2
Modelo

Nossa economia $\mathcal{E}$ tem três períodos $t \in \{0,1,2\}$. Em $t = 0$ há um único estado da natureza, o qual denotaremos por ξ_0. Em $t = 1$ exitirá um conjunto finito, ξ_0^+, de possíveis estados. Além disso, para cada estado $\xi \in \xi_0^+$, existe um conjunto finito de sucesores imediatos, ξ^+. O conjunto dos estados da natureza na economia é denotado por S. Por conveniência de notação, vamos referir aos estados da natureza ξ que são sucessores estritos de ξ_0 como $\xi > \xi_0$. De forma geral, utilizaremos a notação $\xi \leq \mu$ para referir ao estado da natureza μ como um sucessor do estado ξ.

Para cada $\xi \in S$, existe um conjunto finito e ordenado, L, de bens, em oferta estritamente positiva, disponíveis para troca e consumo. Os bens de consumo podem ser duráveis. Assim, dada uma cesta x_ξ no estado ξ, $Y_\mu x_\xi$ vai denotar o vetor de bens restantes no estado $\mu \in \xi^+$. Por simplicidade, vamos supor que a estrutura de depreciação é dada por matrizes Y_μ com coordenadas não negativas, onde $\mu \in S \setminus \{\xi_0\}$. Os preços dos bens serão denotados por $p = (p_\xi)_{\xi \in S} \in \mathbb{R}_+^{L \times S}$.

Existe um conjunto finito de agentes, H. Cada agente $h \in H$ tem preferências definidas no espaco de consumo $X = \mathbb{R}_+^{L \times S}$, as quais são representadas por uma função utilidade $u^h : X \to \mathbb{R}_+$. As dotações inicias de cada agente são $w^h = (w_\xi^h)_{\xi \in S} \in X$. As alocações de consumo escolhidas pelo agente h serão denotadas por $x^h = (x_\xi^h)_{\xi \in S} \in X$.

Para implementar transferências de renda intertemporais, os agentes terão acesso a contratos de dívida, chamados *primitivos*, que permitirão a obtenção de recursos para a compra de bens, em troca de uma promessa de pagamentos futuros. Esses contratos estarão sujeitos a risco de *default* e de pré-pagamento.

Por outro lado, as promesas individuais serão securitizadas em derivativos financeiros, os quais farão pagamentos proporcionais aos fluxos de riqueza gerados pelos devedores. Assim, um agente também poderá investir hoje, com o intuito de obter um fluxo financeiro futuro.

Mais formalmente, existe para cada $\xi \in \{\xi_0\} \cup \xi_0^+$ um conjunto $J(\xi)$ de ativos *primitivos* que os agentes podem vender a descoberto. Quando um agente vende uma unidade do *primitivo* $j \in J(\xi_0)$ ele recebe uma quantidade $q_{\xi_0,j}$ em $t = 0$, em troca da promessa de amortização futura do principal da dívida e do pagamento, em cada estado da natureza $\xi > \xi_0$ de dividendos reais, os quais são dados por cestas $A_{\xi,j} \in \mathbb{R}^L_+$. Supomos que nos estados da natureza $\xi \in \xi_0^+$ esse agente promete amortizar uma fração $\lambda_{\xi,j} \in [0,1]$ do principal, pagando o remanescente, $(1 - \lambda_{\xi,j})\, q_{\xi_0,j}$, em cada $\mu \in \xi^+$.

Os devedores poderão cometer *default*, isto é, incorrer no não cumprimento das promesas feitas. Para proteger os investidores desse risco, serão requeridas, no momento da emissão dos *primitivos*, garantias contratuais reais. Assim, cada agente que vende um ativo $j \in J(\xi_0)$ terá de constituir uma cesta de *collateral* $C_j \in \mathbb{R}^L_+$, a qual deverá manter em sua posse no decorrer da duração do contrato. Em caso de não cumprimento futuro das obrigações financeiras, o agente é obrigado a entregar o *collateral*.

O agente h que vende $\varphi^h_{\xi_0,j}$ unidades do ativo j não pode no período subsequente aumentar essa posição vendida, pois não haverá novas emissões dos ativos de $J(\xi_0)$ em $t = 1$. Contudo, em cada $\xi \in \xi_0^+$, o agente pode manter sua posição no ativo j ou reduzi-la, através do *default* ou do pré-pagamento. Assim, se o agente mantém $\varphi^h_{\xi,j} \leq \varphi^h_{\xi_0,j}$ unidades da dívida original no estado ξ, ele vai pagar uma quantidade

$$\delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) := \varphi^h_{\xi,j}\,(p_\xi A_{\xi,j} + \lambda_{\xi,j} q_{\xi_0,j}) + \left(\varphi^h_{\xi_0,j} - \varphi^h_{\xi,j}\right) \min\left\{p_\xi Y_\xi C_j;\, q_{\xi_0,j} + p_\xi A_{\xi,j}\right\},$$

isto é, o agente vai pagar os dividendos reais e amortizar o principal das $\varphi^h_{\xi,j}$ unidades do ativo j que mantém na carteira e, associado às unidades remanescentes, $\varphi^h_{\xi_0,j} - \varphi^h_{\xi,j}$, esse agente vai pagar ou o valor do principal total mais o valor dos dividendos de $t = 1$, caracterizando o pré-pagamento, ou o valor do *collateral* depreciado, dando, assim, *default*. Iremos supor que as preferências individuais são estritamente monotônicas e, portanto, o agente sempre preferirá pagar a menor quantidade possível para reduzir a dívida prometida. Como ele sabe que o único mecanismo de forçar o pagamento é dado pela tomada do *collateral*, vai sempre dar *default* quando o pré-pagamento for mais dispendioso. Além disso, para superar uma dificuldade técnica na demonstração de existência de equilíbrio para a nossa economia, iremos supor também que os cada agente $h \in H$ tem, para cada $j \in J(\xi_0)$, de manter no mínimo uma fração $\tau \in (0;1)$ de sua posição vendida inicial no ativo j, $\varphi^h_{\xi_0,j}$. Apesar de essa hipotese eliminar a possibilidade de os agentes não poderem pré-pagar ou dar *default* em toda sua posição vendida em cada ativo $j \in J(\xi_0)$, nós ressaltamos que podemos escolher τ de modo que o agente possa reduzir quase toda sua posição vendida.

Nos estados $\mu \in \xi^+$, esse agente não pode mais pré-pagar a dívida, mas ainda pode dar *default* nas promessas. Novamente devido à estrita monotonicidade das preferências o agente h irá no estado μ pagar uma quantidade

$$\delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) := \varphi^h_{\xi,j} \min \{p_\mu Y_\mu Y_\xi C_j;\, p_\mu A_{\mu,j} + (1 - \lambda_{\xi,j}) q_{\xi_0,j}\}.$$

Análogo ao que ocorre em $t = 0$, o agente que no estado $\xi \in \xi_0^+$ vende uma unidade do ativo $j \in J(\xi)$ recebe um fluxo de $q_{\xi,j}$, promete pagar dividendos reais contingentes a cada estado $\mu \in \xi^+$, $A_{\mu,j} \in \mathbb{R}^L_+$, mas promete amortizar a dívida completamente em $t = 2$. Além disso, como esse contrato de dívida também está sujeito a *default*, esse agente deve constituir como *collateral* uma cesta $C_j \in \mathbb{R}^L_+$. Porque haverá apenas um período na nossa economia após a emissão desses *primitivos*, esses contratos não estão sujeitos ao risco de pré-pagamento. Assim, se em $\xi \in \xi_0^+$ o agente h vende $\varphi^h_{\xi,j}$ unidades do ativo $j \in J(\xi)$, pela estrita monotonicidade de suas preferências, deverá pagar em cada $\mu \in \xi^+$

$$\delta_{\mu,j}(p, q_{\xi,j}, \varphi^h_{\xi,j}) := \varphi^h_{\xi,j} \min \{p_\mu Y_\mu C_j;\, p_\mu A_{\mu,j} + q_{\xi,j}\}.$$

Para simplificar a notação, considere $q_\xi = (q_{\xi,j})_{j \in J(\xi)}$, o vetor de preços dos ativos *primitivos*. As posições do agente $h \in H$ nesses ativos serão denotadas por $\varphi^h = \left((\varphi^h_{\xi_0,j})_{j \in J(\xi_0)},\, (\varphi^h_{\xi,j})_{j \in J(\xi_0) \cup J(\xi),\, \xi \in \xi_0^+}\right)$.

Em cada estado da natureza $\xi \in \xi_0 \cup \xi_0^+$ é emitido também um conjunto finito de *derivativos*, $S(\xi)$, os quais estão protegidos pelas promesas originais feitas nos ativos em $J(\xi)$. Por simplicidade, vamos supor que cada *derivativo* $s \in S(\xi)$ é securitizado pelas promessas feitas pelos *primitivos* em um conjunto $\mathbb{A}_s \subset J(\xi)$, em que $\mathbb{A}_s \cap \mathbb{A}_{s'} = \emptyset$, quando $s \neq s'$. Cada *derivativo* $s \in S(\xi)$ pode ser comprado por um preço unitario $\pi_{\xi,s}$ em ξ. Os investidores vão tomar como dados os *dividendos* nominais $K_{\mu,s} \in \mathbb{R}_+$ que cada ativo $s \in S(\xi)$ faz em cada estado da natureza $\mu > \xi$. Embora emitidos somente em ξ_0, os *derivativos* em $S(\xi_0)$ podem ser negociados em cada estado $\xi \in \xi_0^+$ por um preço $\pi_{\xi,s}$. Seja $\pi = \left((\pi_{\xi_0,s})_{s \in S(\xi_0)},\, (\pi_{\xi,s})_{s \in S(\xi_0) \cup S(\xi),\, \xi \in \xi_0^+}\right)$ o vetor de preços dos *derivativos* e $K = \left((K_{\mu,s})_{s \in S(\xi),\, \xi \in \{\xi_0\} \cup \xi_0^+,\, \mu > \xi}\right)$ o vetor de dividendos nominais unitários. Escrevemos $\theta^h_{\mu,s}$ para denotar a posição comprada do agente $h \in H$ no estado $\mu \geq \xi$, $\mu \in \{\xi_0\} \cup \xi_0^+$, no *derivativo* $s \in S(\xi)$. O vetor de posições financeiras do agente $h \in H$ nos *derivativos* é denotado por $\theta^h = \left((\theta^h_{\xi_0,s})_{s \in S(\xi_0)},\, (\theta^h_{\xi,s})_{s \in S(\xi_0) \cup S(\xi),\, \xi \in \xi_0^+}\right)$.

Desse modo, dados os preços dos bens, p, dos *primitivos*, q, dos *derivati-*

vos, π, e dividendos, K, cada agente $h \in H$ vai escolher alocações de consumo não-negativas $x^h \geq 0$ e posições financeiras não-negativas $(\theta^h, \varphi^h) \geq 0$ tais que, no estado ξ_0,

$$p_{\xi_0} x^h_{\xi_0} + \sum_{s \in S(\xi_0)} \pi_{\xi_0,s} \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j \in J(\xi_0)} q_{\xi_0,j} \varphi^h_{\xi_0,j} \leq p_{\xi_0} w^h_{\xi_0}; \tag{2-1}$$

em cada estado $\xi \in \xi_0^+$,

$$p_\xi x^h_\xi + \sum_{s \in S(\xi_0) \cup S(\xi)} \pi_{\xi,s}\, \theta^h_{\xi,s} - \sum_{j \in J(\xi)} q_{\xi,j} \varphi^h_{\xi,j} \leq p_\xi \left(w^h_\xi + Y_\xi x^h_{\xi_0} \right) + \sum_{s \in S(\xi_0)} \left(K_{\xi,s} + \pi_{\xi,s} \right) \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j \in J(\xi_0)} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}); \tag{2-2}$$

dado $\xi \in \xi_0^+$, para cada $\mu > \xi$,

$$p_\mu x^h_\mu + \sum_{j \in J(\xi_0)} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) + \sum_{j \in J(\xi)} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \leq p_\mu \left(w^h_\mu + Y_\mu x^h_\xi \right) + \sum_{s \in S(\xi_0) \cup S(\xi)} K_{\mu,s} \theta^h_{\xi,s}; \tag{2-3}$$

além das seguintes restricões de *collateral*, de acesso ao mercado de credito.

$$\left(x^h_{\xi_0},\, x^h_\xi,\, \varphi^h_{\xi_0,j'} \right) \geq \left(\sum_{j \in J(\xi_0)} C_j\, \varphi^h_{\xi_0,j},\ Y_\xi \sum_{j \in J(\xi_0)} C_j\, \varphi^h_{\xi,j} + \sum_{j \in J(\xi)} C_j\, \varphi^h_{\xi,j},\ \varphi^h_{\xi,j'} \right) \tag{2-4}$$

para cada par $(\xi,\, j') \in \xi_0^+ \times J(\xi_0)$, e da restrição de redução de dívida.

$$\varphi^h_{\xi,j} \geq \tau \varphi^h_{\xi_0,j} \tag{2-5}$$

para cada $j \in J(\xi_0)$, para cada $\xi \in \xi_0$ e para $\tau \in (0;1)$. Assim, fixados preços (p, q, π) e dividendos K, cada consumidor tem por objetivo maximizar a função $u^h(\cdot)$, fazendo escolhas $(x^h, \theta^h, \varphi^h)$ no conjunto de alocações não-negativas, $B^h(p, q, \pi, K)$, que satisfazem as restrições financeiras e orçamentárias (condições (1)-(4) acima).

Definição 1. Um equilibrio para a economia $\mathcal{E}$ é dado por um vetor de preços $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\pi})$, pagamentos nominais $\overline{K}$ e alocações individuais, $(\overline{x}^h, \overline{\theta}^h, \overline{\varphi}^h)_{h \in H}$ tais que,

A. Cada agente $h \in H$ faz uma escolha ótima. Isto é,

$$(\overline{x}^h, \overline{\theta}^h, \overline{\varphi}^h) \in \text{argmax}\, \{ u^h(x^h) :\, (x^h, \theta^h, \varphi^h) \in B^h(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\pi}, \overline{K}) \}.$$

B. A oferta é igual a demanda nos mercados de bens,

$$\begin{aligned} \sum_{h \in H} \overline{x}^h_{\xi_0} &= \sum_{h \in H} w^h_{\xi_0}; \\ \sum_{h \in H} \overline{x}^h_\xi &= \sum_{h \in H} \left(w^h_\xi + Y_\xi \overline{x}^h_{\xi^-} \right), \quad \forall \xi > \xi_0; \end{aligned}$$

em que, dado $\xi \in S \setminus \{\xi_0\}$, ξ^- denota o único estado da natureza tal que $\xi \in (\xi^-)^+$.

C. Em cada estado $\xi \in \{\xi_0\} \cup \xi_0^+$, o investimento agregado em cada *derivativo* $s \in S(\xi)$ iguala o valor das vendas dos *primitivos* em $\mathbb{A}_s \subset J(\xi)$,

$$\overline{\pi}_{\xi,s} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_{\xi,s} \;\; = \;\; \sum_{h \in H} \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \overline{q}_{\xi,j} \overline{\varphi}^h_{\xi,j}.$$

D. Em cada estado da natureza $\xi \in \xi_0^+$ a demanda total por cada *derivativo* $s \in S(\xi_0)$ iguala a quantidade total emitida em ξ_0,

$$\sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_{\xi,s} = \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_{\xi_0,s}.$$

E. Em cada estado da natureza, os pagamentos feitos pelos *primitivos* em uma classe $\mathbb{A}_s$ igualam as entregas feitas pelo *derivativo* associado,

$$\begin{aligned}
\overline{K}_{\xi,s} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_{\xi_0,s} &= \sum_{h \in H} \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(\overline{p}, \overline{q}_{\xi_0,j}, \overline{\varphi}^h_{\xi_0,j}, \overline{\varphi}^h_{\xi,j}), \quad \forall \xi \in \xi_0^+,\, \forall s \in S(\xi_0); \\
\overline{K}_{\mu,s} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_{\xi,s} &= \sum_{h \in H} \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(\overline{p}, \overline{q}_{\xi_0,j}, \overline{\varphi}^h_{\xi,j}), \quad \forall \xi \in \xi_0^+,\, \forall \mu \in \xi^+,\, \forall s \in S(\xi_0); \\
\overline{K}_{\mu,s} \sum_{h \in H} \overline{\theta}^h_{\xi,s} &= \sum_{h \in H} \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(\overline{p}, \overline{q}_{\xi,j}, \overline{\varphi}^h_{\xi,j}), \quad \forall \xi \in \xi_0^+,\, \forall \mu \in \xi^+,\, \forall s \in S(\xi).
\end{aligned}$$

Dados preços (p, q, π), uma classe de *primitivos* $\mathbb{A}_s \subset J(\xi_0)$, $s \in S(\xi_0)$ é dita *não-trivial* se faz pagamentos positivos em pelo menos um estado da natureza futuro. Isto é,

$$\exists \xi \in \xi_0^+ : \min_{j \in \mathbb{A}_s} \{p_\xi A_{\xi,j} + \lambda_{\xi,j} q_{\xi_0,j}; p_\xi Y_\xi C_j\} > 0,$$

ou existe um estado $\mu \in \xi^+$, onde $\xi \in \xi_0^+$, tal que $\min_{j \in \mathbb{A}_s} \{p_\mu A_{\mu,j} + (1 - \lambda_{\xi,j}) q_{\xi_0,j}; p_\mu Y_\mu Y_\xi C_j\} > 0$. Analogamente, dado um nó $\xi \in \xi_0^+$, a classe $\mathbb{A}_s \subset J(\xi)$ é dita *não-trivial* se

$$\min_{j \in \mathbb{A}_s} \{p_\mu A_{\mu,j} + q_{\xi,j}; p_\mu Y_\mu C_j\} > 0,$$

para algum estado da natureza $\mu \in \xi^+$.

Definição 2. Um equilibrio $\left[(\overline{p}, \overline{q}, \overline{\pi}), \overline{K}, (\overline{x}^h, \overline{\theta}^h, \overline{\varphi}^h)_{h \in H}\right]$ é dito *não-trivial* se as seguintes condições são satisfeitas,

- Dado $s \in S(\xi_0)$, se $\mathbb{A}_s \subset J(\xi_0)$ é *não-trivial*, então existe um *primitivo* $j \in \mathbb{A}_s$ com preço estritamente positivo, $\overline{q}_{\xi,j} > 0$, e

$$\left(\exists \xi \in \xi_0^+ : \overline{K}_{\xi,s} + \overline{\pi}_{\xi,s} > 0\right) \vee \left(\exists \xi \in \xi_0^+, \exists \mu \in \xi^+ : \overline{K}_{\mu,s} > 0\right).$$

- Dado $\xi \in \xi_0^+$ e $s \in S(\xi)$, se $\mathbb{A}_s \subset J(\xi)$ é *não-trivial*, então existe $j \in \mathbb{A}_s$ tal que $\overline{q}_{\xi,j} > 0$. Mais ainda, $\overline{K}_{\mu,s} > 0$ em algum estado $\mu > \xi$.