Referências Bibliográficas

[1] Araújo, A., M. Páscoa e J.P. Torres-Martinez (2002): “Collateral avoids Ponzi schemes in Incomplete markets”, *Econometrica*, 70, 1613-1638.

[2] Border, K. (1985): *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press.

[3] Dubey, Pr., J. Geanakoplos and M. Shubik (2001): “Default and Punishment in General Equilibrium”, Working Paper No.01-07, New-York University.

[4] Geanakoplos, J. and W.R. Zame (2002): “Default, Collateral and Derivates”, Yale University, Mimeo.

[5] Steinert, M. e J.P. Torres-Martínez (2005): “General equilibrium existence with asset-backed securitization”, Textos para discussão 490, Departamento de Economia PUC-Rio.

[6] Tavakoli, J.M. (2003): *Collateralized Debt Obligations & Structured Finance*, Wiley Finance, John Wiley & Sons.

[7] Zame, W. (1993): “Efficiency and the Role of Default when Security markets are incomplete”, *American Economic Review*, 83, 1142-1164.

Apêndice. Prova da Existência de Equilibrio.

Prova. Primeiro, vamos restringir o espaço de preços. Em ξ_0, consideraremos vetores de preços $(p_{\xi_0}, q_{\xi_0}, (\pi_{\xi_0,s})_{s\in S(\xi_0)})$ que pertencem ao conjunto compacto:

$$\vartheta_{\xi_0} = \{(p_{\xi_0}, q_{\xi_0}, (\pi_{\xi_0,s})_{s\in S(\xi_0)}) \in \mathbb{R}^L_+ \times [0,1]^{J(\xi_0)} \times \mathbb{R}^{S(\xi_0)}_+ \ : (p_{\xi_0}, (\pi_{\xi_0,s})_{s\in S(\xi_0)}) \in \Delta_+^{\#L+\#S(\xi_0)-1}, \pi_{\xi_0,s} \leq \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j}, \forall s \in S(\xi_0)\}$$

Em $t = 1$, consideraremos para cada $\xi \in \xi_0^+$ vetores de preços $(p_\xi, q_\xi, (\pi_{\xi,s})_{s\in S(\xi_0)\cup S(\xi)})$ que estão no conjunto compacto:

$$\vartheta_\xi = \{(p_\xi, q_\xi, (\pi_{\xi,s})_{s\in S(\xi_0)\cup S(\xi)}) \in \mathbb{R}^L_+ \times [0,1]^{J(\xi)} \times \mathbb{R}^{S(\xi)\cup S(\xi_0)}_+ : (p_\xi, (\pi_{\xi,s})_{s\in S(\xi_0)\cup S(\xi)}) \in \Delta_+^{\#L+\#(S(\xi)\cup S(\xi_0))-1}, \pi_{\xi,s} \leq \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi,j}, \forall s \in S(\xi)\}$$

Finalmente, fixado $\xi \in \xi_0^+$, consideraremos, para cada $\mu \in \xi^+$, vetores de preços $p_\mu \in \Delta_+^{\#L-1}$.

Observe que, se as alocações individuais satisfazem as condições de *market clearing* no mercado de bens, então $x^h_{\xi_0,\ell} \leq W_{s_0,\ell}$ (em que, para cada $\xi \in S$, $W_\xi := \sum_H w^h_\xi$; $x^h_{\xi_0,\ell}$ e $W_{s_0,\ell}$ denotam a ℓ-ésima coordenada, respectivamente, do vetor $x^h_{\xi_0}$ e do vetor W_{s_0}) para todo agente h e para todo bem ℓ. Além disso, se as restrições orçamentárias estão satisfeitas, temos que $x^h_{\xi_0,\ell} \geq \sum_{J(\xi_0)} \varphi^h_{\xi_0,j} C_{j,\ell}$ e, portanto, $\varphi^h_{\xi_0,j} \leq \sum_{\ell\in L} \frac{W_{\xi_0,\ell}}{\sum_{\ell\in L} C_{j,\ell}}$. Argumentos similares mostram que, para todo agente h, as vendas de *primitivos* também estão limitadas em cada $\xi \in \xi_0^+$, bem como a compra de bens em qualquer estado da natureza $\xi \in S \setminus \{\xi_0\}$, desde que a restrição orçamentária e as condições de *market clearing* no mercado de bens estejam válidas.

Para posteriormente restringirmos o espaço de escolha de cada agente, definimos Υ_M como o espaço das alocações não-negativas (x, θ, φ) que satisfazem:

$$\|x\|_\infty \leq M_1;$$

$$\|\varphi\|_\infty \leq 2\Omega;$$

$$\|\theta\|_\infty \leq 2(\#H)\Omega;$$

em que Ω é um limite superior às vendas a descoberto quando as condições de *market-clearing* no mercado de bens e as restrições orçamentárias estão satisfeitas e M_1 é uma coordenada do vetor $M \in \ \zeta := \{(M_1, M_2, M_3) \in \mathbb{R}^3_{++} : M_1 < M_2; M_1 < M_3\}$.

Vamos também restringir o espaço de pagamentos nominais, de modo que, $\forall s \in S(\xi_0)$, $\forall \xi \in \xi_0^+$, $\forall \mu \in \xi^+$ e $\forall M \in \zeta$ tenhamos $K_{\xi,s} \in [\beta^{\xi}_{M,s}, \omega]$ e $K_{\mu,s} \in [\beta^{\mu}_{M,s}, \omega]$, em que

$$\beta^{\xi}_{M,s} = \begin{cases} \frac{1}{M_1}, & \text{caso } \min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[\|A_{\xi,j}\|_1, \|Y_\xi C_j\|_1] > 0; \\ \frac{1}{M_2}, & \text{caso } \min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[\|A_{\xi,j}\|_1, \|Y_\xi C_j\|_1] = 0. \end{cases}$$

$$\beta^{\mu}_{M,s} = \begin{cases} \frac{1}{M_1}, & \text{caso } \min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[\|A_{\mu,j}\|_1, \|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1] > 0; \\ \frac{1}{M_3}, & \text{caso } \min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[\|A_{\mu,j}\|_1, \|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1] = 0. \end{cases}$$

e

$$\omega := \max_{j \in J(\xi), \xi \in \{\xi_0\} \cup \xi_0^+, \mu \in S \setminus \{\xi_0\}} (1 + \|A_{\mu,j}\|_1) \# J(\xi)$$

Analogamente, $\forall s \in S(\xi)$, $\forall \mu \in \xi^+$, $\forall \xi \in \xi_0^+$ e $\forall M \in \zeta$, consideraremos $K_{\mu,s} \in [\beta^{\mu}_{M,s}, \omega]$, em que:

$$\beta^{\mu}_{M,s} = \begin{cases} \frac{1}{M_1}, & \text{caso } \min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[\|A_{\mu,j}\|_1, \|Y_\mu C_j\|_1] > 0; \\ \frac{1}{M_3}, & \text{caso } \min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[\|A_{\mu,j}\|_1, \|Y_\mu C_j\|_1] = 0. \end{cases}$$

Agora, considere os conjuntos:

$$\begin{aligned} &\Delta_M := \vartheta_{\xi_0} \times (\vartheta_\xi \times \prod_{\mu \in \xi^+} \Delta_+^{\# L-1})_{\xi \in \xi_0^+} \\ &K_M := ([\beta^{\xi}_{M,s}, \omega])_{\xi \in S \setminus \{\xi_0\}, s \in S(\xi_0)} \times ([\beta^{\mu}_{M,s}, W])_{\mu \in \xi^+, s \in S(\xi), \xi \in \xi_0^+} \\ &\Psi_M := \Delta_M \times K_M \times (\Upsilon_M)^{\# H} \end{aligned}$$

Vamos definir as seguintes correspondências:

1. $\psi^{\xi,s}_M : \Psi_M \rightarrow [\beta^{\xi}_{M,s}, \omega]$,

   em que, para cada $\xi \in \xi_0^+$ e para cada $s \in S(\xi_0)$:

$$\psi^{\xi,s}_M(u) = \arg max_{K_{\xi,s} \in [\beta^{\xi}_{M,s}, \omega]} - \Big\{ \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} K_{\xi,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \Big\}^2,$$

$u \in \Psi_M$.

2. $\psi_M^{\mu,s} : \Psi_M \to [\beta^{\mu}_{M,s}, \omega]$, em que, para cada $\mu \in \xi^+$, para cada $\xi \in \xi_0^+$ e para cada $s \in S(\xi_0)$:

$$\psi_M^{\mu,s}(u) = \arg max_{K_{\mu,s} \in [\beta^{\mu}_{M,s}, \omega]} - \{\sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j})\}^2,$$

$u \in \Psi_M$.

3. $\psi_M^{\mu,s} : \Psi_M \to [\beta^{\mu}_{M,s}, \omega]$, em que, para cada $\mu \in \xi^+$, para cada $s \in S(\xi)$ e para cada $\xi \in \xi_0^+$:

$$\psi_M^{\mu,s}(u) = \arg max_{K_{\mu s} \in [\beta^{\mu}_{M,s}, \omega]} - \{\sum_H \ \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi,j}, \varphi^h_{\xi,j})\}^2,$$

$u \in \Psi_M$.

4. $\psi_M^h : \Psi_M \to \Upsilon_M$, em que, para cada agente $h \in H$:

$$\psi_M^h(u) = \{\arg max u^h(x) : (x, \theta, \varphi) \in B^h(p, q, \pi, K) \cap \Upsilon_M\},$$

$u \in \Psi_M$.

5. $\psi_M^{\xi_0} : \Psi_M \to \vartheta_{\xi_0}$, em que:

$$\psi_M^{\xi_0}(u) = \arg max_{\eta \in \vartheta_{\xi_0}} \left\{ p_{\xi_0} \left(\sum_H x^h_{\xi_0} - W_{\xi_0} \right) + \sum_{s \in S(\xi_0)} \left(\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j} \right) \right\},$$

$u \in \Psi_M$ e $\eta = (p_{\xi_0}, q_{\xi_0}, (\pi_{\xi_0,s})_{s \in S(\xi_0)})$.

6. $\psi_M^{\xi} : \Psi_M \to \vartheta_{\xi}$, em que, para cada $\xi \in \xi_0^+$:

$$\psi_M^{\xi}(u) = \arg max_{\eta \in \vartheta_\xi} \left\{ p_\xi \sum_H (x_\xi^h - W_\xi - Y_\xi W_{\xi_0}) + \sum_{s \in S(\xi)} \left(\pi_{\xi,s} \sum_H \theta_{\xi,s}^h - \right.\right.$$

$$\left.\left. \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi,j} \sum_H \varphi_{\xi,j}^h \right) + \sum_{s \in S(\xi_0)} \pi_{\xi,s} \sum_H \left(\theta_{\xi,s}^h - \theta_{\xi_0,s}^h \right) \right\},$$

$u \in \Psi_M$ e $\eta = (p_\xi, q_\xi, (\pi_{\xi,s})_{s \in S(\xi_0) \cup S(\xi)})$.

7. $\psi_M^{\mu} : \Psi_M \to \Delta_+^{\#L-1}$, em que, para cada $\mu \in \xi^+$, fixado $\xi \in \xi_0^+$:

$$\psi_M^{\mu}(u) = \arg \max_{p_\mu \in \Delta_+^{\#L-1}} p_\mu (\sum_{h \in H} x_\mu^h - Y_\mu Y_\xi W_{\xi_0} - Y_\mu W_\xi - W_\mu),$$

$u \in \Psi_M$.

Pelo teorema do máximo, essas correspondências tomam valores compactos, convexos, diferentes de vazio e são semi-contínuas superior. Para verificar que as hipóteses de tal teorema estão satisfeitas, a única dificuldade é provar a semi-continuidade inferior da restrição orçamentária truncada dos agentes. A prova é padrão na literatura de equilíbrio geral, mas como agora temos para cada agente $h \in H$, cada estado $\xi \in \xi_0^+$ e cada *primitivo* $j \in J(\xi_0)$, a restrição $\tau\varphi_{\xi_0,j}^h \leq \varphi_{\xi,j}^h \leq \varphi_{\xi_0,j}^h$, provar que o interior da restrição orçamentária é diferente de vazio requer cuidado. Primeiro, observe que como as dotações de cada bem em ξ_0 e em cada $\xi \in \xi_0^+$ são estritamente positivas, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon \# J(\xi_0) \max_{\{\xi \in \xi_0^+; j \in J(\xi_0); \ell \in L\}} [(Y_\xi C_j)_\ell; C_{j,\ell}] \leq \min_{\{h \in H; \ell \in L; \xi \in \{\xi_0\} \cup \xi_0^+\}} w_{\xi,\ell}^h.$$

Logo, todo agente tem como emitir uma quantidade ε de cada um dos primitivos $j \in J(\xi_0)$ e dar *default* no período seguinte em uma fração $\tau^* > \tau$ entregando o *collateral*. Dessa maneira, em cada $\xi \in \xi_0^+$, todo agente h pode escolher $\varphi_{\xi,j}^h$ no intervalo aberto $(\tau\varepsilon; \varepsilon)$, para cada $j \in J(\xi_0)$.

Assim, definindo a correspondência $\psi_M : \Psi_M \to \Psi_M$ via:

$$\psi_M = (\psi_M^{\mu,s})_{\mu > \xi, s \in S(\xi), \xi \in \{\xi_0\} \cup \xi_0^+} \times (\psi_M^h)_{h \in H} \times (\psi_M^{\xi})_{\xi \in S},$$

temos que, pelo teorema Kakutani, essa correspondência possui um ponto fixo.

Definição Dado $M \in \xi$, um equilíbrio para a economia truncada é um ponto fixo de ψ_M que satisfaz:

1. $\sum_H x^h_{\xi_0,} = W_{\xi_0}$
2. $\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} = \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}$, $\forall s \in S(\xi_0)$
3. $\sum_H x^h_{\xi,\ell} - W_{\xi,\ell} - (Y_\xi W_{\xi_0})_\ell \leq \Theta$, $\forall \ell \in L$, $\forall \xi \in \xi_0^+$
4. $\sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_H \varphi^h_{\xi,j} \leq \Theta$, $\forall j \in \mathbb{A}_s$, $\forall s \in S(\xi)$, $\forall \xi \in \xi_0^+$
5. $\sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} \leq \Theta$, $\forall s \in S(\xi_0), \forall \xi \in \xi_0^+$
6. $\sum_H x^h_{\mu,\ell} - (Y_\mu Y_\xi W_{\xi_0})_\ell - (Y_\mu W_\xi)_\ell - W_{\mu,\ell}$
   $\leq 4\Omega \max_{\xi\in\{\xi_0\}\cup\xi_0^+} \#S(\xi)(\#H)^2\omega$, $\forall \ell \in L, \forall \mu \in \xi^+, \forall \xi \in \xi_0^+$,

em que $\Theta := 2\Omega\#S(\xi_0)(\#H)^2\omega$

Lema Existe um equilíbrio para a economia truncada para todo M com coordenada M_1 suficientemente grande.

Prova. Como as restrições orçamentárias estão satisfeitas para todo equilíbrio da economia truncada, temos:

$$p_{\xi_0}(\sum_H x^h_{\xi_0} - W_{\xi_0}) + \sum_{s\in S(\xi_0)} (\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}) \leq 0.$$

Mas estamos num ponto fixo de $\psi^{\xi_0}_M$. Assim: $\sum_H x^h_{\xi_0,\ell} \leq W_{\xi_0,\ell}$, $\forall \ell \in L$ e $\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} \leq \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}$, $\forall j \in \mathbb{A}_s$, $\forall s \in S(\xi_0)$.

Com isso, escolhendo $M_1 > \max_{\ell\in L} W_{\xi_0,\ell}$, se

$$p_{\xi_0}(\sum_H x^h_{\xi_0} - W_{\xi_0}) + \sum_{s\in S(\xi_0)} (\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}) < 0,$$

então, algum agente tem de estar consumindo no interior da restrição orçamentária, o que, pela estrita monotonicidade das preferências, não é ótimo para tal M_1. Portanto:

$$p_{\xi_0}(\sum_H x^h_{\xi_0} - W_{\xi_0}) + \sum_{s\in S(\xi_0)} (\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}) = 0$$

Dessa maneira, dado $s \in S(\xi_0)$, seja $j^* \in \mathbb{A}_s$ tal que $\sum_H \varphi^h_{\xi_0,j^*} := \min_{j\in\mathbb{A}_s} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}$. Temos:

$$\begin{aligned}(\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}) &\leq (\pi_{\xi_0,s} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j^*} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j^*}) \\ &\leq \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j^*}(\pi_{\xi_0,s} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j}) \leq 0.\end{aligned}$$

Logo, como $p_{\xi_0}(\sum_H x^h_{\xi_0} - W_{\xi_0})$ e $(\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j})$ são termos não-positivos para todo $s \in S(\xi_0)$:

$$\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j} = 0,$$

e $p_{\xi_0}(\sum_H x^h_{\xi_0} - W_{\xi_0}) = 0$, $\forall s \in S(\xi_0)$.

Além disso, suponha que, para algum bem $\ell \in L$, tenhamos $\sum_H x^h_{\xi_0,\ell} < W_{\xi_0,\ell}$. Nesse caso, teríamos que $p_{\xi_0,\ell} = 0$, o que contradiz a otimalidade dos agentes. Logo a condição de market-clearing no mercado de bens é satisfeita em ξ_0.

De maneira análoga, como para todo $\xi \in \xi_0^+$, a restrição orçamentária está sendo satisfeita para cada agente:

$$\begin{aligned}&p_\xi \left(\sum_H x^h_\xi - W_\xi - Y_\xi W_{\xi_0}\right) + \sum_{s\in S(\xi)} \left(\pi_{\xi,s} \sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} q_{\xi,j} \sum_H \varphi^h_{\xi,j}\right) + \\ &\sum_{s\in S(\xi_0)} \pi_{\xi,s} \sum_H \left(\theta^h_{\xi,s} - \theta^h_{\xi_0,s}\right) \\ &\leq \sum_{s\in S(\xi_0)} \left(\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} K_{\xi,s} - \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \sum_H \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j})\right) \leq \Theta\end{aligned}$$

Por estarmos num ponto fixo de $(\psi^\xi_M)_{\xi\in S_1}$ é possível verificar que, para todo $\xi \in \xi_0^+$, temos:

$\sum_H x^h_{\xi,\ell} - W_{\xi,\ell} - (Y_\xi W_{\xi_0})_\ell \leq \Theta$, $\forall \ell \in L$
$\sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_H \varphi^h_{\xi,j} \leq \Theta$, $\forall j \in \mathbb{A}_s$, $\forall s \in S(\xi)$

$\sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} \leq \Theta$, $\forall s \in S(\xi_0)$.

As restrições orçamentárias estão satisfeitas para cada agente em $t = 2$. Assim, fixado $\xi \in \xi_0^+$, para todo $\mu \in \xi^+$:

$$p_\mu(\sum_H x^h_\mu - W_\mu - Y_\mu Y_\xi W_{\xi_0} - Y_\mu W_\xi) \leq$$
$$\sum_{s \in S(\xi_0)} (\sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j})) + \sum_{s \in S(\xi)} (\sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi,j}, \varphi^h_{\xi,j})) \leq$$
$$4\Omega \max_{\xi \in \{\xi_0\} \cup \xi_0^+} \#S(\xi)(\#H)^2 \omega.$$

Por estarmos para todo $\xi \in \xi_0^+$ num ponto fixo de $(\psi^\mu_M)_{\mu \in \xi^+}$, temos que, para todo $\mu \in \xi^+$:

$$\sum_H x^h_{\mu,\ell} - (Y_\mu Y_\xi W_{\xi_0})_\ell - (Y_\mu W_\xi)_\ell - W_{\mu,\ell} \leq 4\Omega \max_{\xi \in \{\xi_0\} \cup \xi_0^+} \#S(\xi)(\#H)^2 \omega$$

■

Lema Para M_1 suficientemente grande, existe $\varepsilon^* > 0$ tal que para todo equilíbrio da economia truncada, $p_{\xi,\ell} \geq \varepsilon^*$, $\forall \ell \in L$, $\forall \xi \in S$.

Prova. Omitida, mas uma prova similar pode ser encontrada em Steinert e Torres-Martínez(2005). ■

Observe agora que, num equilíbrio da economia truncada, se, para algum $\mathbb{A}_s \subset J(\xi_0)$, existe um primitivo $j^{**} \in \mathbb{A}_s$ tal que $\sum_H \varphi_{\xi_0,j^{**}} > \min_{j \in \mathbb{A}_s} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}$, então $q_{\xi_0,j^{**}} = 0$. Pois do contrário, teríamos:

$\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} = \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j} > \min_{j \in \mathbb{A}_s} \{\sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}\} (\sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j}) \geq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} (\sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j}) \geq \pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s}$, contradição.

Assim:

$\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} = \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \min_{j \in \mathbb{A}_s} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j} \geq \pi_{\xi_0,s} \min_{j \in \mathbb{A}_s} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}$, para todo $s \in S(\xi_0)$. Logo, $\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} = \min_{j \in \mathbb{A}_s} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}$ (pois $\pi_{\xi_0,s} > 0$, já que os dividendos pagos pelos *derivativos* estão limitados acima de zero e, para todo agente h, as compras dos derivativos em ξ_0 são estritamente menores que o limite imposto em Υ_M), para todo $s \in S(\xi_0)$.

Com isso, é possível verificar que se tomarmos um vetor de equilíbrio para a economia truncada e modificá-lo de modo que, para todo $j \in J(\xi_0)$ e para todo $h \in H$, $\varphi^h_{\xi_0,j} = 0$, se $q_{\xi_0,j} = 0$ e mantivermos todas as demais coordenadas desse vetor inalteradas, então, esse novo vetor também será um equilíbrio para a economia truncada.

Lema Para todo equilíbrio da economia truncada com M tendo coordenada M_1 suficientemente grande, vale para todo $\xi \in \xi_0^+$ e para todo $s \in S(\xi_0)$:

$$0 \leq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} K_{\xi,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \leq \frac{1}{M_2}(\#H)^2\Omega$$

Prova.

Fixe um deriativo $s \in S(\xi_0)$ e um estado da natureza $\xi \in \xi_0^+$. Note que existe uma alocação de equilíbrio da economia truncada que satisfaz:

$$(\$) \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) = \sum_H \sum_{\{j \in \mathbb{A}_s : q_{\xi_0,j} \neq 0\}} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j})$$

$$\leq \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s : q_{\xi_0,j} \neq 0} \varphi^h_{\xi_0,j}\{q_{\xi_0,j} + p_\xi A_{\xi,j}\} \leq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} \# J(\xi_0)\{1 + \max_{j \in J(\xi_0)} \|A_{\xi,j}\|_1\} \leq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s}\omega.$$

Vamos considerar os seguintes casos:

I)$\sum_H \varphi^h_{\xi_0,j} = 0, \forall j \in \mathbb{A}_s$.

Como $(\pi_{\xi_0,s} \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} - \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}) = 0$ e $\pi_{\xi_0,s} > 0$, temos que $\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} = 0$ e, portanto:

$$\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} K_{\xi,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) = 0.$$

II) $\sum_H \varphi^h_{\xi_0,j} > 0$, para algum $j \in \mathbb{A}_s$ e $\min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[\|A_{\xi,j}\|_1; \|Y_\xi C_j\|_1] = 0$.

Por estarmos num ponto fixo da correspondência $\psi^{\xi,s}_M$ e por (\$) temos que:

$$\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} K_{\xi,s} \geq \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j})$$

e, portanto, se:

$$\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} \frac{1}{M_2} \leq \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}),$$

então $\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} K_{\xi,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) = 0$

e, se:

$$\sum_H \theta^h_{\xi_0,s}\frac{1}{M_2} > \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}), \quad \text{então}$$

$$0 \leq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s}K_{\xi,s} - \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \leq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s}\frac{1}{M_2} \leq \frac{1}{M_2}(\#H)^2\Omega$$

III)$\sum_H \varphi^h_{\xi_0,j} > 0$, para algum $j \in \mathbb{A}_s$ e $\min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|A_{\xi,j}\|_1; \|Y_\xi C_j\|_1] > 0$
Neste caso, temos:

$$\sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \geq \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \min[p_\xi Y_\xi C_j; p_\xi A_{\xi,j}] \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j}$$

$$\geq \underline{p} \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\xi,j}\|_1] \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j} \geq \underline{p} \min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\xi,j}\|_1] \sum_H \theta^h_{\xi_0,s},$$

em que $\underline{p} := \inf_{\{M\in\zeta,\ell\in L,\xi\in S\}} p_{\xi,\ell}$.

Como $\underline{p} \min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\xi,j}\|_1] > 0$, podemos escolher M_1 de modo que

$$\frac{1}{M_1} \leq \underline{p} \min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\xi,j}\|_1]$$

e, portanto:

$$\frac{1}{M_1}\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} \leq \underline{p} \min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\xi,j}\|_1] \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} \leq \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \leq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s}\omega.$$

Desse modo,

$$\sum_H \theta^h_{\xi_0,s}K_{\xi,s} - \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) = 0.$$

Assim, da análise feita sob os três casos, temos que sempre podemos escolher M_1 suficientemente grande de modo a ter para todo $\xi \in \xi_0^+$ e para todo $s \in S(\xi_0)$ um equilíbrio para a economia truncada tal que:

$$0 \leq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s}K_{\xi,s} - \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \leq \frac{1}{M_2}(\#H)^2\Omega$$

■

Portanto, fixando um M_1 suficientemente grande, se $M_2 \to \infty$, obtemos um equilíbrio para a economia truncada tal que, para todo $\xi \in \xi_0^+$ e para todo $s \in S(\xi_0)$:

$$\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} K_{\xi,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\xi,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) = 0$$

e, desse modo, para todo $\xi \in \xi_0^+$:

$$p_\xi \left(\sum_H x^h_\xi - W_\xi - Y_\xi W_{\xi_0} \right) + \sum_{s \in S(\xi)} \left(\pi_{\xi,s} \sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi,} \sum_H \varphi^h_{\xi,j} \right) + \sum_{s \in S(\xi_0)} \pi_{\xi,s} \sum_H \left(\theta^h_{\xi,s} - \theta^h_{\xi_0,s} \right) \leq 0.$$

Assim, por estarmos num ponto fixo de ψ^ξ_M, $\forall \xi \in \xi_0^+$:
$\sum_H x^h_{\xi,\ell} - W_{\xi,\ell} - (Y_\xi W_{\xi_0})_\ell \leq 0$, $\forall \ell \in L$
$\sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_H \varphi^h_{\xi,j} \leq 0$, $\forall j \in \mathbb{A}_s$, $\forall s \in S(\xi)$
$\sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} \leq 0$, $\forall s \in S(\xi_0)$.

Com argumentos usados no início da demonstração do primeiro lema, mostramos que para M_1 suficientemente grande:

$$p_\xi \left(\sum_H x^h_\xi - W_\xi - Y_\xi W_{\xi_0} \right) + \sum_{s \in S(\xi)} \left(\pi_{\xi,s} \sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi,} \sum_H \varphi^h_{\xi,j} \right) + \sum_{s \in S(\xi_0)} \pi_{\xi,s} \sum_H \left(\theta^h_{\xi,s} - \theta^h_{\xi_0,s} \right) = 0,$$

$\forall \xi \in \xi_0^+$

Agora, dado $s \in S(\xi)$, $\xi \in \xi_0^+$, seja $j^{***} \in \mathbb{A}_s$ tal que $\sum_H \varphi^h_{\xi,j^{***}} := \min_{j \in \mathbb{A}_s} \sum_H \varphi^h_{\xi,j}$. Então:

$$(\pi_{\xi,s} \sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi,j} \sum_H \varphi^h_{\xi,j}) \leq (\pi_{\xi,s} \sum_H \varphi^h_{\xi,j^{***}} - \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi,j} \sum_H \varphi^h_{\xi,j^{***}}) \leq \sum_H \varphi^h_{s_1,j^{***}} (\pi_{\xi,s} - \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi,j}) \leq 0,$$

e, portanto, como $p_\xi(\sum_H x^h_\xi - W_\xi - Y_\xi W_{\xi_0})$, $(\pi_{\xi,s} \sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi,j} \sum_H \varphi^h_{\xi,j})$ e $\pi_{\xi,s} \sum_H (\theta^h_{\xi,s} - \theta^h_{\xi_0,s})$ são, para todo $s \in S(\xi_0)$ e para todo $s \in S(\xi)$, $\xi \in \xi_0^+$, termos não positivos que somam zero e porque os preços dos bens estão uniformemente limitados acima de zero, temos:
$(\pi_{\xi,s} \sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi,j} \sum_H \varphi^h_{\xi,j}) = 0$, $\forall s \in S(\xi)$.
$\sum_H x^h_{\xi,\ell} - W_{\xi,\ell} - (Y_\xi W_{\xi_0})_\ell = 0$, $\forall \ell \in L$

Além disso, como os dividendos pagos pelos *derivativos* estão limitados acima de zero em $t = 2$, temos que $\pi_{\xi,s} > 0$ para todo $\xi \in \xi_0^+$ e para todo $s \in S(\xi_0)$, pois, caso contrário, todos os agentes demandariam $2\Omega(\#H)$ unidades do derivativo de preço zero, o que é uma contradição com o fato de, para todo $j \in \mathbb{A}_s$ e para todo $s \in S(\xi_0)$, $\sum_H \theta^h_{\xi,s} \leq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} = \sum_H \varphi^h_{s_0,j} \leq 2\Omega$, e, portanto:

$$\sum_H \theta^h_{\xi,s} - \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} = 0$$

, $\forall s \in S(\xi_0), \forall \xi \in \xi_0^+$

e $\pi_{\xi,s} \sum_H (\theta^h_{\xi,s} - \theta^h_{\xi_0,s}) = 0$.

Lema Para M_1 suficientemente grande e para $M_2 \to \infty$, podemos encontrar um equilíbrio para a economia truncada que satisfaça:

$$0 \leq \sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \leq \frac{1}{M_3}(\#H)^2\Omega,\ \forall \mu \in \xi^+, \forall \xi \in \xi_0^+, \forall s \in S(\xi_0)$$

Prova.

Fixe um derivativo $s \in S(\xi_0)$ e estados da natureza $\mu \in \xi^+$ e $\xi \in \xi_0^+$. Então, vale para algum equilíbrio da economia truncada:

$$(\$\$) \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \leq \sum_H \sum_{\{j \in \mathbb{A}_s : q_{\xi_0,j} \neq 0\}} \varphi^h_{\mu,j}\{p_\mu A_{\mu,j} + q_{\xi_0,j}\} \leq \sum_H \sum_{\{j \in \mathbb{A}_s : q_{\xi_0,j} \neq 0\}} \varphi^h_{\xi_0,j}\{p_\mu A_{\mu,j} + 1\}$$

$$\leq \sum_H \theta^h_{\xi_0,s}\omega = \sum_H \theta^h_{\xi,s}\omega,$$

Consideremos agora os seguintes casos:

I)$\sum_H \varphi^h_{\xi,j} = 0,\ \forall j \in \mathbb{A}_s$.

Pela restrição de redução de dívida, temos $0 = \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \varphi^h_{\xi,j} = \tau \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \varphi^h_{\xi_0,j}$. Assim, para todo $j \in \mathbb{A}_s$:

$$0 = \sum_H \varphi^h_{\xi_0,j} = \sum_H \theta^h_{\xi_0,s} = \sum_H \theta^h_{\xi,s}$$

e, portanto:

$$\sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j \in \mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) = 0.$$

II) $\sum_H \varphi^h_{\xi,j} > 0$, para algum $j \in \mathbb{A}_s$ e $\min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|A_{\mu,j}\|_1; \|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1] = 0$.

Por estarmos num ponto fixo da correspondência $\psi^{\mu,s}_M$ e por ($$), temos que:

$$\sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} \geq \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j})$$

e, portanto, se:

$$\sum_H \theta^h_{\xi,s}\{\frac{1}{M_3}\} \leq \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}), \quad \text{então} \quad \sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) = 0$$

e, se:

$$\sum_H \theta^h_{\xi,s} \frac{1}{M_3} > \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}), \quad \text{então} \quad 0 \leq \sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j})$$
$$\leq \frac{1}{M_3} \sum_H \theta^h_{\xi,s} \leq \frac{1}{M_3} (\#H)^2 \Omega$$

III) $\sum_H \varphi^h_{\xi,j} > 0$, para algum $j \in \mathbb{A}_s$ e $\min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|A_{\mu,j}\|_1; \|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1] > 0$.

Neste caso, temos:

$$\sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \geq \underline{p} \min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\mu,j}\|_1] \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \varphi^h_{\xi,j}$$

$$\geq \tau \underline{p} \min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\mu,j}\|_1] \sum_H \theta^h_{\xi,s},$$

em que $\underline{p} := inf_{M\in\zeta,\ell\in L,\xi\in S} p_{\xi,\ell}$ e a última desigualdade vem da restrição de redução de dívida e do fato que $\sum_H \theta^h_{\xi_0,s} = \sum_H \theta^h_{\xi,s}$ para todo $s \in S(\xi_0)$.

Como $\tau \underline{p} \min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\mu,j}\|_1] > 0$, podemos escolher M_1 de modo que

$$\frac{1}{M_1} \leq \tau \underline{p} \min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\mu,j}\|_1]$$

e, portanto:

$$\frac{1}{M_1}\sum_H \theta^h_{\xi,s} \le \tau \underline{p} \min_{j\in\mathbb{A}_s} \min[\|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1; \|A_{\mu,j}\|_1] \sum_H \theta^h_{\xi,s} \le \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \le \sum_H \theta^h_{\xi,s} W.$$

Desse modo,

$$\sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) = 0$$

e, assim, sob a análise dos 3 casos acima, concluímos que:

$$0 \le \sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi_0,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \le \frac{1}{M_3}(\#H)^2\Omega,\ \forall \mu \in \xi^+, \forall \xi \in \xi_0^+,\ \forall s \in S(\xi_0)$$

■

Por argumentos já usados anteriormente, verificamos que, para todo $s \in S(\xi)$ e para todo $\xi \in \xi_0^+$, $\sum_H \theta^h_{\xi,s} = \min_{j\in\mathbb{A}_s} \sum_H \varphi^h_{\xi,j}$. Assim, podemos encontrar um equilíbrio para a economia truncada igual ao encontrado até então, em que $\sum_H \theta^h_{\xi,s} = \sum_H \varphi^h_{\xi,j}$, $\forall j \in \mathbb{A}_s$ tal que $q_{\xi,j} > 0$, e $\sum_H \varphi^h_{\xi,j} = 0$, $\forall j \in J(\xi)$ caso $q_{\xi,j} = 0$.

Lema Para M_1 suficientemente grande e para $M_2 \to \infty$, podemos encontrar um equilíbrio para a economia truncada que satisfaça:

$$0 \le \{\sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi,j}, \varphi^h_{\xi,j}) \le \frac{1}{M_3}(\#H)^2\Omega,\ \forall \mu \in \xi^+, \forall \xi \in \xi_0^+, \forall s \in S(\xi)$$

Prova. Análoga aos dois lemas anteriores. ■

Assim, para M_1 suficientemente grande, fazendo $M_2 \to \infty$ e $M_3 \to \infty$, obtemos um equilíbrio para a economia truncada tal que, $\forall \mu \in \xi^+$, $\forall \xi \in \xi_0^+$ e $\forall s \in S(\xi)$:

$$\sum_H \theta^h_{\xi,s} K_{\mu,s} - \sum_H \sum_{j\in\mathbb{A}_s} \delta_{\mu,j}(p, q_{\xi,j}, \varphi^h_{\xi,j}) = 0$$

e, por estarmos num ponto fixo de ψ^μ_M:

$$\sum_H x^h_{\mu,\ell} - (Y_\mu Y_\xi W_{\xi_0})_\ell - (Y_\mu W_\xi)_\ell - W_{\mu,\ell} \le 0,\ \forall \ell \in L$$

Usando argumentos anteriores, existe M_1 tal que

$$p_\mu(\sum_H x_\mu^h - W_\mu - Y_\mu Y_\xi W_{\xi_0} - Y_\mu W_\xi) = 0.$$

Pela hipótese 4, para todo $\xi \in \xi_0^+$ e todo $s \in S(\xi_0)$, se

$$\min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[p_\xi A_{\xi,j} + \lambda_{\xi,j} q_{\xi_0,j}, p_\xi Y_\xi C_j] > 0,$$

então $\min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[\|A_{\xi,j}\|_1, \|Y_\xi C_j\|_1] > 0$ e, logo, $K_{\xi,s} \geq \frac{1}{M_1} > 0$. Da mesma forma, para todo $\mu \in \xi^+$, se

$$\min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[p_\mu A_{\mu,j} + (1 - \lambda_{\xi,j}) q_{\xi_0,j}, p_\mu Y_\mu Y_\xi C_j] > 0,$$

então $\min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[\|A_{\mu,j}\|_1, \|Y_\mu Y_\xi C_j\|_1] > 0$ e $K_{\mu,s} \geq \frac{1}{M_1} > 0$.

Portanto, para toda classe $\mathbb{A}_s \subset J(\xi_0)$ *não-trivial*, $\sum_{j \in \mathbb{A}_s} q_{\xi_0,j} \geq q_{\xi_0,s} > 0$. Logo, existe $j \in \mathbb{A}_s$, tal que $q_{\xi_0,j} > 0$. De modo análogo, podemos mostrar que, fixado $\xi \in \xi_0^+$, para todo $\mu \in \xi^+$ e para todo $s \in S(\xi)$, se

$$\min_{j \in \mathbb{A}_s} \min[p_\mu A_{\mu,j} + q_{\xi,j}, p_\mu Y_\mu C_j] > 0,$$

então $K_{\mu,s} \geq \frac{1}{M_1} > 0$ e existe $j \in J(\xi)$, tal que $q_{\xi,j} > 0$. ■