_\eta \leq T_\eta.$$

Defina $\tilde{\Theta}_R = \{\eta : \mu_\eta > 0\}$ e $\tilde{\Theta}_I = \tilde{\Theta} - \tilde{\Theta}_R$. Então, para cada $\eta \in \tilde{\Theta}_R$, $\tilde{A}_\eta = \tilde{T}_\eta$ e as condições de 1a. ordem são dadas por

$$\theta Q'\left(\tilde{A}_\eta\right) + \left(1-\lambda\right)\eta\phi'\left(\tilde{T}_\eta\right) = w + r + \frac{1-F\left(\eta\right)}{f\left(\eta\right)}\left[\dot{\theta}Q'\left(\tilde{A}_\eta\right) + \phi'\left(\tilde{T}_\eta\right)\right],$$
$$\frac{\mu_\eta}{f\left(\eta\right)} = \theta Q'\left(\tilde{A}_\eta\right) - w - \frac{1-F\left(\eta\right)}{f\left(\eta\right)}\dot{\theta}Q'\left(\tilde{A}_\eta\right).$$

Diferenciando a primeira condição com respeito a η, obtém-se:

$$\dot{A}_\eta = \dot{T}_\eta = \frac{\left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F}{f}\right) - 1\right]\dot{\theta}Q' + \left[\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F}{f}\right) - \left(1-\lambda\right)\right]\phi'}{\left(\theta - \frac{1-F}{f}\dot{\theta}\right)Q'' + \left(\left(1-\lambda\right)\eta - \frac{1-F}{f}\right)\phi''} > 0$$

sob $(A1)$-$(A3c)$ e usando o fato que a condição de segunda ordem garante que o denominador seja negativo. O valor de k referido em $(A3b)$ é dado por

$$k = \max_\eta \frac{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F}{f}\right) - 1}{\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F}{f}\right) - \left(1-\lambda\right)}.$$

Note que $\lambda = 0$ implica em $k = 1$.

Diferenciando μ_η, tem-se que as hipóteses determinam

$$\dot{\overbrace{\left(\frac{\mu_\eta}{f\left(\eta\right)}\right)}} = \left(\theta - \frac{1-F}{f}\dot{\theta}\right)Q''\dot{A} + \left(1 - \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F}{f}\right)\right)\dot{\theta}Q' < 0,$$

o que demonstra que existem, no máximo, duas categorias de produtores e que $\tilde{\Theta}_I$ e $\tilde{\Theta}_R$ são conjuntos conexos.

Para $\eta \in \tilde{\Theta}_I$, as condições de primeira ordem são:

$$\theta Q'\left(\tilde{A}_\eta\right) = w + \frac{1-F\left(\eta\right)}{f\left(\eta\right)}\dot{\theta}Q'\left(\tilde{A}_\eta\right),$$
$$\left(1-\lambda\right)\eta\phi'\left(\tilde{T}_\eta\right) = r + \frac{1-F\left(\eta\right)}{f\left(\eta\right)}\phi'\left(\tilde{T}_\eta\right).$$

Diferenciando, obtém-se

$$\dot{A}_\eta = \frac{\left[1 - \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F}{f}\right)\right]\dot{\theta}Q'}{\left(\theta - \frac{1-F}{f}\dot{\theta}\right)Q''} < 0, \tag{3-9}$$

$$\dot{T}_\eta = \frac{\left[(1-\lambda) - \frac{d}{d\eta}\left(\frac{1-F}{f}\right)\right]\phi'}{\left((1-\lambda)\eta - \frac{1-F}{f}\right)\phi''} > 0.$$

Para mostrar que $\left(\tilde{t}_\eta, \tilde{A}_\eta, \tilde{T}_\eta\right)$ é implementável e que (3-7) é atendida, observe inicialmente que

$$\begin{aligned}\Pi(\eta|\eta) - \Pi(\hat{\eta}|\eta) &= \int_{\hat{\eta}}^{\eta}\left[\dot{\theta}Q\left(\tilde{A}_{\tilde{\eta}}\right) + \phi\left(\tilde{T}_{\tilde{\eta}}\right)\right]d\tilde{\eta} + \left(\hat{\theta} - \theta\right)Q\left(\tilde{A}_{\hat{\eta}}\right) + (\hat{\eta} - \eta)\,\phi\left(\tilde{T}_{\hat{\eta}}\right)\\ &= \int_{\hat{\eta}}^{\eta}\left[\dot{\theta}\left(Q\left(\tilde{A}_{\tilde{\eta}}\right) - Q\left(\tilde{A}_{\hat{\eta}}\right)\right) + \left(\phi\left(\tilde{T}_{\tilde{\eta}}\right) - \phi\left(\tilde{T}_{\hat{\eta}}\right)\right)\right]d\tilde{\eta}\\ &= \int_{\hat{\eta}}^{\eta}\left[\int_{\tilde{A}_{\hat{\eta}}}^{\tilde{A}_{\tilde{\eta}}}\dot{\theta}Q'(A)\,dA + \int_{\tilde{T}_{\hat{\eta}}}^{\tilde{T}_{\tilde{\eta}}}\phi'(T)\,dT\right]d\tilde{\eta},\end{aligned}$$

sendo que a última igualdade decorre de $(A1)$. Considerando $\hat{\eta} < \eta$, existem três possibilidades:

– $\eta, \hat{\eta} \in \tilde{\Theta}_R$– nesse intervalo, $\tilde{A}_\eta = \tilde{T}_\eta$ e então

$$\Pi(\eta|\eta) - \Pi(\hat{\eta}|\eta) = \int_{\hat{\eta}}^{\eta}\int_{\tilde{A}_{\hat{\eta}}}^{\tilde{A}_{\tilde{\eta}}}\left[\dot{\theta}Q'(A) + \phi'(A)\right]dA\,d\tilde{\eta}$$

que é positivo por $(A3b)$.

– $\eta, \hat{\eta} \in \tilde{\Theta}_I$– como $\hat{\eta} < \eta$, por (3-9), tem-se que $Q\left(\tilde{A}_{\tilde{\eta}}\right) < Q\left(\tilde{A}_{\hat{\eta}}\right)$ e $\phi\left(\tilde{T}_{\tilde{\eta}}\right) > \phi\left(\tilde{T}_{\hat{\eta}}\right)$ e então $\Pi(\eta|\eta) > \Pi(\hat{\eta}|\eta)$, para todo $\tilde{\eta} \in [\hat{\eta}, \eta]$.

– $\hat{\eta} \in \Theta_R,\ \eta \in \Theta_I$– nesse caso, temos que:

$$\begin{aligned}\Pi(\eta|\eta) - \Pi(\hat{\eta}|\eta) &= \int_{\hat{\eta}}^{\eta}\left[\int_{\tilde{A}_{\hat{\eta}}}^{\tilde{A}_{\tilde{\eta}}}\dot{\theta}Q'(A)\,dA + \int_{\tilde{T}_{\hat{\eta}}}^{\tilde{T}_{\tilde{\eta}}}\phi'(T)\,dT\right]d\tilde{\eta}\\ &= \int_{\hat{\eta}}^{\eta^*}\int_{\tilde{A}_{\hat{\eta}}}^{\tilde{A}_{\tilde{\eta}}}\left[\dot{\theta}Q'(A) + \phi'(A)\,dA\right]d\tilde{\eta} +\\ &+ \int_{\eta^*}^{\eta}\left[\dot{\theta}\left(Q\left(\tilde{A}_{\tilde{\eta}}\right) - Q\left(\tilde{A}_{\eta^*}\right)\right) + \left(\phi\left(\tilde{T}_{\tilde{\eta}}\right) - \phi\left(\tilde{T}_{\eta^*}\right)\right)\right]d\tilde{\eta} \geq 0,\end{aligned}$$

pois, pelos argumentos anteriores, as duas integrais são não-negativas.

O caso $\hat{\eta} > \eta$ é análogo. $\square$

Prova. [Demonstração da Proposição 11]Defina $q = \theta Q(A)$. Observe inicialmente que mecanismos em (q, T, t) ou (A, T, t) são equivalentes. Como $Q' > 0$, a inversa $A = Q^{-1}\left(\frac{q}{\theta}\right)$ está bem definida e, ao desenhar o mecanismo (q, T, t), o problema relaxado do governo é dado por

$$\max_{\{t_\eta, q_\eta, T_\eta\}_{\eta\in[\underline{\eta},\bar{\eta}]}} \int_{\underline{\eta}}^{\bar{\eta}} \left[q_\eta - wQ^{-1}\left(\frac{q_\eta}{\theta}\right) + (1-\lambda)\,\eta\phi(T_\eta) - rT_\eta \right.$$
$$\left. - \frac{1-F(\eta)}{f(\eta)}\left(\frac{\dot{\theta}}{\theta}q_\eta + \phi(T_\eta)\right) - \Pi(\bar{\eta}|\bar{\eta})\right] dF(\eta)$$

sujeito a

$$Q^{-1}\left(\frac{q_\eta}{\theta}\right) \leq T_\eta, \eta \in [\underline{\eta}, \bar{\eta}].$$

A condição de 1a. ordem para q é

$$1 - w\frac{1}{Q'(A_\eta)}\frac{1}{\theta} - \frac{1-F(\eta)}{f(\eta)}\frac{\dot{\theta}}{\theta} - \frac{\mu_\eta}{f(\eta)}\frac{1}{Q'(A_\eta)}\frac{1}{\theta} = 0$$

que pode ser arranjada para

$$\theta Q'(A_\eta) = w + \frac{1-F(\eta)}{f(\eta)}\dot{\theta}Q'(A_\eta) + \frac{\mu_\eta}{f(\eta)}.$$

Como a condição para T se mantém inalterada, fica demonstrado que basta considerar a implementação em (A, T, t), que é algebricamente mais simples. De fato, considerar q ou A é questão de conveniência, uma vez que existe uma inversa bem definida para Q.

Considere então um mecanismo em que, para cada par (A, T) apresentado pelo produtor, o imposto seja calculado por

$$t(A, T) = \alpha_A \theta Q(A) + \beta_T T + \gamma_{(A,T)},$$

onde $\alpha_A \equiv \alpha(A)$, $\beta_T \equiv \beta(T)$ e $\gamma_{(A,T)} \equiv \gamma(A, T)$ definem o esquema de taxação a ser determinado pelo governo. Neste esquema, α_A faz com que $A = \tilde{A}_\eta$ (ou $q = \theta Q\left(\tilde{A}_\eta\right)$, equivalentemente), β_T é tal que $T = \tilde{T}_\eta$ e $\gamma_{(A,T)}$ é determinado residualmente por

$$\gamma_{(A,T)} = \begin{cases} \left(\theta\left(\hat{\eta}_{(T)}\right) - \alpha_{A_{\hat{\eta}_{(T)}}}\theta\right) Q\left(\tilde{A}_{\hat{\eta}_{(T)}}\right) + \hat{\eta}_{(T)}\phi(T) - w\tilde{A}_{\hat{\eta}_{(T)}} & \text{se } T = \tilde{T}_{\hat{\eta}} \text{ e} \\ - (r + \beta_T)\,T + \int_{\hat{\eta}_{(T)}}^{\bar{\eta}} \left[\dot{\theta}Q\left(\tilde{A}_{\tilde{\eta}}\right) + \phi\left(\tilde{T}_{\tilde{\eta}}\right)\right] d\tilde{\eta} - \Pi(\bar{\eta}), & A = \tilde{A}_{\hat{\eta}} \text{ para} \\ & \text{algum } \hat{\eta} \in [\underline{\eta}, \bar{\eta}]; \\ \infty & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

onde $\hat{\eta}(T)$ é a inversa de $\tilde{T}_{\hat{\eta}}$.[7]

Diante deste esquema, o produtor escolhe (A, T) de modo a maximizar os seus lucros segundo o programa

$$\max_{A,T} \; (1-\alpha_A)\,\theta Q(A) + \eta\phi(T) - wA - (r+\beta_T)\,T - \gamma_{(A,T)}$$

sujeito a

$$A \leq T.$$

Denotando por μ o multiplicador da restrição, as condições de 1a. ordem são dadas por

$$\begin{aligned}(1-\alpha_A)\,\theta Q'(A) &= w + \left(\frac{\partial}{\partial A}\alpha_A\right)\theta Q(A) + \frac{\partial}{\partial A}\gamma_{(A,T)} + \mu \\ \eta\phi'(T) &= r + \beta_T + \left(\frac{\partial}{\partial T}\beta_T\right)T + \frac{\partial}{\partial T}\gamma_{(A,T)} - \mu.\end{aligned}$$

Suponha inicialmente que $\frac{\partial}{\partial A}\gamma_{(A_\eta,T_\eta)} = \frac{\partial}{\partial T}\gamma_{(A_\eta,T_\eta)} = 0$ na curva $\hat{\eta} \to \left(\tilde{A}_{\hat{\eta}}, \tilde{T}_{\hat{\eta}}\right)$.

1. Caso $\mu > 0$: Neste caso, $A = T$ e as condições de 1a. ordem tornam-se

$$\begin{aligned}(1-\alpha_A)\,\theta Q'(A) + \eta\phi'(T) = w &+ \left(\frac{\partial}{\partial A}\alpha_A\right)\theta Q(A) + r \\ &+ \beta_T + \left(\frac{\partial}{\partial T}\beta_T\right)T + \frac{\partial}{\partial A}\gamma_{(A,T)} + \frac{\partial}{\partial T}\gamma_{(A,T)}\end{aligned}$$

e $A = T = \tilde{A}_\eta = \tilde{T}_\eta$ se

$$\begin{gathered}\alpha_A = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial T}\beta_T\right)\tilde{T}_\eta + \beta_T = \frac{1-F(\eta)}{f(\eta)}\left[\dot{\theta}Q'\left(\tilde{A}_\eta\right) + \phi'\left(\tilde{T}_\eta\right)\right].\end{gathered}$$

Ou seja, considerando $\beta_{T_{\underline{\eta}}} = \underline{\beta}$,

$$\beta_T = \underline{\beta}\frac{\tilde{T}_{\underline{\eta}}}{T} + \frac{1}{T}\int_{T_{\underline{\eta}}}^{T}\left[\lambda\eta\phi'\left(\breve{T}\right) + \frac{1-F\left(\eta\left(\breve{T}\right)\right)}{f\left(\eta\left(\breve{T}\right)\right)}\left(\dot{\theta}Q'\left(\breve{T}\right) + \phi'\left(\breve{T}\right)\right)\right]d\breve{T}.$$

[7] Essa inversa está bem definida pois, sob (A1)-(A3), $\tilde{T}$ é monotono em $\hat{\eta}$.

2. Caso $\mu = 0$: para que $A = \tilde{A}_\eta$ e $T = \tilde{T}_\eta$ basta que

$$\alpha_A Q'\left(\tilde{A}_\eta\right) + \left(\frac{\partial}{\partial A}\alpha_A\right) Q\left(\tilde{A}_\eta\right) = \frac{1 - F(\eta)}{f(\eta)} \frac{\dot{\theta}}{\theta} Q'\left(\tilde{A}_\eta\right)$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial T}\beta_T\right) \tilde{T}_\eta + \beta_T = \lambda \eta \phi'\left(\tilde{T}_\eta\right) + \frac{1 - F(\eta)}{f(\eta)} \phi'\left(\tilde{T}_\eta\right).$$

Ou seja, considerando $\alpha_{\tilde{A}_{\eta^*}} = 0$ e $\beta_{\tilde{T}_{\eta^*}}$ dados pelo caso $\mu > 0$, tem-se que

$$\alpha_A = \frac{-1}{Q(A)} \int_A^{\tilde{A}_{\eta^*}} \left[\frac{1 - F\left(\eta\left(\breve{T}\right)\right)}{f\left(\eta\left(\breve{T}\right)\right)} \frac{\dot{\theta}}{\theta} Q'\left(\breve{A}\right) \right] d\breve{A}$$
$$\beta_T = \beta_{\tilde{T}_{\eta^*}} \frac{\tilde{T}_{\eta^*}}{T} + \frac{1}{T} \int_{\tilde{T}_{\eta^*}}^{T} \left[\lambda \eta \phi'\left(\breve{T}\right) + \frac{1 - F\left(\eta\left(\breve{T}\right)\right)}{f\left(\eta\left(\breve{T}\right)\right)} \phi'\left(\breve{T}\right) \right] d\breve{T}$$

onde η pode ser expresso em termos de T ou de A.

Resta mostrar que, em ambos os casos, $\frac{\partial}{\partial A}\gamma_{\left(\tilde{A}_\eta, \tilde{T}_\eta\right)} = \frac{\partial}{\partial T}\gamma_{\left(\tilde{A}_\eta, \tilde{T}_\eta\right)} = 0$. Isto é consequência de um argumento de envelope. Como há uma bijeção entre η e A e entre η e T em cada caso, basta mostrar que $\frac{d}{d\eta}\gamma_{\left(\tilde{A}_\eta, \tilde{T}_\eta\right)} = 0$.

$$\frac{d}{d\eta}\gamma_{\left(\tilde{A}_\eta, \tilde{T}_\eta\right)} = \left[\theta Q' - w - \theta \frac{\partial}{\partial A}(\alpha_A Q)\right] \dot{A} + \left[\eta \phi' - r - \frac{\partial}{\partial T}\beta_T T\right] \dot{T}$$

em $A = \tilde{A}_\eta$ e $T = \tilde{T}_\eta$ tem-se que os dois termos em colchetes se anulam. □