5
Exemplos de Síntese de Programas

Apresentamos neste capítulo exemplos de síntese construtiva de programas. A primeira seção apresenta a descrição da apresentação dos exemplos. A seção seguinte possui dois exemplos referentes ao processo demonstrado no capítulo 2, e a terceira seção, que contém a abordagem do processo apresentado no capítulo 3, possui além da extração do conteúdo computacional dos mesmos exemplos apresentado na seção anterior, um exemplo que só é possível como novo processo de síntese.

5.1
Descrição da apresentação dos exemplos

Devido ao tamanho da árvore de prova, as provas (bem como seus ramos) serão apresentados em blocos, de forma a facilitar o entendimento do leitor. O bloco da prova principal, isto é, a que contém a raiz da árvore de prova (teorema a ser provado), terá uma moldura sólida; os que apresentam moldura tracejada representam os ramos que estão conectados a outros através da numeração localizada ao lado esquerdo da parte superior da moldura.

Exemplo: Supondo a seguinte árvore de prova

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\alpha(a)} \quad \dfrac{\vdots}{\beta(a)}}{\alpha(a) \wedge \beta(a)}\, I\wedge}{\forall x(\alpha(x) \wedge \beta(x))}\, I\forall$$

Ela poderia ser apresentada da seguinte forma:

$$\boxed{\dfrac{\vdots}{\alpha(a)} \qquad \dfrac{\vdots}{\beta(a)}}$$

$$\boxed{\dfrac{\dfrac{(\mathrm{I})}{\alpha(a) \wedge \beta(a)}\, I\wedge}{\forall x(\alpha(x) \wedge \beta(x))}\, I\forall}$$

Utilizaremos o símbolo σ para expressarmos que a fórmula possui apenas conteúdo lógico e o símbolo $p_1 : \alpha$ para expressarmos que a fórmula está associado a um programa identificado por p_1.

5.2 Processo de Síntese de Programas 1

Os exemplos são constituídos da prova da viabilidade do problema, da marcação das entradas e das saídas e da extração do conteúdo computacional da prova.

5.2.1 Soma de dois números naturais

Neste exemplo, utilizando os seguintes predicados e funcionais

$a(x, y)$ - funcional que expressa a operação de soma;

$s(x)$ - funcional que expressa a operação de sucessor;

$p(x)$ - funcional que expressa a operação de predecessor;

$I(x, y)$ - predicado de igualdade;

$M(x, y)$- predicado que verifica se um elemento (x) é menor que o outro (y).

Será gerado um programa a partir da prova do seguinte teorema:

$$\forall w \forall x \exists y(I(a(x, y), z))$$

Com a utilização dos seguintes axiomas:

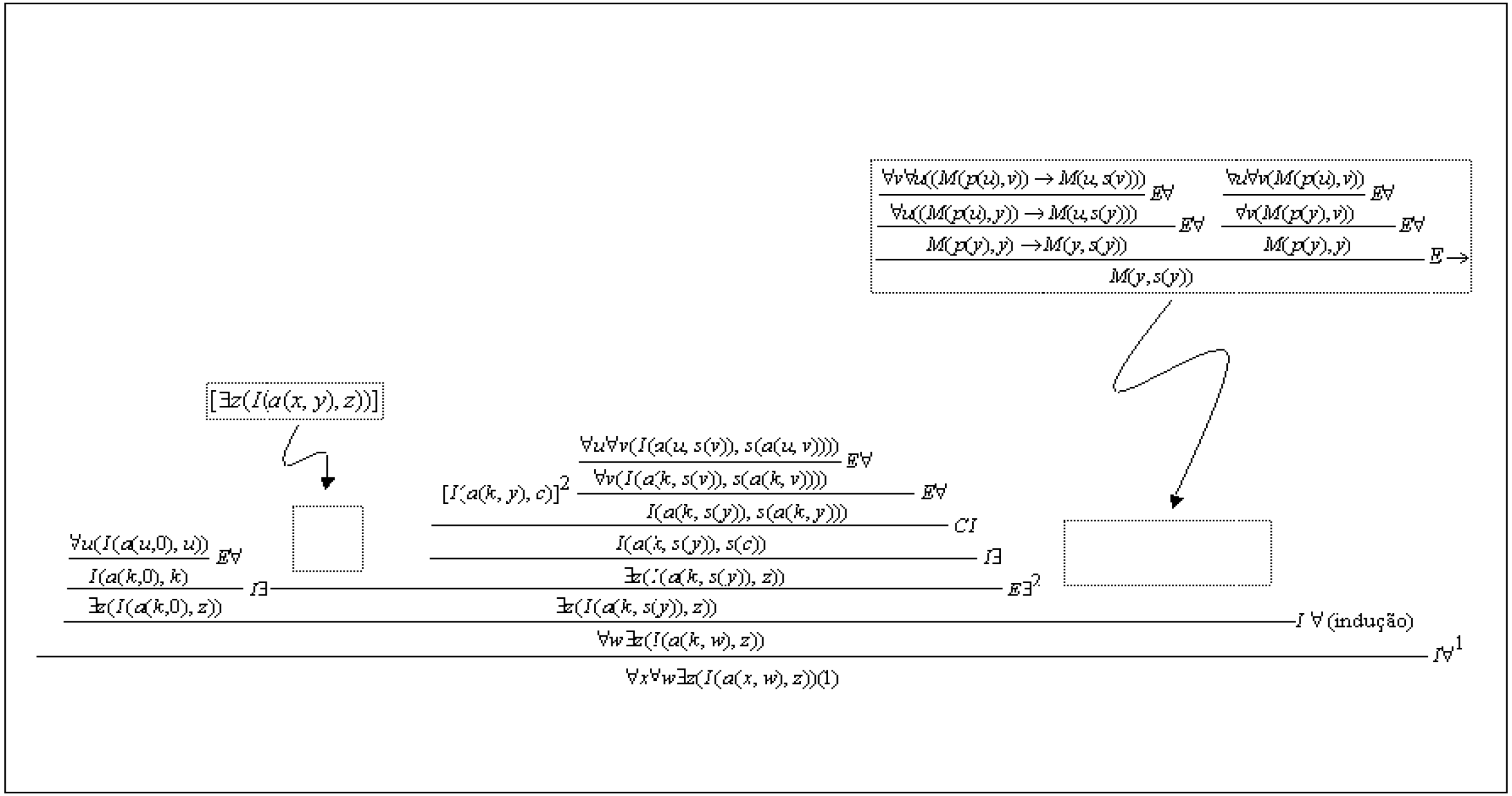
$1 - \forall u(I(a(u, 0), u));$

$2 - \forall u \forall v(I(a(u, s(v)), s(a(u, v))));$

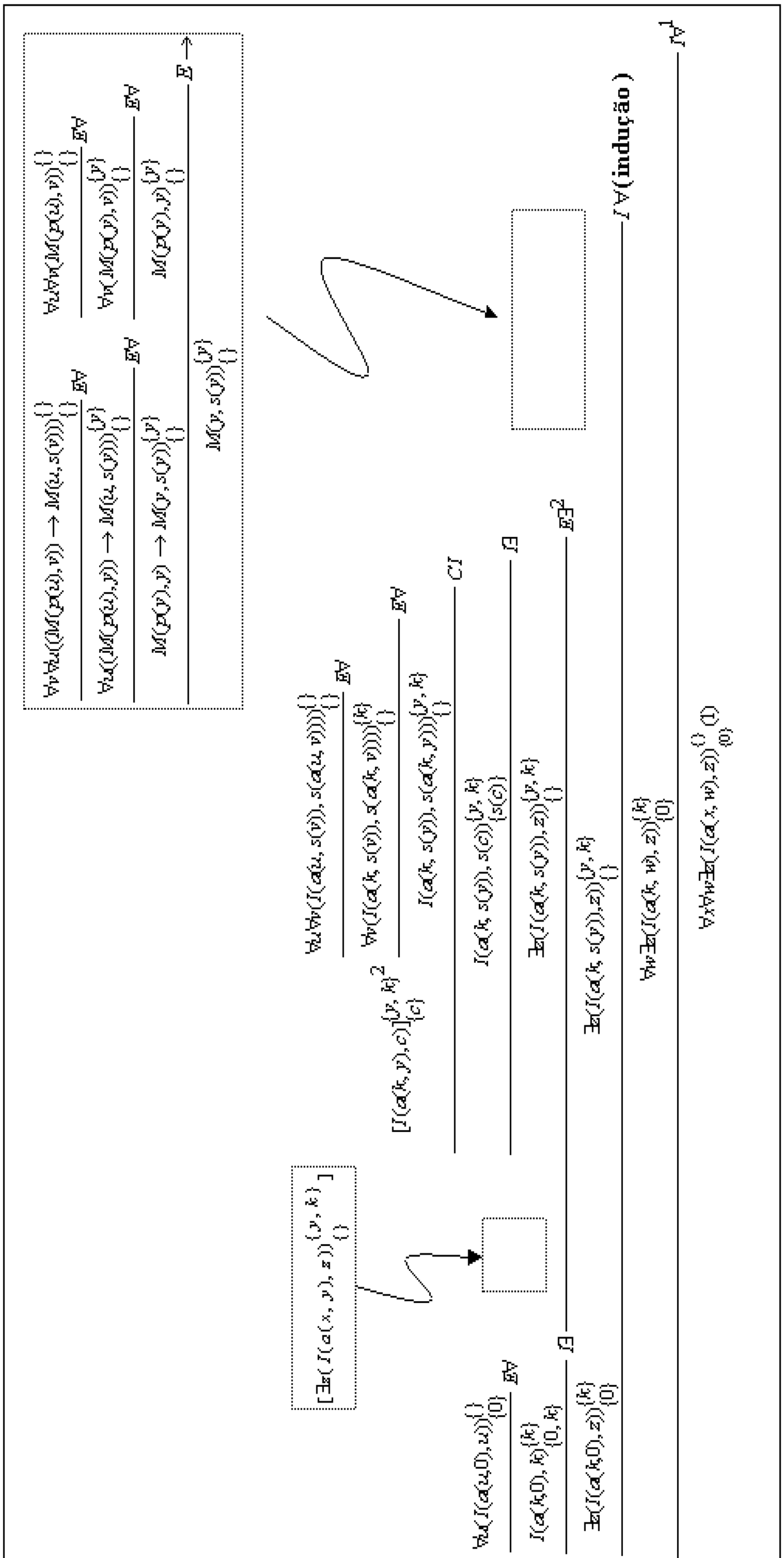
$3 - \forall u \forall v(M(p(u), v) \rightarrow M(u, s(v)));$

$4 - \forall u \forall v(M(p(u), v));$

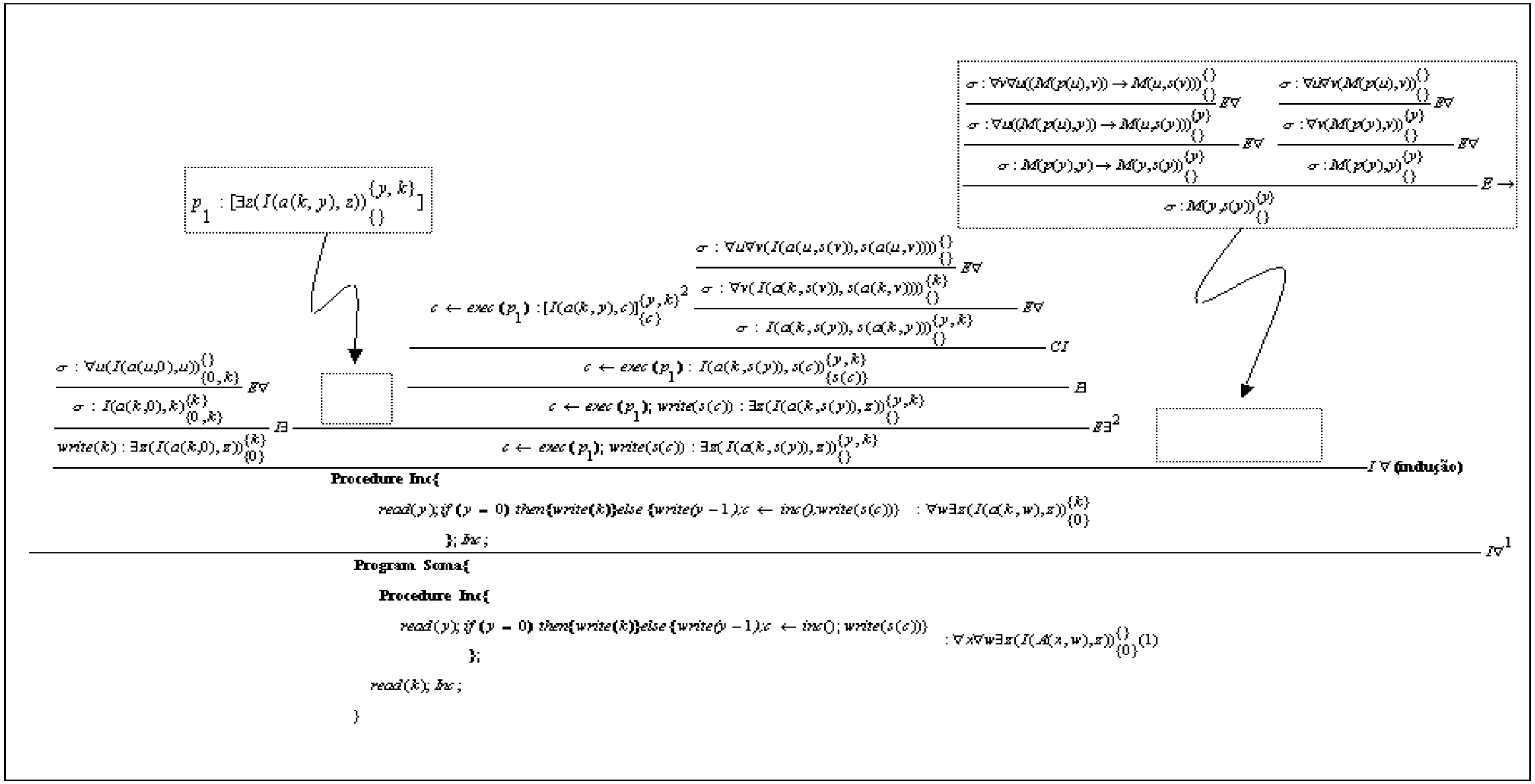
Soma de dois números naturais (Prova)



Soma de dois números naturais (Marcação das entradas e saídas)



Soma de dois números naturais (Extração do conteúdo computacional)



5.2.2 Cálculo do resto de uma divisão

Com objetivo de facilitar o entendimento da prova não foram utilizados, neste exemplo, os funcionais para as operações de adição, subtração e multiplicação, nem os predicados de igualdade e das relações de menor e de maior.

Foi utilizado, apenas, o funcional que expressa a operação de sucessor s(x).

O programa será gerado a partir da prova do seguinte teorema:

$$\forall v \forall u \exists r \exists k((k * v + r = u) \wedge (r < v))$$

Com a utilização dos seguintes axiomas:

$1 - \forall x(x * 1 = x);$

$2 - \forall x(x + 0 = x);$

$3 - \forall q(0 * q = 0);$

$4 - \forall z(0 < z);$

$5 - \forall z \forall p((z = p) \rightarrow (z - p = 0));$

$6 - \forall z \forall p((p > 0) \rightarrow (z - p < z));$

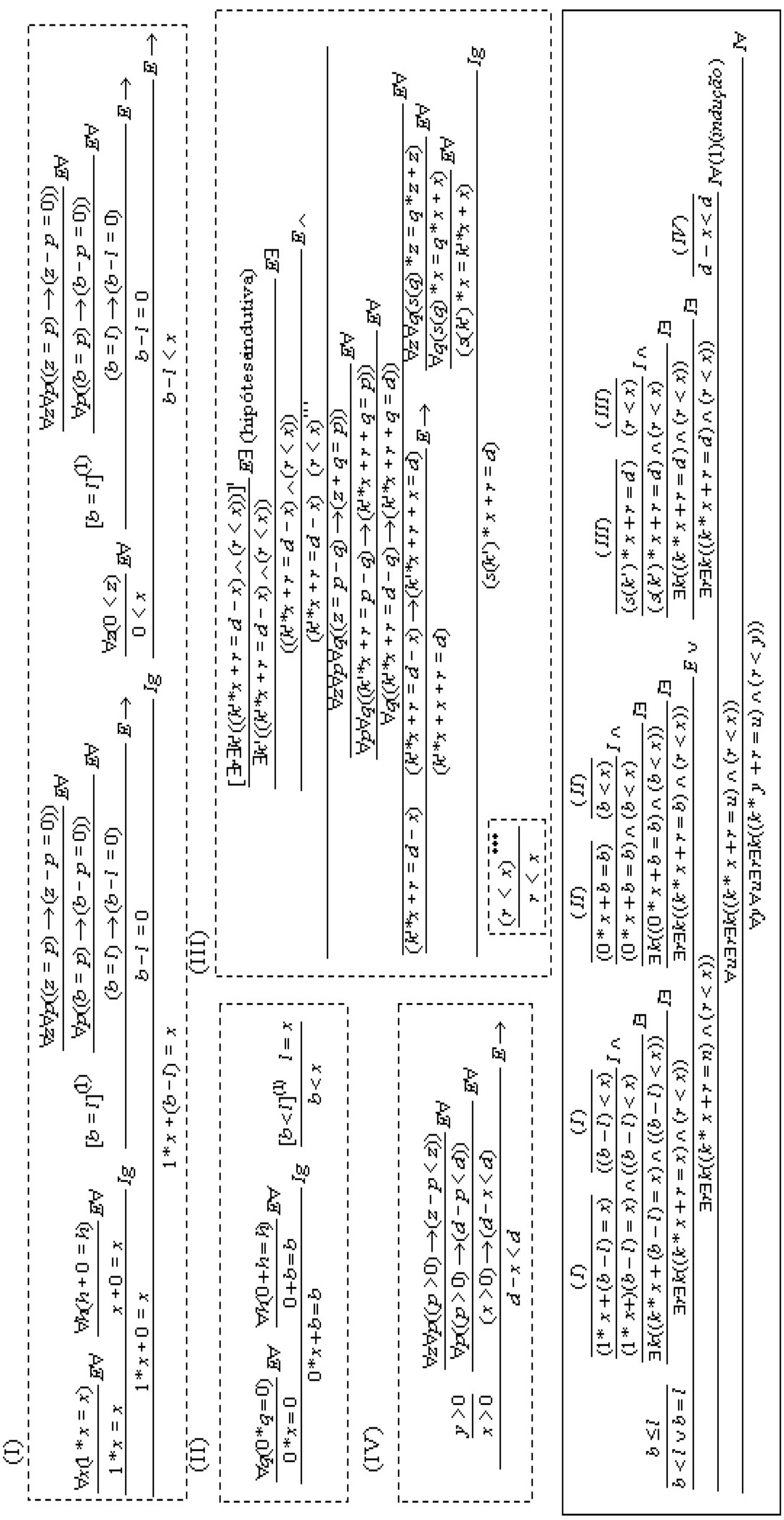
$7 - \forall z \forall q((z * s(q)) \rightarrow (z * q + z));$

$8 - \forall z \forall p \forall q((z = p - q) \rightarrow (z + q = p));$

e das seguintes hipóteses:

$y > 0, l = y.$

Cálculo do Resto da Divisão (Prova)



Cálculo do Resto da Divisão (Marcação das entradas e saídas)

(I)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(1*x=x)^{\{\}}_{\{1\}}}{1*x=x^{\{x\}}_{\{1\}}}E\forall \quad \dfrac{\forall h(h+0=h)^{\{\}}_{\{0\}}}{x+0=x^{\{x\}}_{\{0\}}}E\forall}{1*x+0=x^{\{x\}}_{\{0,1\}}}Ig \qquad \dfrac{[b=l]^{\{b,l\}(1)}_{\{\}} \quad \dfrac{\dfrac{\forall z\forall p((z=p)\rightarrow(z-p=0))^{\{\}}_{\{0\}}}{\forall p((b=p)\rightarrow(b-p=0))^{\{b\}}_{\{0\}}}E\forall}{(b=l)\rightarrow(b-l=0)^{\{b,l\}}_{\{0\}}}E\forall}{b-l=0^{\{b,l\}}_{\{0\}}}E\rightarrow}{1*x+(b-l)=x^{\{x,b,l\}}_{\{(b-l),1\}}}Ig$$

(I)Continuação

$$\dfrac{\dfrac{\forall z(0<z)^{\{\}}_{\{0,1\}}}{0<x^{\{x\}}_{\{0,1\}}}E\forall \qquad \dfrac{[b=l]^{\{b,l\}(1)}_{\{\}} \quad \dfrac{\dfrac{\forall z\forall p((z=p)\rightarrow(z-p=0))^{\{\}}_{\{0\}}}{\forall p((b=p)\rightarrow(b-p=0))^{\{b\}}_{\{0\}}}E\forall}{(b=l)\rightarrow(b-l=0)^{\{b,l\}}_{\{0\}}}E\forall}{b-l=0^{\{b,l\}}_{\{0\}}}E\rightarrow}{b-l<x^{\{x,b,l\}}_{\{(b-l),1\}}}E\rightarrow$$

(II)

$$\dfrac{\dfrac{\forall q(0*q=0)^{\{\}}_{\{0\}}}{0*x=0^{\{x\}}_{\{0\}}}E\forall \quad \dfrac{\forall h(0+h=h)^{\{\}}_{\{0\}}}{0+b=b^{\{b\}}_{\{0\}}}E\forall}{0*x+b=b^{\{x,b\}}_{\{b,0\}}}Ig \qquad \dfrac{[b<l]^{\{b,l\}(1)}_{\{\}} \quad l=x^{\{x,b\}}_{\{l,0\}}}{b<x^{\{x,b\}}_{\{b,0\}}}$$

Cálculo do Resto da Divisão (Marcação das entradas e saídas - continuação)

(III)

$$\dfrac{[\exists r \exists k'((k'*x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{\}}]^{(1)} \quad \text{(hipótese indutiva)}}{\exists k'((k'*x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\, E\exists$$

$$\dfrac{\exists k'((k'*x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}{((k'*x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\, E\exists$$

$$\dfrac{((k'*x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}{(k'*x + r = d - x)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}} \quad (r < x)^{\{x,d\}\,***}_{\{r,k'\}}}\, E\wedge$$

$$\dfrac{\forall z \forall p \forall q((z = p - q) \rightarrow (z + q = p))^{\{\}}_{\{\}}}{\forall p \forall q((k'*x + r = p - q) \rightarrow (k'*x + r + q = p))^{\{x\}}_{\{\}}}\, E\forall$$

$$\dfrac{\forall p \forall q((k'*x + r = p - q) \rightarrow (k'*x + r + q = p))^{\{x\}}_{\{\}}}{\forall q((k'*x + r = d - q) \rightarrow (k'*x + r + q = d))^{\{x,d\}}_{\{\}}}\, E\forall$$

$$\dfrac{\forall q((k'*x + r = d - q) \rightarrow (k'*x + r + q = d))^{\{x,d\}}_{\{\}}}{(k'*x + r = d - x) \rightarrow (k'*x + r + x = d)^{\{x,d\}}_{\{\}}}\, E\forall$$

$$\dfrac{(k'*x + r = d - x)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}} \quad (k'*x + r = d - x) \rightarrow (k'*x + r + x = d)^{\{x,d\}}_{\{\}}}{(k'*x + x + r = d)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\, E\rightarrow$$

$$\dfrac{\forall z \forall q(s(q) * z = q * z + z)^{\{\}}_{\{\}}}{\forall q(s(q) * x = q * x + x)^{\{x\}}_{\{\}}}\, E\forall$$

$$\dfrac{\forall q(s(q) * x = q * x + x)^{\{x\}}_{\{\}}}{(s(k') * x = k'*x + x)^{\{x\}}_{\{k'\}}}\, E\forall$$

$$\dfrac{(k'*x + x + r = d)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}} \quad (s(k') * x = k'*x + x)^{\{x\}}_{\{k'\}}}{(s(k') * x + r = d)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\, Ig$$

$$\dfrac{(r < x)^{\{x,d\}\,***}_{\{r,k'\}}}{r < x^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}$$

(IV)

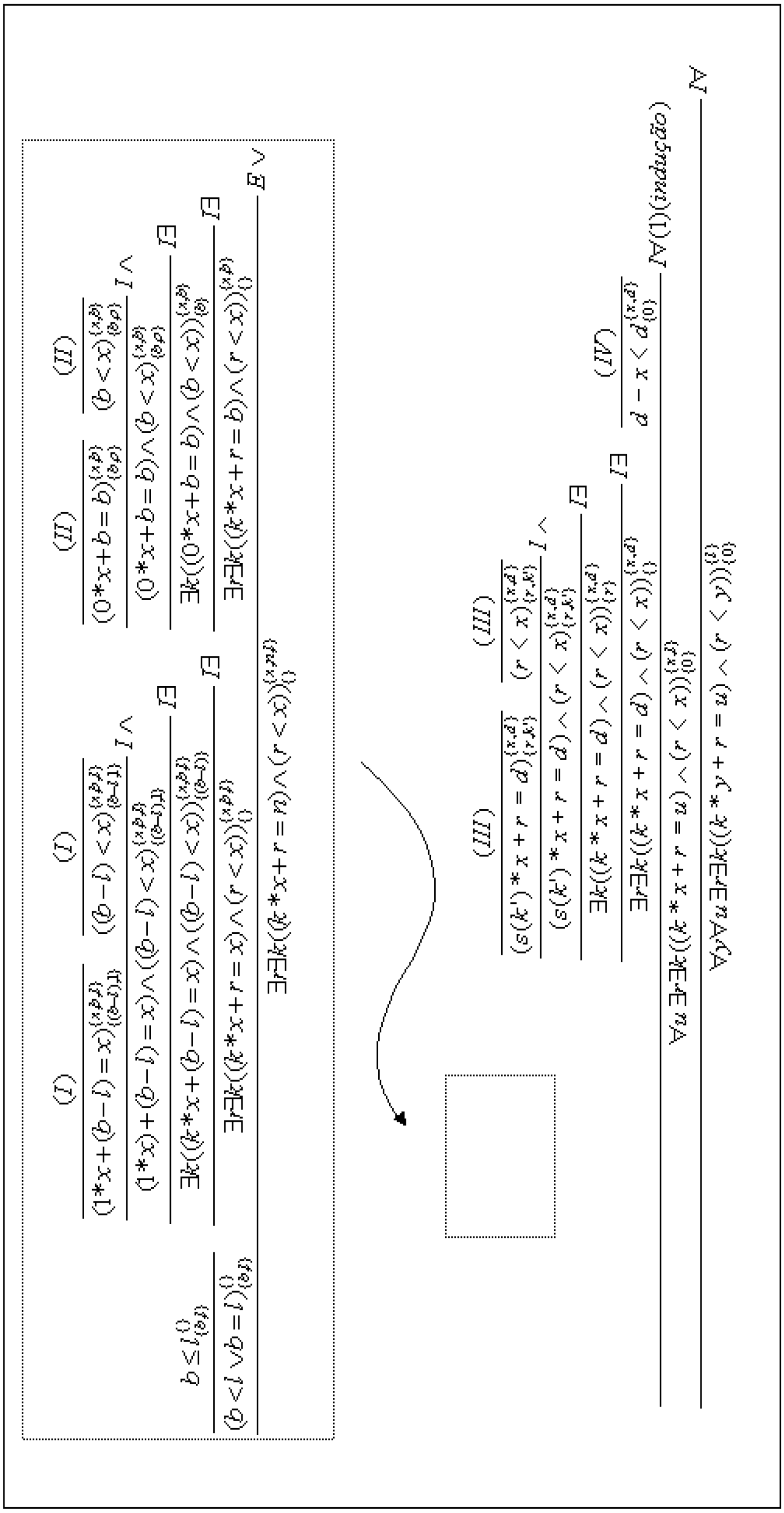
$$\dfrac{y > 0^{\{y\}}_{\{0\}}}{x > 0^{\{x\}}_{\{0\}}}$$

$$\dfrac{\forall z \forall p((p > 0) \rightarrow (z - p < z))^{\{\}}_{\{0\}}}{\forall p((p > 0) \rightarrow (d - p < d))^{\{d\}}_{\{0\}}}\, E\forall$$

$$\dfrac{\forall p((p > 0) \rightarrow (d - p < d))^{\{d\}}_{\{0\}}}{(x > 0) \rightarrow (d - x < d)^{\{x,d\}}_{\{0\}}}\, E\forall$$

$$\dfrac{x > 0^{\{x\}}_{\{0\}} \quad (x > 0) \rightarrow (d - x < d)^{\{x,d\}}_{\{0\}}}{d - x < d^{\{x,d\}}_{\{0\}}}\, E\rightarrow$$

Cálculo do Resto da Divisão (Marcação das entradas e saídas - continuação)



Cálculo do Resto da Divisão (Extração do conteúdo computacional)

(I)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\sigma : \forall x(1 * x = x)^{\{\}}_{\{1\}}}{\sigma : 1 * x = x^{\{x\}}_{\{1\}}}E\forall \quad \dfrac{\sigma : \forall h(h + 0 = h)^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma : x + 0 = x^{\{x\}}_{\{0\}}}E\forall}{\sigma : 1 * x + 0 = x^{\{x\}}_{\{0,1\}}} \qquad \dfrac{\sigma : [b = l]^{\{b,l\}(1)}_{\{\}} \quad \dfrac{\dfrac{\sigma : \forall z \forall p((z = p) \to (z - p = 0))^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma : \forall p((b = p) \to (b - p = 0))^{\{b\}}_{\{0\}}}E\forall}{\sigma : (b = l) \to (b - l = 0)^{\{b,l\}}_{\{0\}}}E\forall}{\sigma : b - l = 0^{\{b,l\}}_{\{0\}}}E\to}{\sigma : 1 * x + (b - l) = x^{\{x,b,l\}}_{\{(b-l),1\}}}Ig$$

(I)Continuação

$$\dfrac{\dfrac{\sigma : \forall z(0 < z)^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma : 0 < x^{\{x\}}_{\{0\}}}E\forall \qquad \dfrac{\sigma : [b = l]^{\{b,l\}(1)}_{\{\}} \quad \dfrac{\dfrac{\sigma : \forall z \forall p((z = p) \to (z - p = 0))^{\{\}}_{\{0,1\}}}{\sigma : \forall p((b = p) \to (b - p = 0))^{\{b\}}_{\{0,1\}}}E\forall}{\sigma : (b = l) \to (b - l = 0)^{\{b,l\}}_{\{0,1\}}}E\forall}{\sigma : b - l = 0^{\{b,l\}}_{\{0,1\}}}E\to}{\sigma : b - l < x^{\{x,b,l\}}_{\{(b-l),1\}}}E\to$$

(II)

$$\dfrac{\dfrac{\sigma : \forall q(0 * q = 0)^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma : 0 * x = 0^{\{x\}}_{\{0\}}}E\forall \quad \dfrac{\sigma : \forall h(0 + h = h)^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma : 0 + b = b^{\{b\}}_{\{0\}}}E\forall}{\sigma : 0 * x + b = b^{\{x,b\}}_{\{b,0\}}}Ig \qquad \dfrac{\sigma : [b < l]^{\{b,l\}(1)}_{\{\}} \quad \sigma : l = x^{\{x,b\}}_{\{l,0\}}}{\sigma : b < x^{\{x,b\}}_{\{b,0\}}}$$

Cálculo do Resto da Divisão (Extração do conteúdo computacional - continuação)

(III)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Lambda : \exists r \exists k'((k'*x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{\}} \quad \textbf{(hipóteseindutiva)}}{r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}) : \exists k'((k'*x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\,E\exists}{k' \leftarrow exec(r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}),\vec{v}) : ((k'*x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\,E\exists}{k' \leftarrow exec(r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}),\vec{v}) : (k'*x + r = d - x)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}} \quad k' \leftarrow exec(r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}),\vec{v}) : (r < x)^{\{x,d\}***}_{\{r,k'\}}}\,E\wedge$$

$$\dfrac{\dfrac{k' \leftarrow exec(r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}),\vec{v}) : (k'*x + r = d - x)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\sigma : \forall z \forall p \forall q((z = p - q) \rightarrow (z + q = p))^{\{\}}_{\{\}}}{\sigma : \forall p \forall q((k'*x + r = p - q) \rightarrow (k'*x + r + q = p))^{\{x\}}_{\{\}}}\,E\forall}{\sigma : \forall q((k'*x + r = d - q) \rightarrow (k'*x + r + q = d))^{\{x,d\}}_{\{\}}}\,E\forall}{\sigma : (k'*x + r = d - x) \rightarrow (k'*x + r + x = d)^{\{x,d\}}_{\{\}}}\,E\forall}{\sigma : (k'*x + x + r = d)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\,E\rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\sigma : \forall z \forall q(s(q) * z = q * z + z)^{\{\}}_{\{\}}}{\sigma : \forall q(s(q) * x = q * x + x)^{\{x\}}_{\{\}}}\,E\forall}{\sigma : (s(k') * x = k'*x + x)^{\{x\}}_{\{k'\}}}\,E\forall}{\sigma : (s(k') * x + r = d)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\,Ig$$

$$\dfrac{k' \leftarrow exec(r \leftarrow exec(\Lambda, \vec{v}), \vec{v}) : (r < x)^{\{x,d\}***}_{\{r,k'\}}}{k' \leftarrow exec(r \leftarrow exec(\Lambda, \vec{v}), \vec{v}) : r < x^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}$$

(IV)

$$\dfrac{\dfrac{\sigma : y > 0^{\{y\}}_{\{0\}}}{\sigma : x > 0^{\{x\}}_{\{0\}}} \quad \dfrac{\dfrac{\sigma : \forall z \forall p((p > 0) \rightarrow (z - p < z))^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma : \forall p((p > 0) \rightarrow (d - p < d))^{\{d\}}_{\{0\}}}\,E\forall}{\sigma : (x > 0) \rightarrow (d - x < d)^{\{x,d\}}_{\{0\}}}\,E\forall}{\sigma : d - x < d^{\{x,d\}}_{\{0\}}}$$

Cálculo do Resto da Divisão (Extração do conteúdo computacional - continuação)

$$\dfrac{\dfrac{\sigma : b \le l^{[b,l]}_{[1]}}{\sigma : (b < l \vee b = l)^{[b,l]}_{[1]}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(I)}{\sigma : (1 * x + (b-l) = x)^{[x,b,l]}_{[(b-l),1]}} \quad \dfrac{(I)}{\sigma : ((b-l) < x)^{[x,l]}_{[b-l,1]}}}{\sigma : (1 * x) + (b-l) = x) \wedge ((b-l) < x)^{[x,b,l]}_{[(b-l),1]}}\, I\wedge}{write(1) : \exists k((k * x + (b-l) = x) \wedge ((b-l) < x))^{[x,b,l]}_{[(b-l)]}}\, I\exists}{write(1); write(b-l) : \exists r \exists k((k * x + r = x) \wedge (r < x))^{[x,b,l]}_{[1]}}\, I\exists \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(II)}{\sigma : (0 * x + b = b)^{[x,b]}_{[b,0]}} \quad \dfrac{(II)}{\sigma : (b < x)^{[x,b]}_{[b,0]}}}{\sigma : (0 * x + b = b) \wedge (b < x)^{[x,b]}_{[b,0]}}\, I\wedge}{write(0) : \exists k((0 * x + b = b) \wedge (b < x))^{[x,b]}_{[b]}}\, I\exists}{write(0); write(b) : \exists r \exists k((k * x + r = b) \wedge (r < x))^{[x,b]}_{[1]}}\, I\exists}{if\,(b = l) then \{write(1); write(b-l)\}\; else \{if\,(b < l) then \{write(0); write(b)\}\} : \exists r \exists k((k * x + r = n) \wedge (r < x))^{[x,n,l]}_{[1]}}\, E\vee$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(III)}{\sigma : (s(k') * x + r = d)^{[x,d]}_{[r,k']}} \quad \dfrac{(III)}{k' \leftarrow exec\,(r \leftarrow exec\,(\Lambda, \vec{v}), \vec{v})(r < x)^{[x,d]}_{[r,k']}}}{k' \leftarrow exec\,(r \leftarrow exec\,(\Lambda, \vec{v}), \vec{v}) : (s(k') * x + r = d) \wedge (r < x)^{[x,d]}_{[r,k']}}\, I\wedge}{k' \leftarrow exec\,(r \leftarrow exec\,(\Lambda, \vec{v}), \vec{v}); write\,(s(k')) : \exists k((k * x + r = d) \wedge (r < x))^{[x,d]}_{[r']}}\, I\exists}{k' \leftarrow exec\,(r \leftarrow exec\,(\Lambda, \vec{v}), \vec{v}); write\,(s(k')); write\,(r) : \exists r \exists k((k * x + r = d) \wedge (r < x))^{[x,d]}_{[1]}}\, I\exists \qquad \dfrac{(IV)}{\sigma : d - x < d^{[x,d]}_{[0]}}$$

$I\forall(1)(indução)$

Procedure *resto* {
read (b); *if* $(b \le l)$ *then* { *if* $(b = l)$ *then* { *write* (1); *write* $(b - l)$ }
else { *if* $(b < l)$ *then* { *write* (0); *write* (b) } } }
else { *write* $(b - x)$; $r \leftarrow (k' \leftarrow$ *resto*$)$; *write* $(s(k'))$; *write* (r) }
}

$\forall u \exists r \exists k((k * x + r = u) \wedge (r < x))^{[x,l]}_{[0]}$

$I\forall$

Program RestoDiv{
Procedure *resto* {
read (b); *if* $(b \le l)$ *then* { *if* $(b = l)$ *then* { *write* (1); *write* $(b - l)$ }
else { *if* $(b < l)$ *then* { *write* (0); *write* (b) } } }
else { *write* $(b - x)$; $r \leftarrow (k' \leftarrow$ *resto*$)$; *write* $(s(k'))$; *write* (r) } }
read (x); $l := x''$; *resto*;
}

$\forall y \forall u \exists r \exists k((k * y + r = u) \wedge (r < y))^{[y]}_{[0]}$

** Para a realização da prova foi inserida a seguinte hipótese: $y = l$, que representa uma restrição de memória, onde l possui o valor de y.

5.3 Processo de Síntese de Programas 2

Neste seção é apresentada a extração do conteúdo computacional dos mesmos exemplos demonstrados na seção anterior. Destes serão apresentados apenas a parte da geração do programa e um exemplo que só é possível com o novo processo de síntese, o qual apresentará a prova da viabilidade do problema, a marcação das entradas e das saídas e a extração do conteúdo computacional da prova.

5.3.1 Soma de dois números naturais

Neste exemplo, utilizando os seguintes predicados e funcionais

$a(x, y)$ - funcional que expressa a operação de soma;

$s(x)$ - funcional que expressa a operação de sucessor;

$p(x)$ - funcional que expressa a operação de predecessor;

$I(x, y)$ - predicado de igualdade;

$M(x, y)$- predicado que verifica se um elemento (x) é menor que o outro (y).

Será gerado um programa a partir da prova do seguinte teorema:

$$\forall w \forall x \exists y (I(a(x, y), z))$$

Com a utilização dos seguintes axiomas:

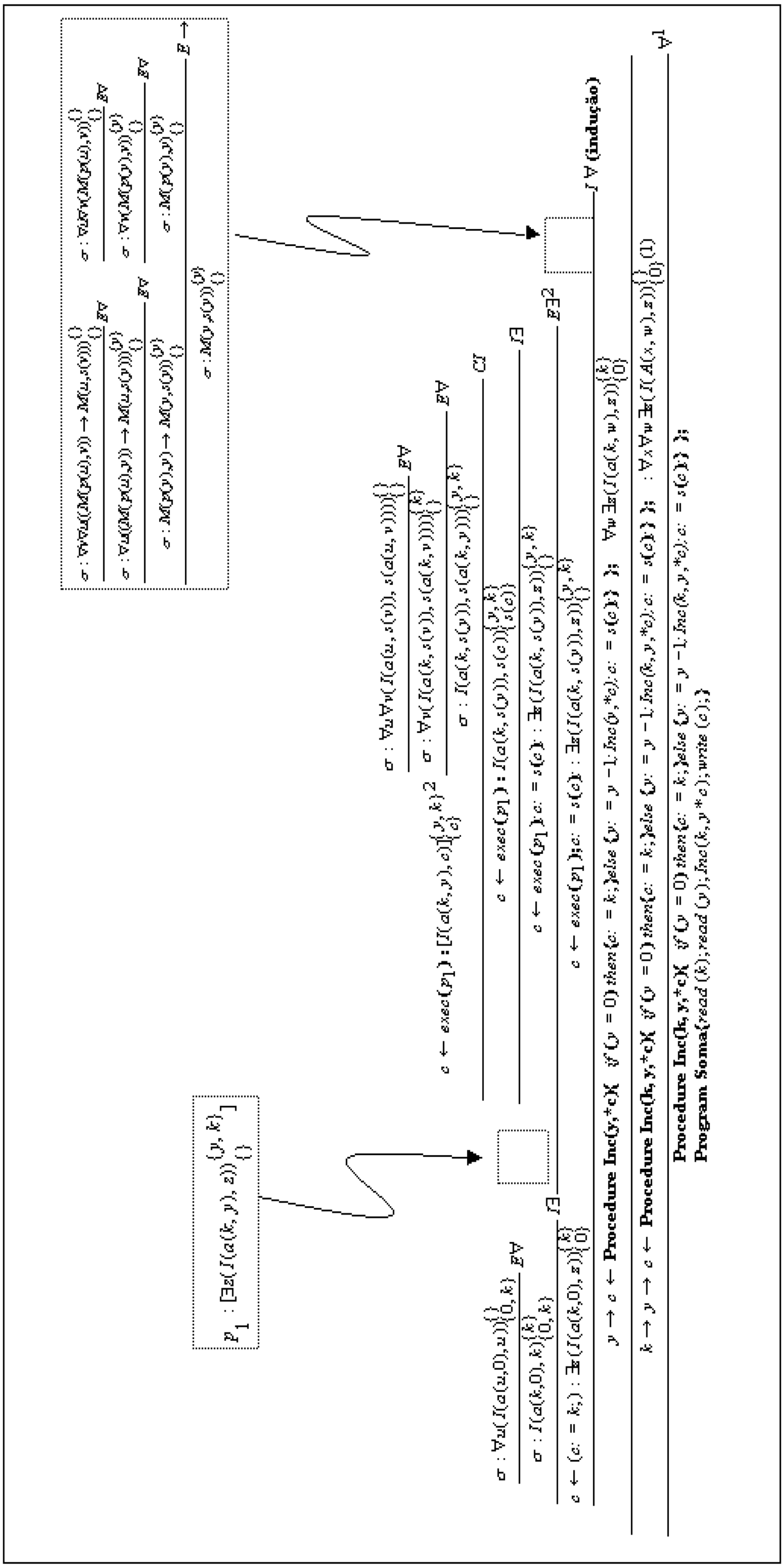
$1 - \forall u (I(a(u, 0), u))$;

$2 - \forall u \forall v (I(a(u, s(v)), s(a(u, v))))$;

$3 - \forall u \forall v (M(p(u), v) \rightarrow M(u, s(v)))$;

$4 - \forall u \forall v (M(p(u), v))$;

Soma de dois números naturais (Extração do conteúdo computacional)



5.3.2 Cálculo do resto de uma divisão

Com objetivo de facilitar o entendimento da prova não foram utilizados, neste exemplo, os funcionais para as operações de adição, subtração e multiplicação, nem os predicados de igualdade e das relações de menor e de maior.

Foi utilizado, apenas, o funcional que expressa a operação de sucessor s(x).

O programa será gerado a partir da prova do seguinte teorema:

$$\forall v \forall u \exists r \exists k((k * v + r = u) \wedge (r < v))$$

Com a utilização dos seguintes axiomas:

$1 - \forall x(x * 1 = x)$;

$2 - \forall x(x + 0 = x)$;

$3 - \forall q(0 * q = 0)$;

$4 - \forall z(0 < z)$;

$5 - \forall z \forall p((z = p) \rightarrow (z - p = 0))$;

$6 - \forall z \forall p((p > 0) \rightarrow (z - p < z))$;

$7 - \forall z \forall q((z * s(q)) \rightarrow (z * q + z))$;

$8 - \forall z \forall p \forall q((z = p - q) \rightarrow (z + q = p))$;

e das seguintes hipóteses:

$y > 0, l = y$.

Cálculo do Resto da Divisão (Extração do conteúdo computacional)

(I)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\sigma:\forall x(1*x=x)^{\{\}}_{\{1\}}}{\sigma:1*x=x^{\{x\}}_{\{1\}}}E\forall \quad \dfrac{\sigma:\forall h(h+0=h)^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma:x+0=x^{\{x\}}_{\{0\}}}E\forall}{\sigma:1*x+0=x^{\{x\}}_{\{0,1\}}} \quad \dfrac{\sigma:[b=l]^{\{b,l\}(1)}_{\{\}} \quad \dfrac{\dfrac{\sigma:\forall z\forall p((z=p)\to(z-p=0))^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma:\forall p((b=p)\to(b-p=0))^{\{b\}}_{\{0\}}}E\forall}{\sigma:(b=l)\to(b-l=0)^{\{b,l\}}_{\{0\}}}E\forall}{\sigma:b-l=0^{\{b,l\}}_{\{0\}}}E\to}{\sigma:1*x+(b-l)=x^{\{x,b,l\}}_{\{(b-l),1\}}}Ig$$

(I)Continuação

$$\dfrac{\dfrac{\sigma:\forall z(0<z)^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma:0<x^{\{x\}}_{\{0\}}}E\forall \quad \dfrac{\sigma:[b=l]^{\{b,l\}(1)}_{\{\}} \quad \dfrac{\dfrac{\sigma:\forall z\forall p((z=p)\to(z-p=0))^{\{\}}_{\{0,1\}}}{\sigma:\forall p((b=p)\to(b-p=0))^{\{b\}}_{\{0,1\}}}E\forall}{\sigma:(b=l)\to(b-l=0)^{\{b,l\}}_{\{0,1\}}}E\forall}{\sigma:b-l=0^{\{b,l\}}_{\{0,1\}}}E\to}{\sigma:b-l<x^{\{x,b,l\}}_{\{(b-l),1\}}}E\to$$

(II)

$$\dfrac{\dfrac{\sigma:\forall q(0*q=0)^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma:0*x=0^{\{x\}}_{\{0\}}}E\forall \quad \dfrac{\sigma:\forall h(0+h=h)^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma:0+b=b^{\{b\}}_{\{0\}}}E\forall}{\sigma:0*x+b=b^{\{x,b\}}_{\{b,0\}}}Ig \qquad \dfrac{\sigma:[b<l]^{\{b,l\}(1)}_{\{\}} \quad \sigma:l=x^{\{x,b\}}_{\{l,0\}}}{\sigma:b<x^{\{x,b\}}_{\{b,0\}}}$$

Cálculo do Resto da Divisão (Extração do conteúdo computacional - continuação)

(III)

$$\dfrac{\Lambda : \exists r \exists k'((k'^{*}x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{\}} \quad \textbf{(hipóteseindutiva)}}{r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}) : \exists k'((k'^{*}x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\,E\exists$$

$$\dfrac{r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}) : \exists k'((k'^{*}x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}{k' \leftarrow r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}),\vec{v} : ((k'^{*}x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\,E\exists$$

$$\dfrac{k' \leftarrow r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}),\vec{v} : ((k'^{*}x + r = d - x) \wedge (r < x))^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}{k' \leftarrow r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}) : (k'^{*}x + r = d - x)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}} \quad k' \leftarrow r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}) : (r < x)^{\{x,d\}\,***}_{\{r,k'\}}}\,E\wedge$$

$$\dfrac{\sigma : \forall z \forall p \forall q((z = p - q) \rightarrow (z + q = p))^{\{\}}_{\{\}}}{\sigma : \forall p \forall q((k'^{*}x + r = p - q) \rightarrow (k'^{*}x + r + q = p))^{\{x\}}_{\{\}}}\,E\forall$$

$$\dfrac{\sigma : \forall p \forall q((k'^{*}x + r = p - q) \rightarrow (k'^{*}x + r + q = p))^{\{x\}}_{\{\}}}{\sigma : \forall q((k'^{*}x + r = d - q) \rightarrow (k'^{*}x + r + q = d))^{\{x,d\}}_{\{\}}}\,E\forall$$

$$\dfrac{\sigma : \forall q((k'^{*}x + r = d - q) \rightarrow (k'^{*}x + r + q = d))^{\{x,d\}}_{\{\}}}{\sigma : (k'^{*}x + r = d - x) \rightarrow (k'^{*}x + r + x = d)^{\{x,d\}}_{\{\}}}\,E\forall$$

$$\dfrac{k' \leftarrow r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}) : (k'^{*}x + r = d - x)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}} \quad \sigma : (k'^{*}x + r = d - x) \rightarrow (k'^{*}x + r + x = d)^{\{x,d\}}_{\{\}}}{\sigma : (k'^{*}x + x + r = d)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\,E\rightarrow$$

$$\dfrac{\sigma : \forall z \forall q(s(q) * z = q * z + z)^{\{\}}_{\{\}}}{\sigma : \forall q(s(q) * x = q * x + x)^{\{x\}}_{\{\}}}\,E\forall \qquad \dfrac{\sigma : \forall q(s(q) * x = q * x + x)^{\{x\}}_{\{\}}}{\sigma : (s(k') * x = k'^{*}x + x)^{\{x\}}_{\{k'\}}}\,E\forall$$

$$\dfrac{\sigma : (k'^{*}x + x + r = d)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}} \quad \sigma : (s(k') * x = k'^{*}x + x)^{\{x\}}_{\{k'\}}}{\sigma : (s(k')^{*}\,x + r = d)^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}\,Ig$$

$$\dfrac{k' \leftarrow r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}) : (r < x)^{\{x,d\}\,***}_{\{r,k'\}}}{k' \leftarrow r \leftarrow exec(\Lambda,\vec{v}) : r < x^{\{x,d\}}_{\{r,k'\}}}$$

(IV)

$$\dfrac{\sigma : \forall z \forall p((p > 0) \rightarrow (z - p < z))^{\{\}}_{\{0\}}}{\sigma : \forall p((p > 0) \rightarrow (d - p < d))^{\{d\}}_{\{0\}}}\,E\forall \qquad \dfrac{\sigma : \forall p((p > 0) \rightarrow (d - p < d))^{\{d\}}_{\{0\}}}{\sigma : (x > 0) \rightarrow (d - x < d)^{\{x,d\}}_{\{0\}}}\,E\forall$$

$$\dfrac{\sigma : y > 0^{\{y\}}_{\{0\}}}{\sigma : x > 0^{\{x\}}_{\{0\}}}$$

$$\dfrac{\sigma : x > 0^{\{x\}}_{\{0\}} \quad \sigma : (x > 0) \rightarrow (d - x < d)^{\{x,d\}}_{\{0\}}}{\sigma : d - x < d^{\{x,d\}}_{\{0\}}}$$

Cálculo do Resto da Divisão (Extração do conteúdo computacional - continuação)

$$
\dfrac{
\dfrac{\sigma : b \le l^{[b,l]}_{[]}}{\sigma : (b < l \vee b = l)^{[b,l]}_{[]}}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(I)}{\sigma : (1 * x + (b-l) = x)^{[x,b,l]}_{[(b-l),1]}} \quad \dfrac{(I)}{\sigma : ((b-l) < x)^{[x,l]}_{[b-l,1]}}}{\sigma : (1 * x) + (b-l) = x) \wedge ((b-l) < x)^{[x,b,l]}_{[(b-l),1]}}\, I\wedge}{k := 1;: \exists k((k * x + (b-l) = x) \wedge ((b-l) < x))^{[x,b,l]}_{[(b-l)]}}\, I\exists}{k := 1; r := b - l;: \exists r \exists k((k * x + r = x) \wedge (r < x))^{[x,b,l]}_{[]}}\, I\exists
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(II)}{\sigma : (0 * x + b = b)^{[x,b]}_{[b,0]}} \quad \dfrac{(II)}{\sigma : (b < x)^{[x,b]}_{[b,0]}}}{\sigma : (0 * x + b = b) \wedge (b < x)^{[x,b]}_{[b,0]}}\, I\wedge}{k := 0;: \exists k((0 * x + b = b) \wedge (b < x))^{[x,b]}_{[b]}}\, I\exists}{k := 0; r := b;: \exists r \exists k((k * x + r = b) \wedge (r < x))^{[x,b]}_{[]}}\, I\exists
}{
if\,(b = l)\,then\{k := 1; r := b - l;\}\ else\{if\,(b < l)\,then\{k := 0; r := b;\}\} : \exists r \exists k((k * x + r = n) \wedge (r < x))^{[x,n,l]}_{[]}
}\, E\vee
$$

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(III)}{\sigma : (s(k') * x + r = d)^{[x,d]}_{[r,k']}} \quad \dfrac{(III)}{k' \leftarrow exec\,(r \leftarrow exec\,(\wedge, \vec{v}), \vec{v})(r < x)^{[x,d]}_{[r,k']}}}{k' \leftarrow r \leftarrow exec\,(\wedge, \vec{v}) : (s(k') * x + r = d) \wedge (r < x)^{[x,d]}_{[r,k']}}\, I\wedge}{k \leftarrow r \leftarrow exec\,(\wedge, \vec{v}); k := s(k');: \exists k((k * x + r = d) \wedge (r < x))^{[x,d]}_{[r]}}\, I\exists}{k \leftarrow r \leftarrow exec\,(\wedge, \vec{v}); k := s(k'); r := r : \exists r \exists k((k * x + r = d) \wedge (r < x))^{[x,d]}_{[]}}\, I\exists
\qquad
\dfrac{(IV)}{\sigma : d - x < d^{[x,d]}_{[0]}}
}{
b \rightarrow k \leftarrow r \leftarrow \textbf{Procedure}\ resto\,(b,*k,*r)\{\ldots\} \quad \forall u \exists r \exists k((k * x + r = u) \wedge (r < x))^{[x,l]}_{[0]}
}\, I\forall(1)(indução)
$$

$b \rightarrow k \leftarrow r \leftarrow$ **Procedure** $resto\,(b,*k,*r)\,\{$
$if\,(b \le l)\,then\ \{\ if\,(b = l)\,then\,\{k := 1; r := b - l;\}\ else\,\{if\,(b < l)\,then\,\{k := 0; r := b;\}\}\}$ $\quad \forall u \exists r \exists k((k * x + r = u) \wedge (r < x))^{[x,l]}_{[0]}$
$else\ \{b := b - x; resto\,(b,*k',*r); k := s(k'); r := r\}\ \}$

———————————————————————————— $I\forall$

$x \rightarrow b \rightarrow k \leftarrow r \leftarrow$ **Procedure** $resto\,(x,b,*k,*r)\,\{$
$if\,(b \le l)\,then\ \{\ if\,(b = l)\,then\,\{k := 1; r := b - l;\}\ else\,\{if\,(b < l)\,then\,\{k := 0; r := b;\}\}\}$ $\quad \forall y \forall u \exists r \exists k((k * y + r = u) \wedge (r < y))^{[l]}_{[0]}$
$else\ \{b := b - x; resto\,(x,b,*k',*r); k := s(k'); r := r\}\}$

————————————————————————————

Procedure $resto\,(x,b,*k,*r)\,\{$
$if\,(b \le l)\,then\ \{\ if\,(b = l)\,then\,\{k := 1; r := b - l;\}\ else\,\{if\,(b < l)\,then\,\{k := 0; r := b;\}\}\}$
$else\ \{b := b - x; resto\,(x,b,*k',*r); k := s(k'); r := r\}\}$

Program **RestoDiv{** $read\,(x); read\,(b); l = x; resto\,(x, b * k, *r); write\,(k); write\,(r);$ **}**

* Para a realização da prova foi inserida a seguinte hipótese: $y = l$, que representa uma restrição de memória, onde l possui o valor de y.

5.3.3
Encontrar o maior elemento de uma lista

Esse exemplo, não pode ser realizado utilizando o processo de extração do conteúdo computacional apresentado no capítulo 2, pois nele todas as hipóteses têm conteúdo computacional.

Com o objetivo de facilitar o entendimento da prova não foram utilizados os predicados de igualdade e das relações de menor e de maior. Foi utilizado apenas o predicado que verifica se um elemento (X) pertence a lista (y) - $Per(x, y)$. Uma lista é apresenta entre colchetes ([ ]) e o primeiro elemento da lista é separado do corpo da lista por " : "$([x : y], x$ é a cabeça da lista e y o seu corpo).

Será gerado um programa a partir da prova do seguinte teorema:

$$\forall x \exists y (Per(m, x) \land \forall z (Per(z, x) \rightarrow z \leq m))$$

Com a utilização dos seguintes axiomas:

$1 - \forall r \forall s([r] < [s : r]);$

$2 - \forall u \forall v Per(v, [v : u]);$

$3 - \forall p \forall q(p \leq q \lor p > q);$

$4 - \forall k Per(k, [k]);$

$5 - \forall u \forall v \forall r((u \leq v \land r > v) \rightarrow u \leq r);$

$6 - \forall u \forall v((u > v \lor u = v) \rightarrow (u \leq v));$

$7 - \forall q \forall r(Per(q, [r]) \rightarrow q = r);$

$8 - \forall u \forall v \forall r(Per(u, [v : r]) \rightarrow (Per(u, [v : r]) \lor u = v));$

$9 - \forall u \forall v \forall r((u \leq v \land r > v) \rightarrow u \leq r);$

$10 - \forall u \forall v \forall r(Per(u, [r]) \rightarrow Per(u, [v : r]));$

Observação 5.3.1 *No programa gerado, consideramos que a linguagem utilizada é capaz de separar a cabeça da lista(y) de seu corpo(w).*

Encontrar o maior elemento de uma lista. (Prova)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall k Per(k,[k])}{Per(n,[n])}\,E\forall \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{I}{h \leq n}\,E\rightarrow}{Per(h,[n]) \rightarrow h \leq n}\,I\rightarrow^{(1)}}{\forall z(Per(z,[n]) \rightarrow z \leq n)}\,I\forall}{Per(n,[n]) \wedge \forall z(Per(z,[n]) \rightarrow z \leq n)}\,I\wedge}{\exists m(Per(m,[n]) \wedge \forall z(Per(z,[n]) \rightarrow z \leq m))}\,I\exists \qquad \dfrac{(III)}{\exists m(Per(m,[y:w]) \wedge \forall z(Per(z,[y:w]) \rightarrow z \leq m)} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall r \forall s([r] < [s:r])}{\forall s([w] < [s:w])}\,E\forall}{[w] < [y:w]}\,E\forall}{\forall x \exists m(Per(m,x) \wedge \forall z(Per(z,x) \rightarrow z \leq m))}\,I\forall(\textit{indução})$$

(I)

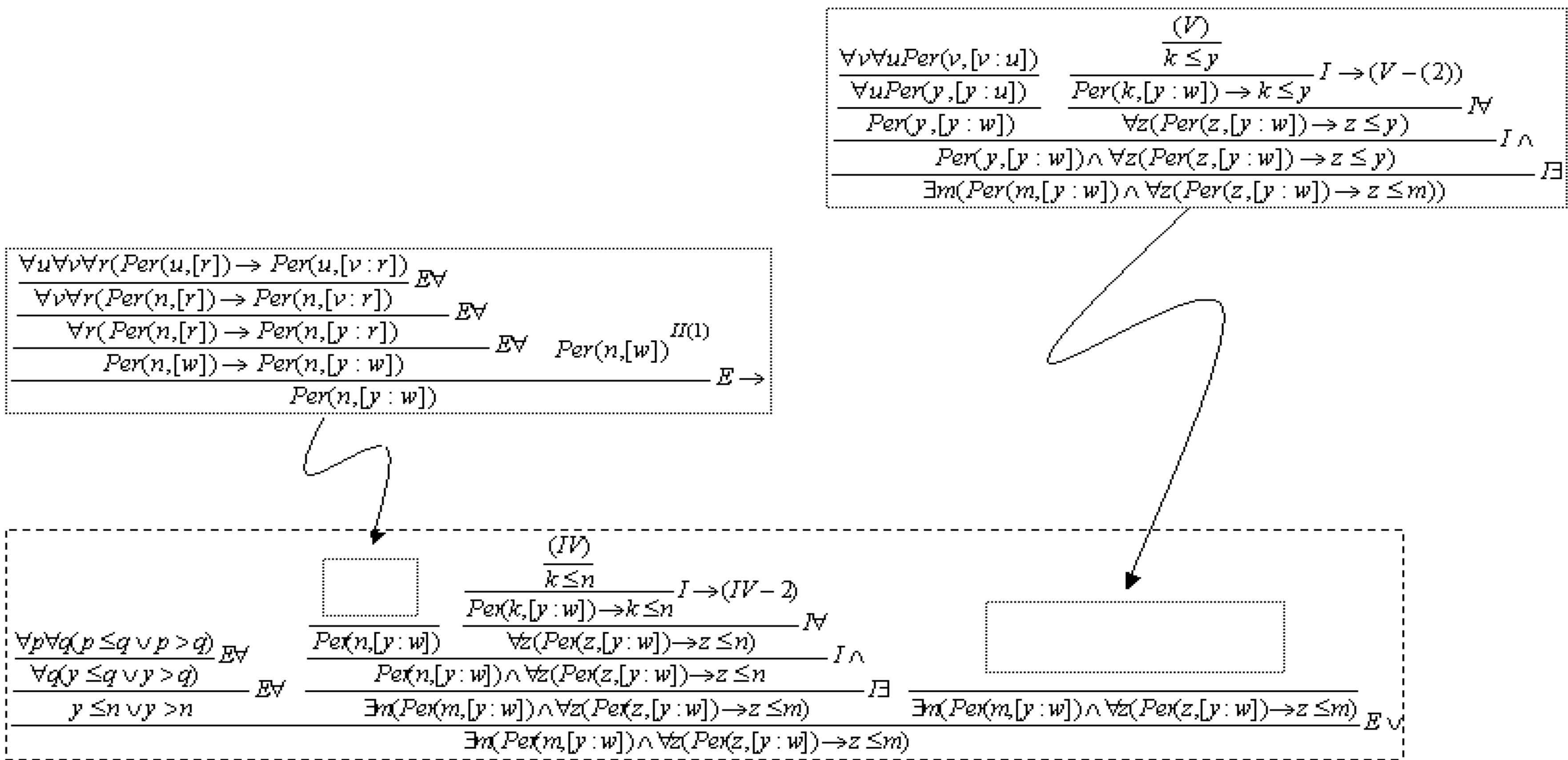
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u \forall v((u < v \vee u = v) \rightarrow u \leq v)}{\forall v((h < v \vee h = v) \rightarrow h \leq v)}\,E\forall}{(h < n \vee h = n) \rightarrow h \leq n}\,E\forall \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{h < n} \qquad \dfrac{[Per(h,[n])]^{(1)} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall q \forall r(Per(q,[r]) \rightarrow q = r)}{\forall r(Per(h,[r]) \rightarrow h = r)}\,E\forall}{Per(h,[n]) \rightarrow h = n}\,E\forall}{h = n}\,E\rightarrow}{h < n \vee h = n}\,I\vee}{h \leq n}\,E\rightarrow$$

(II) –Hipótese indutiva

$$\dfrac{\dfrac{\exists m(Per(m,[w]) \wedge \forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq m))}{Per(n,[w]) \wedge \forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq n)}\,E\exists}{Per(n,[w])^{(1)} \qquad \forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq n)^{(2)}}\,E\wedge$$

Encontrar o maior elemento de uma lista. (Prova - continuação)

(III)



Encontrar o maior elemento de uma lista. (Prova - continuação)

(IV)

$$\dfrac{\dfrac{[Per(k,[y:w])]^{(IV-2)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u\forall v\forall r(Per(u,[v:r]) \to (Per(u,[r]) \vee u=v))}{\forall v\forall r(Per(k,[v:r]) \to (Per(k,[r]) \vee k=v))}E\forall}{\forall r(Per(k,[y:r]) \to (Per(k,[r]) \vee k=y))}E\forall}{Per(k,[y:w] \to (Per(k,[w]) \vee k=y)}E\forall}{Per(k,[w]) \vee (k=y)}E\to \qquad \dfrac{[Per(k,[w])]^{(*2)} \quad \dfrac{\forall z(Per(z,[w]) \to z \leq n)^{II(2)}}{Per(k,[w]) \to k \leq n}E\forall}{k \leq n}E\to \qquad \dfrac{[k=y]^{(*2)} \quad y \leq n}{k \leq n}Ig}{k \leq n}E\vee^{(*2)}$$

(V)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[Per(k,[w])]^{(*3)} \quad \dfrac{\forall z(Per(z,[w]) \to z \leq n)^{II(2)}}{Per(k,[w]) \to k \leq n}E\forall}{k \leq n}E\to \quad [y > n]^{(*3)}}{(k \leq n) \wedge (y > n)}I\wedge \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u\forall v\forall r((u \leq v \wedge r > v) \to u \leq r)}{\forall v\forall r((k \leq v \wedge r > v) \to k \leq r)}E\forall}{\forall r((k \leq n \wedge r > n) \to k \leq r)}E\forall}{((k \leq n \wedge y > n) \to k \leq y)}E\forall}{k \leq y}E\to$$

$$\dfrac{\dfrac{[Per(k,[y:w])]^{(2)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u\forall v\forall r(Per(u,[v:r]) \to (Per(u,[v:r]) \vee u=v))}{\forall v\forall r(Per(k,[v:r]) \to (Per(k,[v:r]) \vee k=v))}E\forall}{\forall r(Per(k,[y:r]) \to (Per(k,[y:r]) \vee k=y))}E\forall}{Per(k,[n:w]) \to (Per(k,[w]) \vee k=y)}E\forall}{Per(k,[w]) \vee (k=y)}E\to \qquad \boxed{\qquad\qquad} \qquad \dfrac{[k=y]^{(*3)}}{(k < y) \vee (k=y)}}{k \leq y}E\vee^{(*3)}$$

Encontrar o maior elemento de uma lista. (Marcação das entradas e saídas)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\forall k Per(k,[k])^{\{\}}_{\{\}}}{Per(n,[n])^{\{n\}}_{\{\}}}\,E\forall
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{I}{h \leq n^{\{n,h\}}_{\{n\}}}\,E\rightarrow}{Per(h,[n]) \rightarrow h \leq n^{\{n,h\}}_{\{n\}}}\,I\rightarrow^{(1)}}{\forall z(Per(z,[n]) \rightarrow z \leq n)^{\{n\}}_{\{n\}}}\,I\forall
}{Per(n,[n]) \wedge \forall z(Per(z,[n]) \rightarrow z \leq n)^{\{n\}}_{\{n\}}}\,I\wedge
}{\exists m(Per(m,[n]) \wedge \forall z(Per(z,[n]) \rightarrow z \leq m))^{\{n\}}_{\{\}}}\,I\exists
\quad
\dfrac{(III)}{\exists m(Per(m,[y:w]) \wedge \forall z(Per(z,[y:w]) \rightarrow z \leq m)^{\{n,y,w\}}_{\{\}}}
\quad
\dfrac{\dfrac{\forall r \forall s([r] < [s:r])^{\{\}}_{\{\}}}{\forall s([w] < [s:w])^{\{w\}}_{\{\}}}\,E\forall}{[w] < [y:w]^{\{y,w\}}_{\{\}}}\,E\forall
}{\forall x \exists m(Per(m,x) \wedge \forall z(Per(z,x) \rightarrow z \leq m))^{\{n\}}_{\{\}}}\,I\forall(indução)
$$

(I)

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\forall u \forall v((u < v \vee u = v) \rightarrow u \leq v)^{\{\}}_{\{\}}}{\forall v((h < v \vee h = v) \rightarrow h \leq v)^{\{h\}}_{\{\}}}\,E\forall}{(h < n \vee h = n) \rightarrow h \leq n^{\{n,h\}}_{\{\}}}\,E\forall
\quad
\dfrac{
\dfrac{\vdots}{h < n}
\quad
\dfrac{[Per(h,[n])]^{\{n,h\}(1)}_{\{n\}} \quad \dfrac{\dfrac{\forall q \forall r(Per(q,[r]) \rightarrow q = r)^{\{\}}_{\{\}}}{\forall r(Per(h,[r]) \rightarrow h = r)^{\{h\}}_{\{\}}}\,E\forall}{Per(h,[n]) \rightarrow h = n^{\{n,h\}}_{\{\}}}\,E\forall}{h = n^{\{n,h\}}_{\{n\}}}\,E\rightarrow
}{h < n \vee h = n^{\{n,h\}}_{\{n\}}}\,I\vee
}{h \leq n^{\{n,h\}}_{\{n\}}}\,E\rightarrow
$$

Encontrar o maior elemento de uma lista. (Marcação das entradas e saídas - continuação)

(II) –Hipótese indutiva

$$\dfrac{\dfrac{\exists m(Per(m,[w]) \wedge \forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq m))^{\{w\}}_{\{\}}}{Per(n,[w]) \wedge \forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq n)^{\{w\}}_{\{n\}}}\, E\exists}{{Per(n,[w])^{\{[w]\}}_{\{n\}}}^{(1)} \qquad {\forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq n)^{\{w\}}_{\{n\}}}^{(2)}}\, E\wedge$$

Encontrar o maior elemento de uma lista. (Marcação das entradas e saídas - continuação)

(III)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u\forall v\forall r(Per(u,[r]) \to Per(u,[v:r]))^{\{\}}_{\{n\}}}{\forall v\forall r(Per(n,[r]) \to Per(n,[v:r]))^{\{n\}}_{\{n\}}}\,E\forall}{\forall r(Per(n,[r]) \to Per(n,[y:r]))^{\{n,y\}}_{\{n\}}}\,E\forall}{Per(n,[w]) \to Per(n,[y:w])^{\{n,y,w\}}_{\{n\}}}\,E\forall \qquad Per(n,[w])^{\{w\}}_{\{n\}}\;{}^{II(1)}}{Per(n,[y:w])^{\{n,y,w\}}_{\{n\}}}\,E\to$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall v\forall u Per(v,[v:u])^{\{n\}}_{\{y\}}}{\forall u Per(y,[y:u])^{\{y,n\}}_{\{y\}}}}{Per(y,[y:w])^{\{y,w,n\}}_{\{y\}}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(V)}{k \le y^{\{n,y,w,k\}}_{\{n\}}}}{Per(k,[y:w]) \to k \le y^{\{n,y,w,k\}}_{\{n\}}}\,I\to(V-(2))}{\forall z(Per(z,[y:w]) \to z \le y)^{\{n,y,w\}}_{\{y\}}}\,I\forall}{Per(y,[y:w]) \wedge \forall z(Per(z,[y:w]) \to z \le y)^{\{n,y,w\}}_{\{y\}}}\,I\wedge}{\exists m(Per(m,[y:w]) \wedge \forall z(Per(z,[y:w]) \to z \le m))^{\{n,y,w\}}_{\{\}}}\,I\exists$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall p\forall q(p \le q \vee p > q)^{\{m,k\}}_{\{n\}}}{\forall q(y \le q \vee y > q)^{\{y,m,k\}}_{\{n\}}}\,E\forall}{y \le n \vee y > n^{\{n,y,m,k\}}_{\{n\}}}\,E\forall \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\boxed{}}{Per(n,[y:w])^{\{n,y,w\}}_{\{n\}}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(IV)}{k \le n^{\{n,y,w,k\}}_{\{n\}}}}{Per(k,[y:w]) \to k \le n^{\{n,y,w,k\}}_{\{n\}}}\,I\to(IV-2)}{\forall z(Per(z,[y:w]) \to z \le n)^{\{n,y,w\}}_{\{n\}}}\,I\forall}{Per(n,[y:w]) \wedge \forall z(Per(z,[y:w]) \to z \le n)^{\{n,y,w\}}_{\{n\}}}\,I\wedge}{\exists m(Per(m,[y:w]) \wedge \forall z(Per(z,[y:w]) \to z \le m))^{\{n,y,w\}}_{\{\}}}\,I\exists \qquad \dfrac{\boxed{}}{\exists m(Per(m,[y:w]) \wedge \forall z(Per(z,[y:w]) \to z \le m))^{\{n,y,w\}}_{\{\}}}}{\exists m(Per(m,[y:w]) \wedge \forall z(Per(z,[y:w]) \to z \le m))^{\{n,y,w\}}_{\{\}}}\,E\vee(III-1)$$

Encontrar o maior elemento de uma lista. (Marcação das entradas e saídas - continuação)

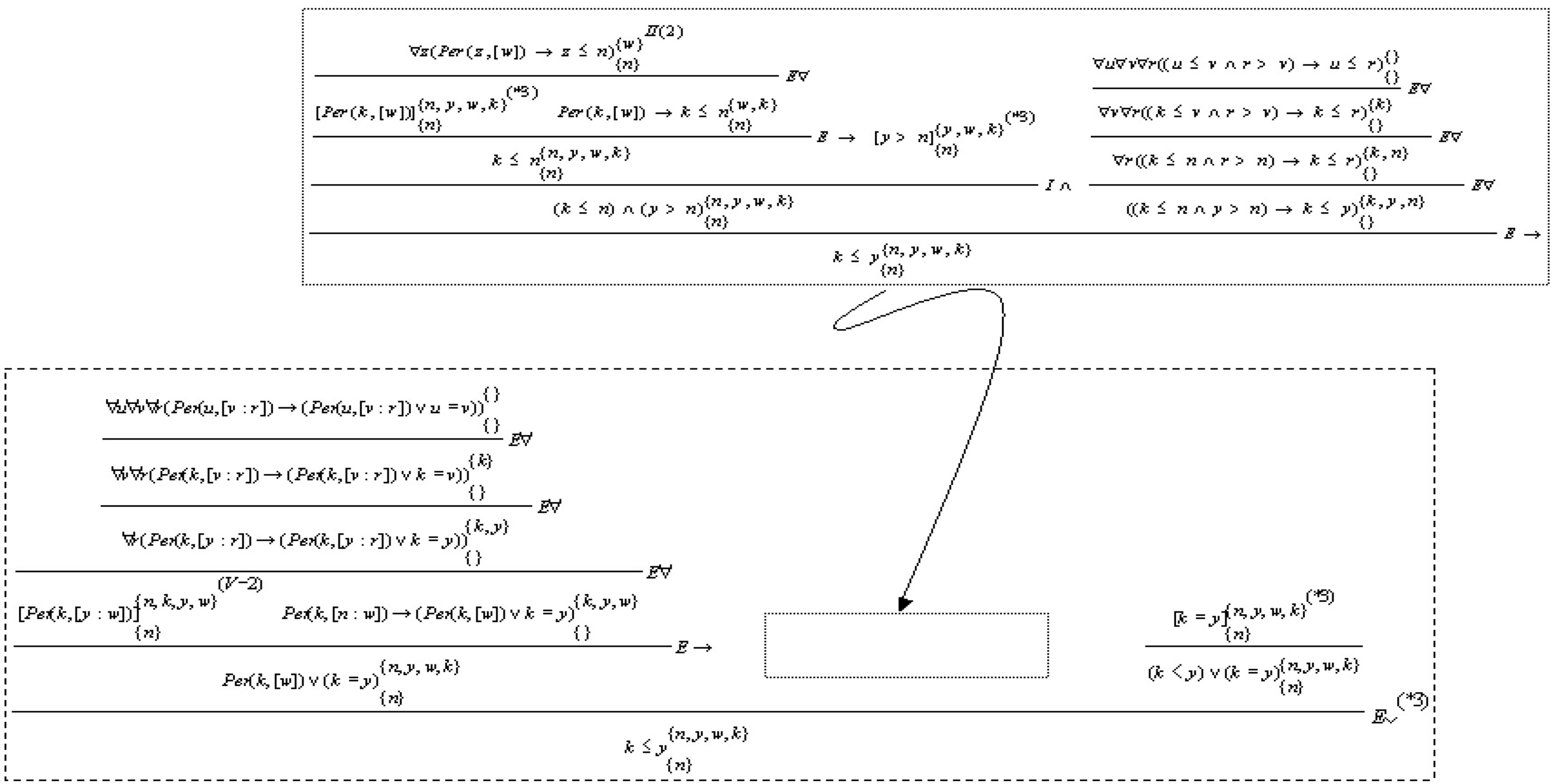
(IV)

$$\dfrac{[Per(k,[w])]^{\{n,y,w,k\}(*2)}_{\{n\}} \qquad \dfrac{\forall z(Per(z,[w]) \to z \le n)^{\{w\}}_{\{n\}}}{Per(k,[w]) \to k \le n^{\{w,k\}}_{\{n\}}}\,E\forall}{k \le n^{\{n,y,w,k\}}_{\{n\}}}\,E\to$$

$$\dfrac{\dfrac{[Per(k,[y:w])]^{\{n,y,w,k\}(IV-2)}_{\{n\}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall u\forall v\forall r(Per(u,[v:r]) \to (Per(u,[r]) \vee u = v))^{\{\}}_{\{\}}}{\forall v\forall r(Per(k,[v:r]) \to (Per(k,[r]) \vee k = v))^{\{k\}}_{\{\}}}\,E\forall}{\forall r(Per(k,[y:r]) \to (Per(k,[r]) \vee k = y))^{\{y,k\}}_{\{\}}}\,E\forall}{Per(k,[y:w]) \to (Per(k,[w]) \vee k = y)^{\{y,w,k\}}_{\{\}}}\,E\forall}{Per(k,[w]) \vee (k = y)^{\{n,y,w,k\}}_{\{n\}}}\,E\to \qquad \boxed{} \qquad \dfrac{[k = y]^{\{n,y,w,k\}(*2)}_{\{n,\}} \qquad y \le n^{\{y,w,k\}(*IV-1)}_{\{n\}}}{k \le n^{\{n,y,w,k\}}_{\{n\}}}\,Ig}{k \le n^{\{n,y,w,k\}}_{\{n\}}}\,E\vee^{(*2)}$$

Encontrar o maior elemento de uma lista. (Marcação das entradas e saídas - continuação)

(V)



Encontrar o maior elemento de uma lista. (Extração do conteúdo computacional)

(I)

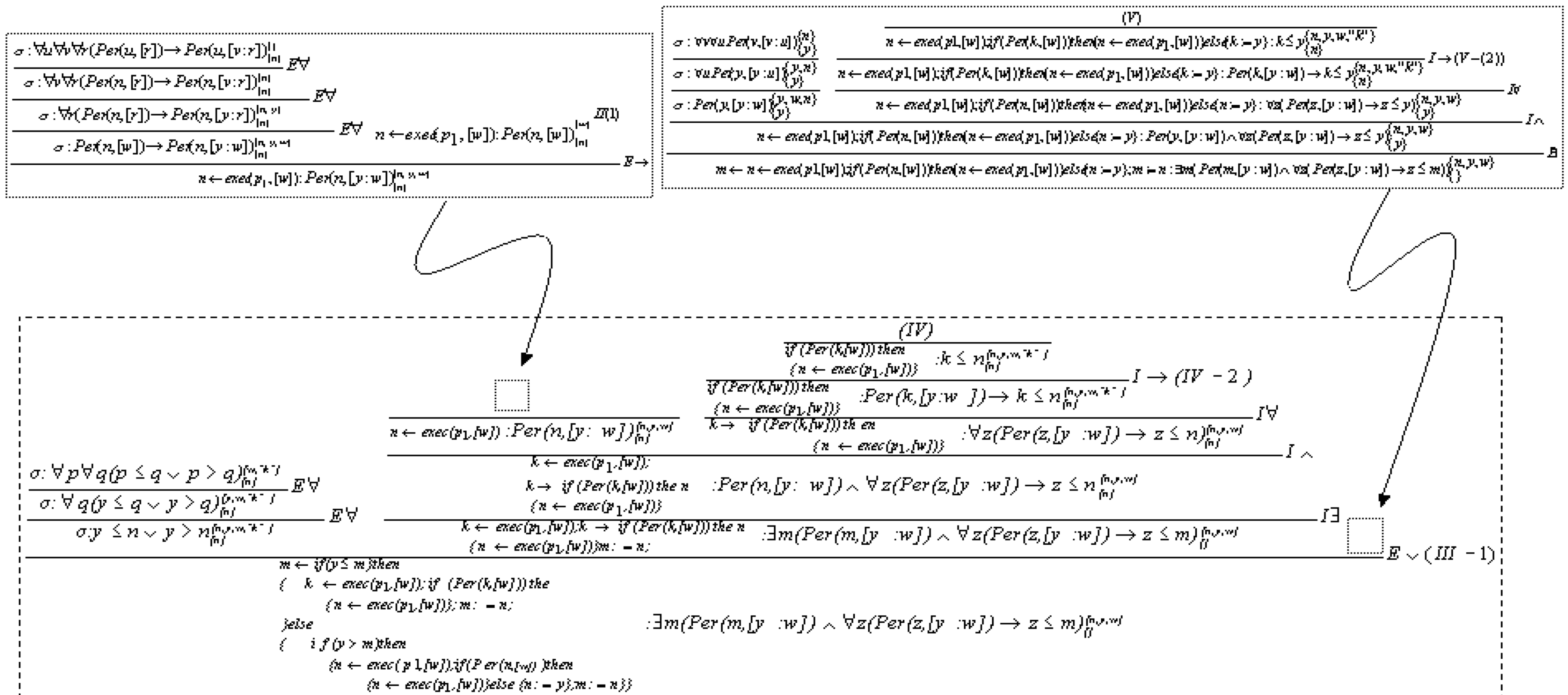
$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\sigma : \forall u \forall v((u < v \vee u = v) \rightarrow u \leq v)^{\{\}}_{\{\}}}{\sigma : \forall v((h < v \vee h = v) \rightarrow h \leq v)^{\{\text{"h"}\}}_{\{\}}}\, E\forall
}{\sigma : (h < n \vee h = n) \rightarrow h \leq n^{\{n, \text{"h"}\}}_{\{\}}}\, E\forall
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\vdots}{h < n}
\qquad
\dfrac{
\sigma : [Per(h,[n])]^{\{n,\text{"h"}\}(1)}_{\{n\}}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\sigma : \forall q \forall r(Per(q,[r]) \rightarrow q = r)^{\{\}}_{\{\}}}{\sigma : \forall r(Per(h,[r]) \rightarrow h = r)^{\{\text{"h"}\}}_{\{\}}}\, E\forall
}{\sigma : Per(h,[n]) \rightarrow h = n^{\{n, \text{"h"}\}}_{\{\}}}\, E\forall
}{\sigma : h = n^{\{n, \text{"h"}\}}_{\{n\}}}\, E\rightarrow
}{\sigma : h < n \vee h = n^{\{n,\text{"h"}\}}_{\{n\}}}\, I\vee
}{\sigma : h \leq n^{\{n,\text{"h"}\}}_{\{n\}}}\, E\rightarrow
$$

(II) –Hipótese indutiva

$$
\dfrac{
\dfrac{p_1 : \exists m(Per(m,[w]) \wedge \forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq m))^{\{w\}}_{\{\}}}{n \leftarrow exec(p_1,[w]) : Per(n,[w]) \wedge \forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq n)^{\{w\}}_{\{n\}}}\, E\exists
}{n \leftarrow exec(p_1,[w]) : Per(n,[w])^{\{[w]\}(1)}_{\{n\}} \qquad n \leftarrow exec(p_1,[w]) : \forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq n)^{\{w\}(2)}_{\{n\}}}\, E\wedge
$$

Encontrar o maior elemento de uma lista. (Extração do conteúdo computacional - continuação)

(III)



Encontrar o maior elemento de uma lista. (Extração do conteúdo computacional- continuação)

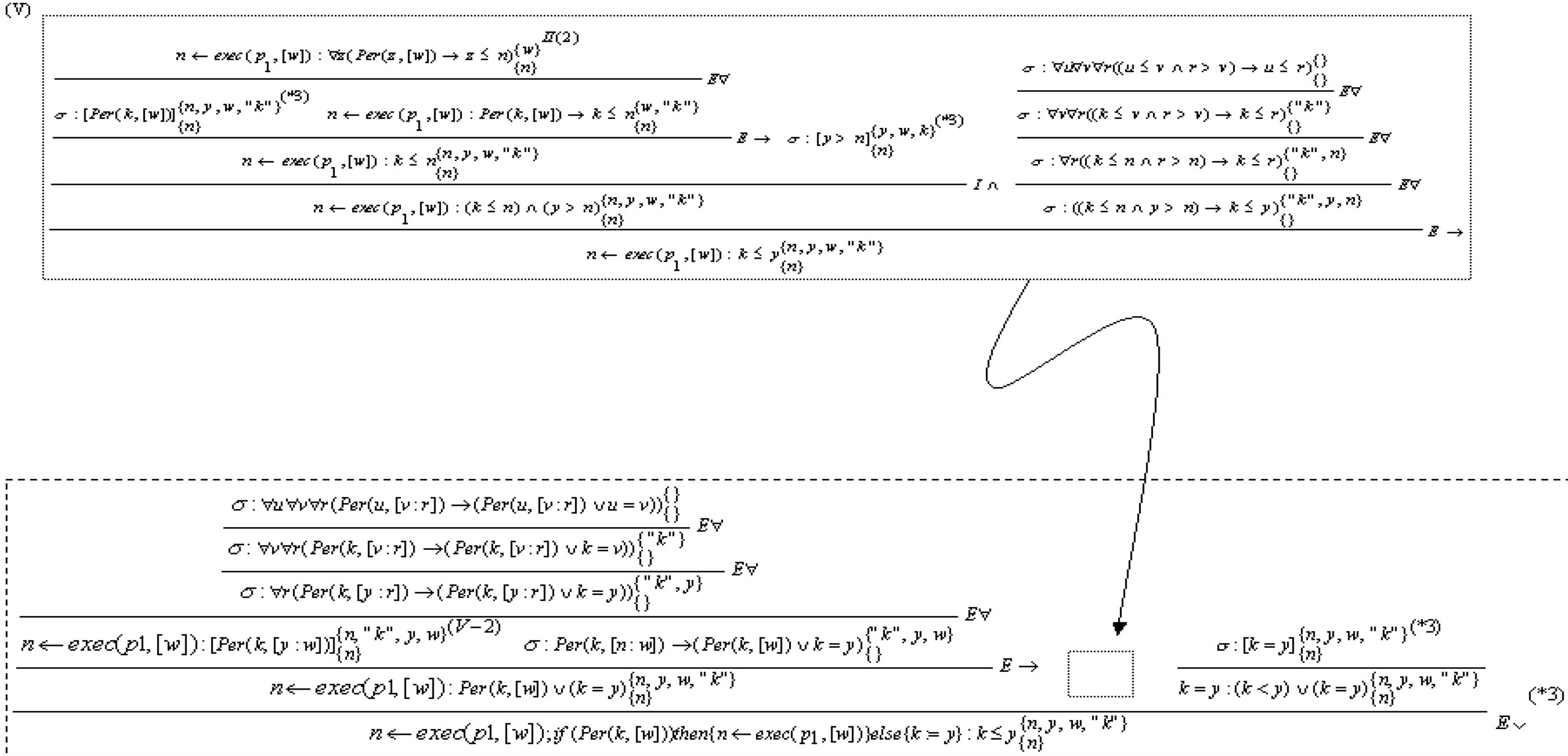
(IV)

$$\dfrac{\sigma : [Per(k,[w])]^{\{n,y,w,"k"\}\,(*2)}_{\{n\}} \qquad \dfrac{n \leftarrow exec(p_1,[w]) : \forall z(Per(z,[w]) \rightarrow z \leq n)^{\Pi(2)\{w\}}_{\{n\}}}{n \leftarrow exec(p_1,[w]) : Per(k,[w]) \rightarrow k \leq n^{\{w,"k"\}}_{\{n\}}}\,E\forall}{n \leftarrow exec(p_1,[w]) : k \leq n^{\{n,y,w,"k"\}}_{\{n\}}}\,E\rightarrow$$

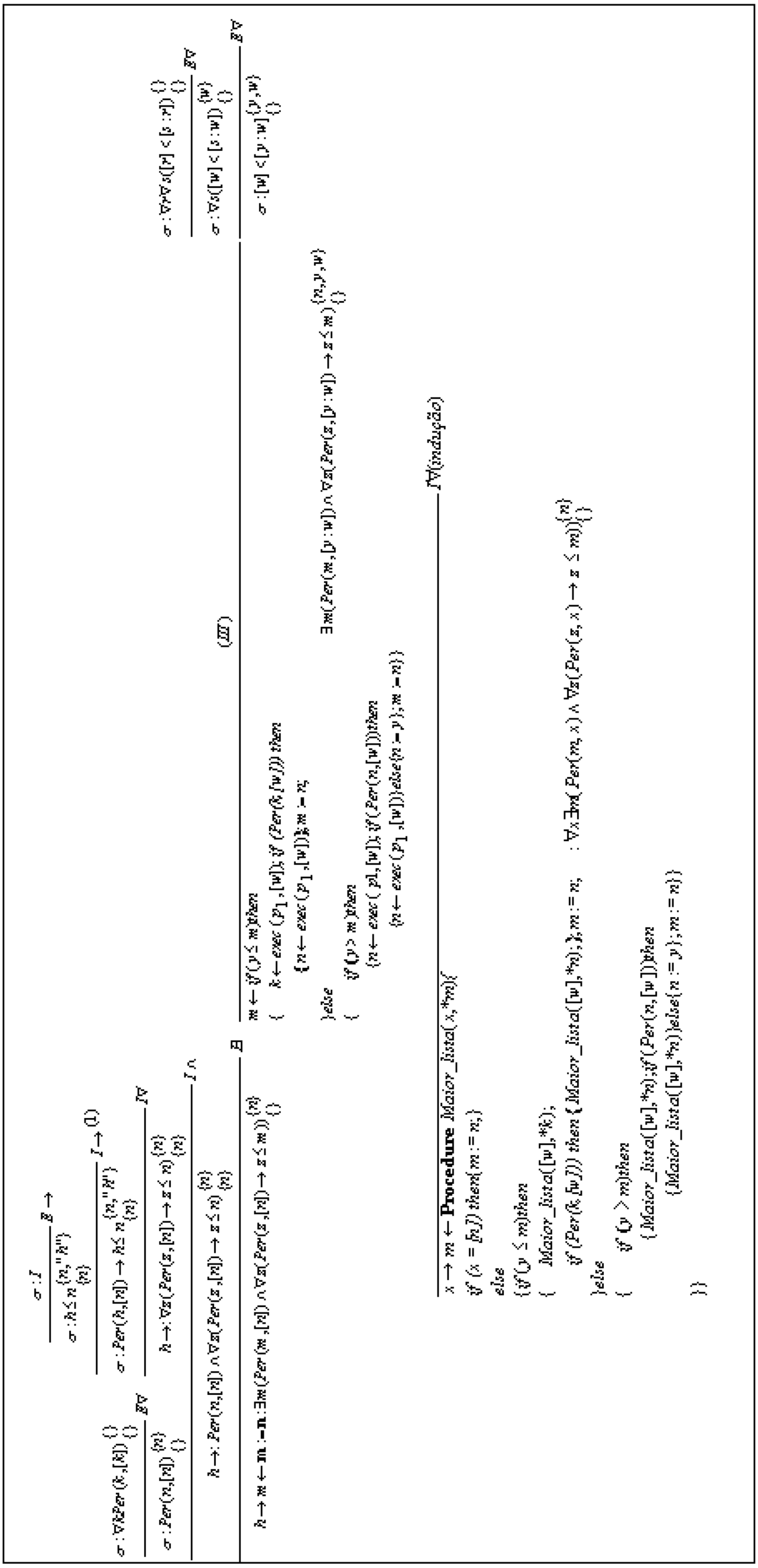
$$\dfrac{\dfrac{\sigma : [Per(k,[y:w])]^{\{n,y,w,"k"\}\,(IV-2)}_{\{n\}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\sigma : \forall u \forall v \forall r(Per(u,[v:r]) \rightarrow (Per(u,[r]) \vee u = v))^{\{\}}_{\{\}}}{\sigma : \forall v \forall r(Per(k,[v:r]) \rightarrow (Per(k,[r]) \vee k = v))^{\{"k"\}}_{\{\}}}\,E\forall}{\sigma : \forall r(Per(k,[y:r]) \rightarrow (Per(k,[r]) \vee k = y))^{\{y,"k"\}}_{\{\}}}\,E\forall}{\sigma : Per(k,[y:w]) \rightarrow (Per(k,[w]) \vee k = y)^{\{y,w,"k"\}}_{\{\}}}\,E\forall}{\sigma : Per(k,[w]) \vee (k = y)^{\{n,y,w,"k"\}}_{\{n\}}}\,E\rightarrow \quad \boxed{} \quad \dfrac{\sigma : [k = y]^{\{n,y,w,"k"\}\,(*2)}_{\{n,\}} \qquad \sigma : y \leq n^{\{y,w,"k"\}\,(*III-1)}_{\{n\}}}{\sigma : k \leq n^{\{n,y,w,"k"\}}_{\{n\}}}\,Ig}{if\ (Per(k,[w]))\ then\ \{n \leftarrow exec(p_1,[w])\} : k \leq n^{\{n,y,w,"k"\}}_{\{n\}}}\,E\vee^{(*2)}$$

Encontrar o maior elemento de uma lista. (Extração do conteúdo computacional- continuação)

(V)



Encontrar o maior elemento de uma lista. (Extração do conteúdo computacional)



Encontrar o maior elemento de uma lista. (Extração do conteúdo computacional – Substituição de rótulos)

```
Procedure   Maior_lis ta(x,*m)
{
if (x = [n]) then(m := n;)
else
{   if (y ≤ n)then
    {   Maior_list a([w],*k);
        if (Per(k, [w])) then { Maior_list a([w],*n); }m := n;
    }
    else
    {   if (y > n)then
        {  Maior_list a([w],*n);
           if (Per(n,[w]))then
           {  Maior_list a([w],*n))
           else
           {   n := y   };
           m := n
        }
    }
  }
}
Program   Maior { read(x); m := 0; Maior_list a(x,*m); write(m); }
```

Observação: Na especificação temos o maior elemento que é comparado a todo instante. Logo, temos que inicializar a variável m (m :=0).