3
Jogos em Teoria dos Jogos e em Computação

A Teoria dos Jogos pode ser entendida como a análise matemática de qualquer situação que envolva um conflito de interesses com o intuito de indicar as melhores opções (ações) que, sob determinadas restrições, conduzirão aos objetivos desejados. Apesar desta teoria ter raízes no estudo de entretenimentos, tal como o xadrez, também tem como objetivo estudos sobre conflitos e interesses bem mais sérios, como os dos campos da sociologia, economia, política e ciência militar.

Os primeiros aspectos da teoria dos jogos foram explorados pelo matemático John Von Neumann em 1928[2], mas foi em 1944 com a publicação do livro *Theory of Games and Economic Behavior* [3] de autoria de Von Neumann e Oskar Morgenstern que a teoria dos jogos passou a ser aplicada na economia.

Em 1950, o então estudante de doutorado de Princeton, John Nash, criou um dos conceitos mais importantes em teoria dos jogos, o equilíbrio de Nash[4] [5]. A intuição deste conceito é, em termos gerais, escolher a melhor ação (jogada) possível considerando que os jogadores sabem todas as ações dos outros jogadores e sabem que cada jogador vai tentar escolher a melhor ação observando o que conhece das opções dos outros. Os jogadores são racionais, ou seja, jogam para maximizar seus ganhos.

A partir dos trabalhos de Neumann, Morgenstern e Nash, a teoria dos jogos vem sendo aperfeiçoada de forma a abranger situações mais próximas da realidade e apresentando soluções matemáticas para as mesmas.

Distingue-se dentro da teoria dos jogos diversas classes de jogos[13] de acordo com o número de jogadores e com as circunstâncias do jogo, tais como: jogos estratégicos (*Strategic Games*), onde os jogadores agem ao mesmo tempo e uma única vez; jogos extensivos (Extensive Games), onde apenas um jogador joga a cada vez e ele conhece o histórico de jogadas anteriores. Desta forma, consegue-se caracterizar melhor cada classe de jogo criando-se conceitos específicos sobre o comportamento dos jogadores em cada classe.

A seguir é apresentada a definição de um jogo, Jogos Estratégicos (*Strategic Games*), e um conceito de equilíbrio de Nash, Equilíbrio de Nash de Jogos Estratégicos (*Nash Equilibrium of a Strategic Game*).

Um jogo estratégico é um modelo de tomada de decisão interativa no qual cada responsável pelas decisões escolhe sua ação uma única vez, e todos os jogadores fazem suas escolhas simultaneamente. O modelo consiste de um conjunto de jogadores J e, para cada jogador i, um conjunto A_i de ações e uma relação de preferência sobre o conjunto de tuplas de ações ($\prod_{i \in J} A_i$), na qual uma tupla de ações é definida como uma seqüência de ações $(a_i)_{i \in J}$, ou seja, uma ação para cada jogador pertencente a J. Definem-se $a_{-i} = (a_j)_{j \in J \setminus \{i\}}$ como sendo a tupla a sem a ação do jogador i e o par (a_{-i}, a_i) como sendo a tupla a.

Definição 5 *Jogos Estratégicos (Strategic Games)* $G =< J, (A_i), (\succeq_i) >$:

- *um conjunto finito J (de jogadores)*
- *para cada jogador $i \in J$, um conjunto não vazio A_i (de ações disponíveis para o jogador i)*
- *para cada jogador $i \in J$, uma relação de preferência (relação de ordem) $\succeq_i$ sobre $A = \prod_{i \in J} A_i$ (a relação de preferência do jogador i)*

Se o conjunto A_i de ações de cada jogador for finito então o jogo é *finito*.

Em diversas circunstâncias a relação de preferência $\succeq_i$ de cada jogador pode ser representada por um função de *payoff* u_i: $A \rightarrow \mathbb{N}$ (também chamada função utilidade). Assim, $u_i(a) \geq u_i(b)$ sempre que $a \succeq_i b$. Os valores da função são chamados de *payoffs* (ou utilidades). Então, o jogo será definido como $G =< J, (A_i), (u_i) >$.

Um jogo finito estratégico com dois jogadores pode ser representado convenientemente em uma tabela (figura 3.1). As linhas são as ações de um jogador e as colunas são as ações do outro jogador. Cada célula possui uma tupla de ações (l, c), onde l e c são os *payoffs* das escolhas das ações da linha l e da coluna c dos jogadores. Logo, na figura 3.1 o conjunto de ações dos jogadores das linhas e colunas são $\{T, B\}$ e $\{L, R\}$ respectivamente.

	L	**R**
T	w_1,w_2	x_1,x_2
B	y_1,y_2	z_1,z_2

Figura 3.1 - Uma representação de um jogo estratégico de dois jogadores no qual cada jogador tem duas estratégias

Definição 6 *Equilíbrio de Nash de Jogos Estratégicos (Nash Equilibrium of a Strategic Game):*

Um equilíbrio de Nash de um jogo estratégico $\mathcal{G} = < J, (A_i), (u_i) >$ *é uma tupla* $a* \in A$ *de ações com a seguinte propriedade para todo jogador* $i \in J$:

$$(a*_{-i}, a*_i) \succeq_i (a*_{-i}, a_i) \text{ para todo } a_i \in A_i$$

Note que essa definição permite a presença de nenhum, um ou mais equilíbrios em um jogo. E, ainda, não existe o conceito de qual equilíbrio é melhor do que o outro.

Exemplo 3 *O exemplo clássico para este jogo é O Dilema dos Prisioneiros (The Prisioner's Dilemma)[14]: Dois suspeitos de um crime são acusados de terem cometido um crime conjuntamente, o que de fato ocorreu. Os suspeitos foram colocados em celas separadas para interrogatório de forma que um não pode se comunicar com o outro. Para cada um deles, a polícia diz: "Se vocês dois confessarem o crime, cada um ficará seis anos na prisão. Se você confessar e seu parceiro não confessar, você ficará apenas dois anos preso por sua colaboração e o seu parceiro dez anos, pela resistência. Se ninguém confessar, ambos ficarão presos quatro anos. Portanto o melhor a fazer é confessar". A matriz abaixo representa o problema. Onde as linhas correspondem as ações do prisioneiro 1 e as colunas as ações do prisioneiro 2. A função de utilidade está representada em cada célula da matriz, onde o primeiro valor da tupla corresponde ao prisioneiro 1 e o segundo o valor ao prisioneiro 2. Neste jogo, apenas quando os dois suspeitos confessam atinge-se o equilíbrio de Nash. Lembre-se que o conceito de Nash não é necessariamente a melhor solução para um dos jogadores, mas a melhor solução dado que cada jogador vai tentar maximizar os seus ganhos e sabe que os outros também de formas individuais. Este exemplo simples, mostra que a otimização das soluções individuais nem sempre traz a otimização da solução coletiva. Se os dois suspeitos pudessem se comunicar a melhor solução seria os dois não confessarem.*

	Confessar	**Não Confessar**
Confessar	(6,6)	(2,10)
Não Confessar	(10,2)	(4,4)

Outro tipo de jogo muito utilizado em economia são os jogos extensivos. Um jogo extensivo é um modelo de tomada de decisão interativa no qual cada jogador escolhe sua ação isoladamente (a cada jogada) conhecendo as ações anteriores (histórico de jogadas). O modelo consiste de: um conjunto de jogadores J; um conjunto de históricos de ações H, onde um histórico é uma seqüência de ações $(a_k)_{k \in I}$ e $I \subseteq \mathbb{N}$; uma função P, que retorna qual é o próximo jogador dado um histórico; e, para cada jogador i, uma relação de preferência $\succeq_i$ sobre o conjunto históricos terminais Z, onde um histórico $(a_k)_{k=1...K} \in H$ é terminal se K é infinito($K = \infty$) ou não existe a_{K+1} tal que a seqüência $(a_k)_{k=1...K+1} \in H$. A seguir será apresentado a sua definição e um exemplo.

Definição 7 *Jogos Extensivos (Extensive Games):*

- um conjunto finito J (de jogadores);
- Um conjunto H de seqüências (finita ou infinita) que satisfaz três propriedades:
  - A seqüência $\oslash \in H$;
  - se $(a_k)_{k=1 \dots K} \in H$ (onde $K \in I$ e $I \subseteq \mathbb{N}$) e $\forall L < K$ então $(a_k)_{k=1 \dots L} \in H$;
  - se uma seqüência infinita $(a_k)_{k=1 \dots}$ satisfaz $(a_k)_{k=1 \dots L}$ para todo inteiro positivo L então $(a_k)_{k=1 \dots} \in H$.
- Uma função P que para cada histórico não-terminal (cada elemento de $H \backslash Z$) retorna um elemento de J (P é a função jogador, $P(h)$ retorna qual é o próximo jogador);
- Para cada jogador $i \in J$ uma relação de preferência $\succeq_i$ em Z.

Exemplo 4 *Duas pessoas (jogador 1 e jogador 2) usam o seguinte procedimento para compartilhar dois objetos idênticos e indivisíveis. Um deles, o jogador 1, propõe uma alocação, a qual o outro, jogador 2, aceita ou rejeita. Se o jogador 2 aceitar a distribuição, então os objetos são alocados da forma sugerida. Caso contrário, ambos ficarão sem nenhum dos objetos. A figura 3.2 mostra de forma gráfica o jogo, onde o histórico $\oslash$ é representado pelo estado preto, a distribuição dos dois objetos dados para o jogador 1 é representada pelo arco (2,0), a distribuição de um objeto para cada jogador é o arco (1,1) e a distribuição dos dois objetos para o jogador 2 é o arco (0,2). Os arcos nomeados por y representam que o jogador 2 aceitou a distribuição, enquanto os arcos nomeados por n representam que o jogador 2 não aceitou a distribuição. A definição do jogo é dada a seguir:*

- $J = \{1, 2\}$;
- $H = \{\oslash, (2,0), (1,1), (0,2), ((2,0), y), ((2,0), n),$
  $((1,1), y), ((1,1), n), ((0,2), y), ((0,2), n)\}$;
- $P(\oslash) = 1$ *e* $P(h) = 2$ *para todo histórico não-terminal* $h \neq \oslash$.
- $((2,0), y) \succeq_1 ((1,1), y) \succeq_1 ((0,2), y) \sim_1 ((2,0), n) \sim_1 ((1,1), n)$ $\sim_1 ((0,2), n)$ *e* $((0,2), y) \succeq_2 ((1,1), y) \succeq_2 ((2,0), y) \sim_2 ((0,2), n)$ $\sim_2 ((1,1), n) \sim_2 ((2,0), n)$.

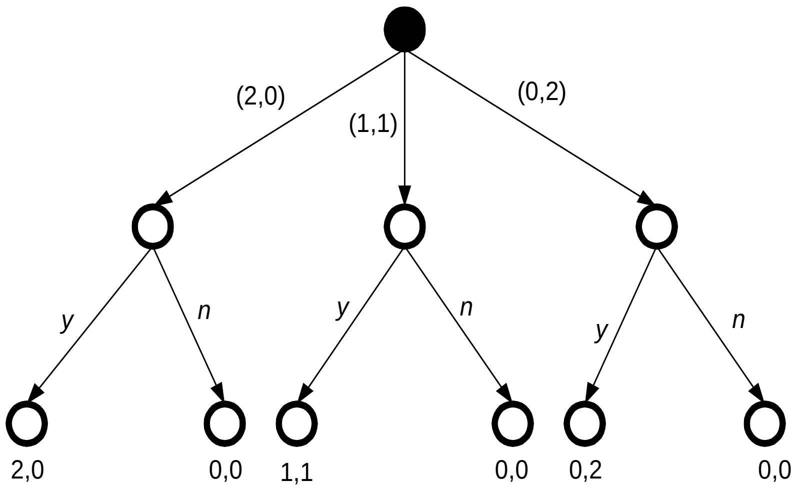

Figura 3.2 - Jogo extensivo que modela o procedimento de alocação de dois objetos idênticos e indivisíveis entre duas pessoas

Em computação, não se tem uma definição rígida do que seria um jogo, porém existem algoritmos e heurísticas para solucionarem jogos. Estas, em geral, ou utilizam métodos estatísticos para previsão de jogadas, ou utilizam o algoritmo *minimax*[21].

Jogos que utilizam métodos estatísticos para darem soluções usam uma grande quantidade de dados de jogos anteriores e tentam prever qual seria a melhor jogada a ser seguida de acordo com as jogadas utilizadas em jogos anteriores. Por exemplo, o famoso supercomputador da IBM, *Deep Blue*, que jogava xadrez contra o campeão do mundo em xadrez, Kasparov, utilizava esta técnica para decidir qual seria sua jogada. Como se sabe, o *Deep Blue* conseguiu vencer o campeão.

Jogos que utilizam algoritmo *minimax* fazem uso de uma função valoração de cada estado do jogo e um mecanismo de gerar novas jogadas a partir de um estado. O jogo parte de um estado inicial e a partir daí geram-se as possíveis próximas jogadas em vários níveis e tenta-se maximizar o ganho da jogada a ser realizado para o computador e minimizar o ganho da jogada do adversário (veja a figura 3.3). Existem diversas heurísticas utilizadas sobre o *minimax* para melhorar o seu desempenho, tal como *cortes alfa-beta*.

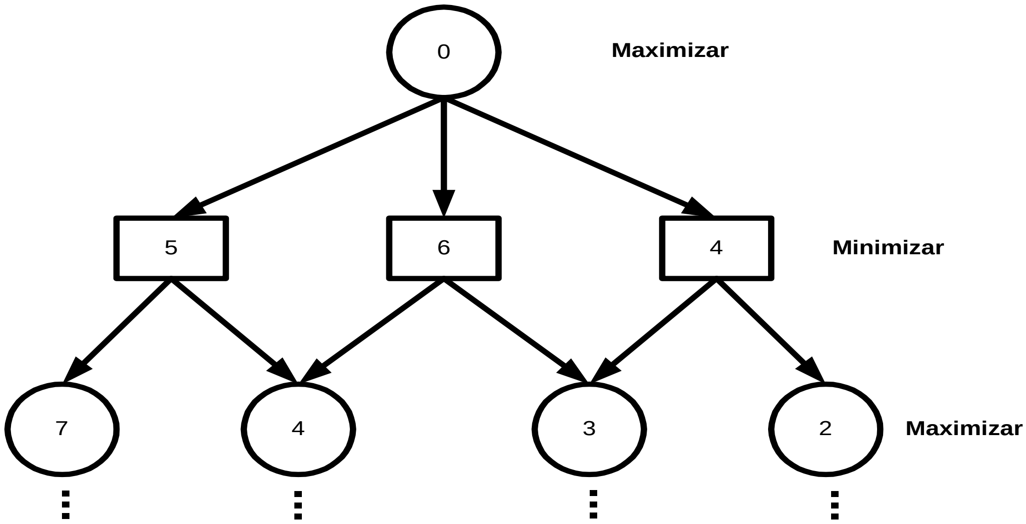

Figura 3.3 - Algoritmo *minimax*. Os estados do jogo são representados por círculos ou retângulos. Os círculos referem-se as possíveis jogadas de um computador, enquanto os retângulos a de um jogador. O valor associado a cada estado é o valor da função de valoração.