3
Atividades Preliminares

3.1. Os desafios dos quadrados na figura e do corte estranho

3.1.1. Sobre o desafio dos quadrados na figura

O primeiro desafio proposto visa testar a capacidade dos participantes para identificar figuras específicas (o foco) em um quadro (campo). Quando se focaliza a atenção numa figura, é preciso não se distrair com estímulos visuais irrelevantes, desconsiderando todos os marcos estranhos que a rodeiam. A tarefa não demanda o domínio de conteúdos matemáticos e tampouco o raciocínio dedutivo. Tal como no modelo sugerido por van Hiele (1986, 1988), o ponto de partida é a visualização.

O desafio, proposto por Gardner (1982), traz um desenho com uma série de segmentos de reta e ângulos retos (figura 6). A questão é descobrir, em relação à figura fornecida, quantos quadrados estão presentes (representados) no total. Cumpre ressaltar que nenhum segmento pode ser acrescentado ou retirado.

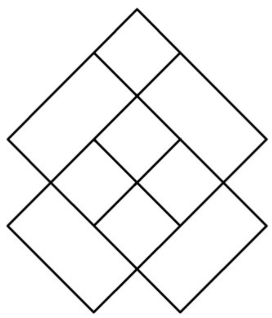

Figura 6 - Desenho com vários segmentos de reta e ângulos retos

Cinco quadrados são evidentes (os menores), mas a resposta correta é 11. Isto porque a figura contém quadrados de três tamanhos distintos. São cinco quadrados 1 x 1, cinco quadrados 2 x 2, e um quadrado 3 x 3. Logo, 5 + 5 + 1 = 11. A figura 7 mostra os 11 quadrados em destaque, contados um por um, manualmente, sem necessidade de um procedimento mais elaborado.

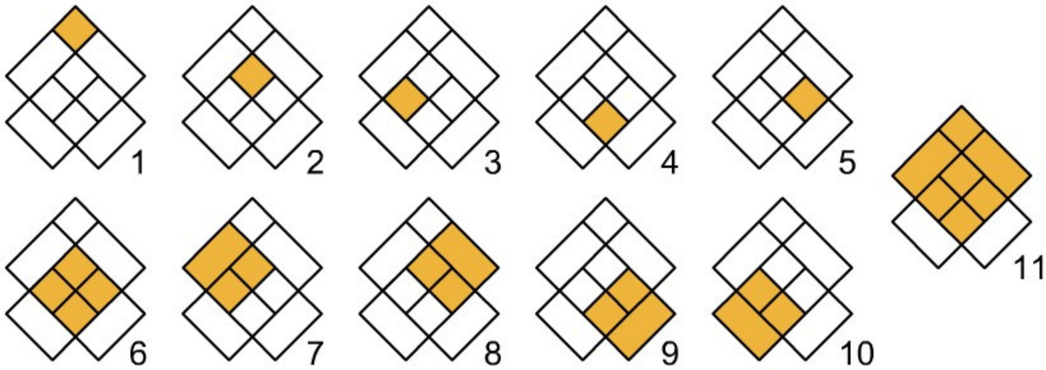

Figura 7 - Os 11 quadrados presentes na figura

3.1.2. Sobre o desafio do corte estranho

Embora ainda possa ser considerado simples, o presente desafio é mais elaborado do que o anterior. Desta vez a visualização não basta. Seja qual for o caminho para a solução, os próximos passos do modelo de van Hiele (1986, 1988) devem estar presentes: análise e dedução. Seu principal objetivo é investigar se os participantes do experimento irão traçar algum paralelo entre a primeira atividade e a segunda. Caso surja uma relação, de que maneira ela será percebida (ou construída) e utilizada pelo aluno? Poderá o professor antecipar a cadeia de raciocínio do estudante, de maneira a aprimorar a sequência de atividades? Em que medida o primeiro desafio serve de pista para desvendar o segundo?

O autor do desafio é novamente Gardner (1994). Um polígono é apresentado (figura 8) e pede-se para determinar o corte exato a fim de separá-lo em duas partes idênticas (congruentes). Com o propósito de esclarecer o enunciado, embora não seja imperativo o uso da linguagem técnica, é importante ressaltar que o corte não precisa ser um segmento isolado, podendo aparecer como uma linha poligonal aberta.

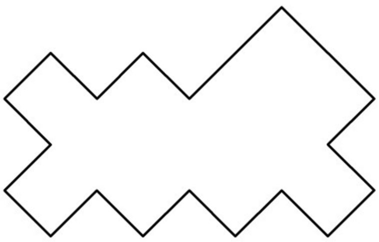

Figura 8 - Polígono a ser cortado em duas partes iguais

A figura em questão não possui simetria bilateral, caso contrário a solução seria simples. Bastaria encontrar o(s) eixo(s) de reflexão. Tal como Polya (2004) sugere, um problema auxiliar pode conduzir à resposta. De que maneira? Duas cadeias de raciocínio são exemplificadas a seguir.

Exemplo 1 – Considera-se um problema auxiliar de enunciado semelhante ao original, mas desta vez, imagina-se um polígono com simetria bilateral, parecido com o primeiro (figura 9A). São evidentes dois eixos de simetria, um vertical e outro horizontal. Considerando o corte realizado pelo eixo vertical, o problema auxiliar é solucionado automaticamente (figura 9B). E quanto ao desafio original? A parte retirada (quadrado destacado em amarelo) precisa ser recolocada no lugar (figura 9C). Até então, as duas partes idênticas (em branco e cinza) tinham exatamente a mesma área. Porém, com o retorno do quadrado amarelo torna-se necessário rever o corte (figuras 10A e 10B).

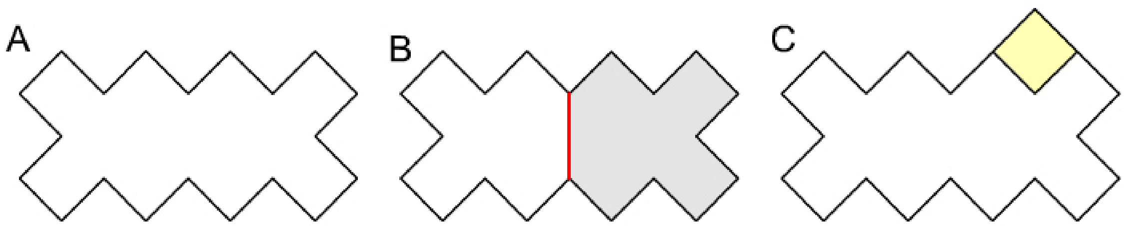

Figura 9 - Figura do prob. auxiliar, corte e comparação com a figura original

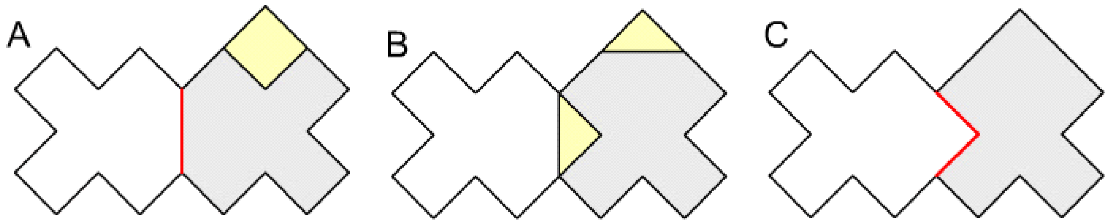

Figura 10 - Ajuste do corte em relação à figura original

No exemplo exposto, outra aptidão espacial além da percepção de figuras em campos é requisitada. Como um dos polígonos é resultante de uma rotação combinada com uma translação do outro (figura 10C), o que ganha destaque na etapa final do raciocínio é a percepção da posição no espaço. Qual é o impacto disso? Pode-se afirmar que a situação hipotética apresentada confronta não apenas a ordem dos itens previstos pelo modelo de van Hiele (1986, 1988) como também a própria concepção de que eles sejam separados e dispostos em sequência. Refiro-me aos itens 1 - visualização, 2 - análise e 3 - dedução. Em sintonia com a bandeira levantada por Arnheim (1997), grande parte dos exemplos apresentados neste trabalho irão reforçar a hipótese de que não existe uma linha divisória tão nítida entre o “perceber” e o “pensar” na cognição.

> Percepção visual é pensamento visual. (...) Percepção visual não é um registro passivo de estímulos materiais mas um interesse ativo da mente. Percepção envolve a resolução de problemas. (...) O tipo de processo observado no pensamento lógico ocorre também no nível perceptivo. (Arnheim, 1997, p.14, p.37, p.39)

Exemplo 2 – No desafio anterior, foi solicitada a contagem de quadrados na figura fornecida. Na ocasião, nenhum segmento poderia ser acrescentado ou retirado do desenho. Já no desafio do corte, traçados auxiliares são permitidos. O polígono apresentado contém apenas ângulos retos e vários lados de comprimento equivalente. Esses indícios levam a crer que talvez ele possa formar uma malha quadriculada (figura 11A). Como o corte precisa dividir a figura em duas partes iguais, suas áreas também serão as mesmas. Sendo 12 o número total de quadrados menores, é provável que cada parte contenha 6 quadrados agrupados. Logo, a linha de corte é descoberta (figura 11B).

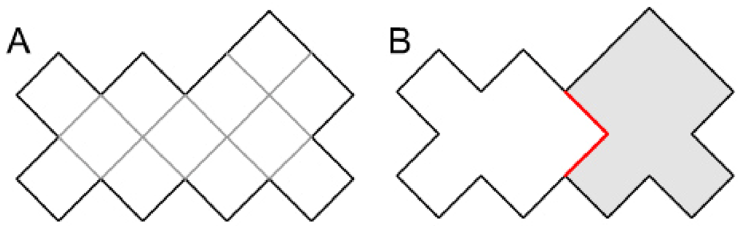

Figura 11 - Descoberta do corte pelo raciocínio da malha de quadrados

3.1.3. Experimento com alunos

1 - Desafios dos quadrados na figura

Ao serem questionados sobre quantos quadrados estavam desenhados ou representados na figura, os participantes forneceram as seguintes respostas:

Participante [1] - “São cinco quadrados.” Ao ser novamente perguntado, “só cinco?”, ele retrucou: “cinco quadrados e quatro retângulos”. Sem qualquer intervenção adicional, em cerca de 6 segundos ele parou, debruçou-se sobre o papel e, com uma lapiseira apontando para os quadrados, prosseguiu, “não, não, cinco não, seis. Espera, deixa eu pensar. São 1, 2 ,3 ,4 ,5 ,6... 7, 8, 9... 10, 11. São onze.”

Participante [2] - Após rabiscar sobre a figura, ele disse: “sete, são sete”. “Quais você contou?”, perguntei, solicitando que identificasse seus contornos. De acordo com a figura 2, ele identificou os seguintes: todos os cinco menores 1 x 1, o central 2 x 2 (número 6), e o único maior 3 x 3. Escaparam-lhe os outros quatro. Questionei se não haveria outros quadrados de tamanho 2 x 2 na figura. Sem dificuldades, ele percebeu e disse: “É verdade, com mais quatro são onze.”

Participante [3] - “São seis quadrados? Não..., são dez.” Ao perceber que estava tendo dificuldades em contar, disse-lhe que poderia fazer anotações, se assim desejasse. A resposta certa veio em seguida: “Onze.”

Em princípio, o participante [1] foi o único a desconsiderar os quadrados maiores. Seu foco estava nos quadrados 1 x 1. Meu questionamento forneceu uma pista de que havia outros. A resposta “cinco quadrados e quatro retângulos” levantou a hipótese de seu desconhecimento acerca da inclusão de classes. Todo quadrado também é um retângulo. O participante [2] sabia que os quadrados poderiam ter tamanhos diferentes, mas lhe escaparam quatro. O participante [3] não teve dificuldade em determinar o número de quadrados. Para que ele não se perdesse na contagem manual, o registro no papel foi útil.

2 - Desafio do corte estranho

A solicitação para traçar o corte exato, a fim de dividir a figura (figura 8) em duas partes idênticas, trouxe surpresas. Os participantes deram as seguintes respostas:

Participante [1] - Para começar houve uma dúvida em relação ao enunciado. “Figuras iguais? Você quer dizer espelhadas? De tamanho igual?” Para melhor especificar, eu respondi que as figuras não deveriam ser necessariamente refletidas, mas teriam o mesmo tamanho e formato. As proporções seriam mantidas. Os dois polígonos deveriam ser congruentes. As medidas de seus lados correspondentes seriam iguais e as medidas de seus ângulos correspondentes também seriam iguais. Uma vez compreendido o enunciado, outra questão lhe ocorreu: “Eu não posso eliminar isso aqui não?” A pergunta se referia à parte amarela na figura 9C. Ele buscava a simetria bilateral para simplificar o problema.

Com dois minutos e meio, a malha de quadrados foi traçada. Ele observou 12 quadrados e arriscou um corte (figura 12B). “Ah, aqui.” Embora a divisão tenha originado dois polígonos com a mesma área, seus formatos ficaram diferentes. Percebendo a falha, disse-me com ares de desapontamento: “Não é igual; tem a mesma área, mas não é igual. (...) Ai, quando eu pego uma idéia, não consigo sair.” Em seguida, pediu-me para auxiliá-lo: “Está muito complicado, preciso de uma dica.” Procurei oferecer ajuda, tomando por base seu raciocínio prévio. A idéia era aproveitar o ângulo reto, já destacado pelo seu traço (figura 12B). Sugeri que tentasse identificar outras instâncias do polígono formado por três quadrados e ilustrado na figura 13A. As figuras 13B e 13C mostram os passos seguintes que ele tomou. Ao término, disse-me: “Ah, só precisava de uma dica. Legal.” O polígono inicial foi separado em quatro partes congruentes, em vez de duas. As uniões dessas partes, duas a duas, revelaram o local exato do corte. É importante ressaltar que, apesar de ter passado por uma situação aflitiva, ele não perdeu o entusiasmo. A palavra “legal” estava de acordo com sua expressão descontraída.

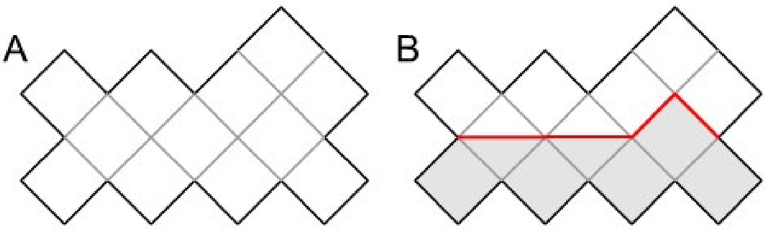

Figura 12 - Corte preliminar efetuado do participante [1]

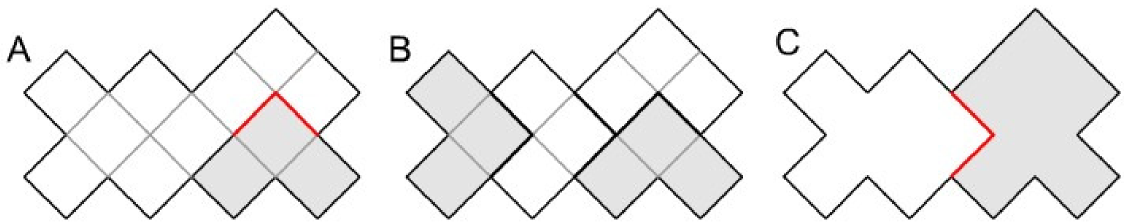

Figura 13 - Retomada do raciocínio pelo participante [1]

Participante [2] - O enunciado também não lhe parecia estar claro. “Dividir com a mesma área, você quer dizer?” Respondi que as partes iguais teriam a mesma área e a mesma forma. Sem qualquer instrução ou dica prévia, prontamente ele pegou uma caneta e começou a dividir o polígono na estrutura de quadrados. Após observá-lo por mais de três minutos tentando chegar a uma solução, decidi intervir. Perguntei quantos quadrados pequenos havia no total. Marcando um por um, ele me disse que eram 12. Relembrei sua pergunta inicial sobre a igualdade das áreas e sugeri que ele se concentrasse naquela evidência. Continuei a acompanhá-lo por mais cinco minutos, mas em momento algum pareceu-me ter-lhe ocorrido a idéia dos agrupamentos de 6 quadrados. Por fim, resolvi explicar o raciocínio relativo ao exemplo 2, surpreso pelo fato de ele não ter visualizado o corte apesar da rápida construção da malha e da pergunta inicial sobre a área.

Participante [3] - Após cinco segundos desde o anúncio do desafio, a linha de corte foi traçada corretamente. Impressionado com a rapidez de resposta, perguntei como ele havia chegado à solução, se houve um raciocínio prévio. Disse-me que eu iria achar engraçado, mas ele havia percebido que o contorno da figura do primeiro desafio se assemelhava a uma parte do contorno da figura do segundo desafio. “Eu vi logo de início que ela encaixava aqui. Aí eu pensei que, como essa parte (à esquerda) é diferente dessa (à direita), de alguma maneira teria que estar rotacionada, mas eu sabia que tinha ligação com essa peça aqui (a do primeiro desafio).” A figura 14 mostra os dois contornos parecidos.

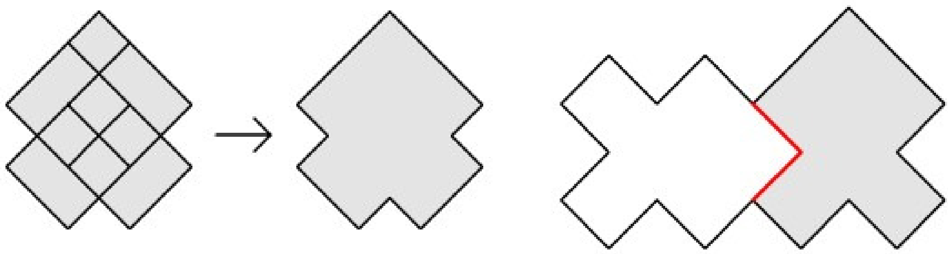

Figura 14 - As formas dos diferentes desafios

Pelo fato de o participante [3] ter solucionado o problema de maneira imediata, decidi revelar que eu havia resolvido o desafio de outra forma, na primeira vez em que me deparei com a figura no livro de Gardner (1994). Falei sobre a malha quadriculada, a divisão em 12 quadrados menores e os agrupamentos de 6 unidades em cada parte. Em seguida, ele me disse: “É, eu também pensei nisso. Na verdade eu não pensei nos quadrados menores. Eu pensei em achar dois grandes e depois os menores.” A figura 15 reproduz o traçado que ele deixou no papel, registrando sua idéia.

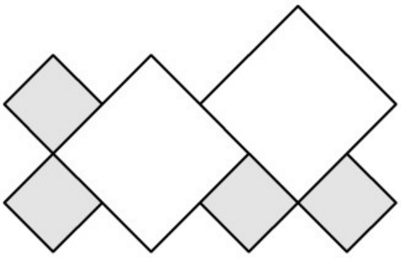

Figura 15 - Divisão em quadrados de diferentes tamanhos

Sem dúvida, o participante [3] se beneficiou do primeiro desafio. Além da analogia entre os contornos das figuras, a intenção de dividir e contar quadrados de diferentes tamanhos também lhe ocorreu.

3.1.4. Idéias ingênuas, resultados inusitados

A decisão de começar as atividades da pesquisa com desafios que dependem do reconhecimento de quadrados em figuras certamente não foi aleatória. A partir de alguns exemplos selecionados, pretendi relacionar a estrutura da tarefa com produtos de design.

Em maio de 2007, a Construtora Castelo Branco lançou um concurso para a criação de uma nova logomarca da empresa. O valor do prêmio destinado ao vencedor, conforme divulgado na internet, era de 5000 reais. Meses depois foi divulgada a logomarca vencedora, aqui reproduzida na figura 16. Para o meu espanto, pude observar que a malha geométrica da logo escolhida era extremamente similar à estrutura do desafio do corte estranho, tal como ilustra a figura 16.

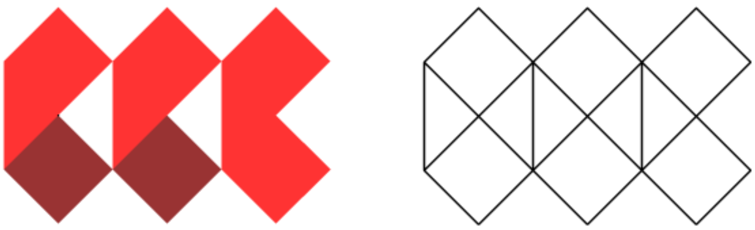

Figura 16 - Logomarca da Construtora Castelo Branco

A imagem ganhadora resgata na memória outra logo, esta reconhecida em diversos países. Trata-se da logo do banco HSBC também formada por quadrados e triângulos retângulos isósceles, preenchidos com as cores vermelha e branca, tal como mostra a figura 17.

Figura 17 - Logo do banco HSBC

O reconhecimento desta logo é imediato, mas será que ela cumpre o papel de representar bem a empresa? Provavelmente não. Este problema é explicado por Arnheim (1997, p.144), quando afirma que “um padrão muito abstrato falha em especificar seu referente, ao passo que a identificação de uma companhia particular, marca, instituição, idéia é o propósito da propaganda”.

O problema da abstração não está na presença das formas geométricas em si, mas no modo de organizá-las. O tangram, por exemplo, é composto por 5 triângulos retângulos isósceles, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Cada uma das imagens da figura 18 é composta destas partes e algumas fornecem mais pistas visuais do que outras. O que dizer a respeito das formações da figura 19? Em que medida elas são abstratas?

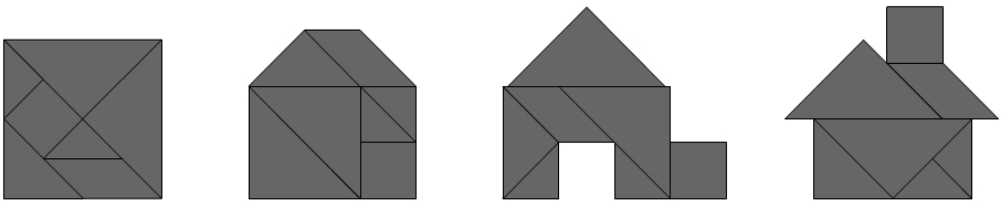

Figura 18 - Composições de tangram em diversos graus de abstração

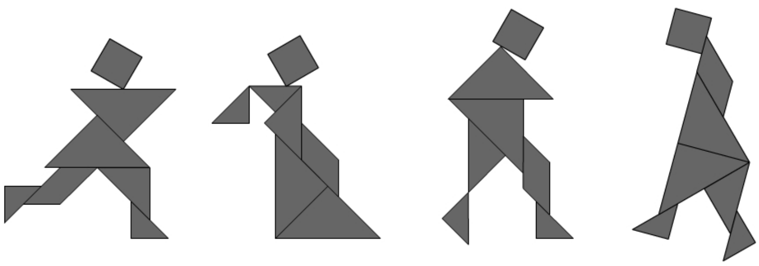

Figura 19 - Outras montagens de tangram

Curiosamente, em outro contexto, a mesma forma do logo do HSBC constitui a unidade elementar para a criação de objetos surpreendentes, conforme descrito no próximo exemplo.

i-Gami (Axelrad, 2003) é um brinquedo de plástico baseado na antiga arte do origami, comercializado desde 2006 pela Plastic Play Inc. A invenção é tão ingênua e transparente que é de se perguntar: “por que ninguém pensou nisso antes?” Embora todo material tenha suas limitações, o tipo de plástico utilizado (polipropileno) se adapta bem ao projeto, assegurando vida longa para as partes. Há uma clara relação entre o i-Gami e o origami modular, mas não se trata de um mero caso de substituição de material, do papel para o plástico.

A principal peça do i-Gami é denominada ichi-gami e seu formato é idêntico ao do logo do banco HSBC (figura 20). Ela consiste numa espécie de quadrado, podendo ser dobrado por qualquer uma de suas diagonais. Dois triângulos retângulos isósceles, apoiados sobre lados opostos, servem como abas. No verso da peça, são encontradas garras cilíndricas, uma sobre cada aba. O encaixe de duas peças ocorre quando uma das abas de uma peça é posicionada sobre um triângulo interno de outra. Por pressão, a garra da primeira atravessa um orifício circular da segunda. Em seguida, a expansão da garra viabiliza a conexão de uma peça à outra.

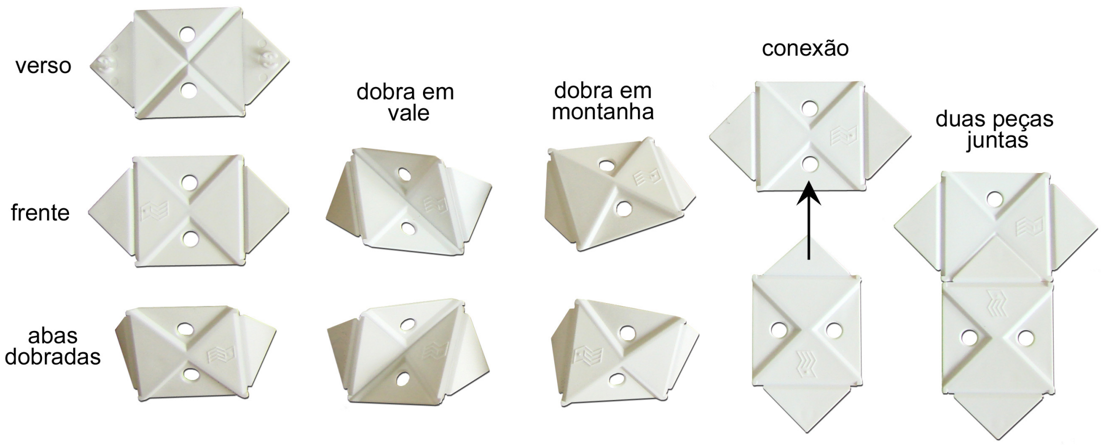

Figura 20 - ichi-Gami: a principal peça do i-Gami

Inúmeros poliedros fechados podem ser criados a partir do encaixe dessas partes. Três peças são suficientes para construir o menor deles, uma dipirâmide com seis faces (figura 21). Com quatro peças em mãos, a próxima e única opção é um estranho octaedro cujas faces também são triângulos retângulos isósceles (figura 22). Nesse instante, alguém poderia perguntar: quanto medem seus ângulos diedros? Como eles podem ser calculados? Dado o comprimento das arestas, qual será a distância entre os vértices mais afastados? Mesmo as montagens mais simples já conduzem a instigantes questões de geometria.

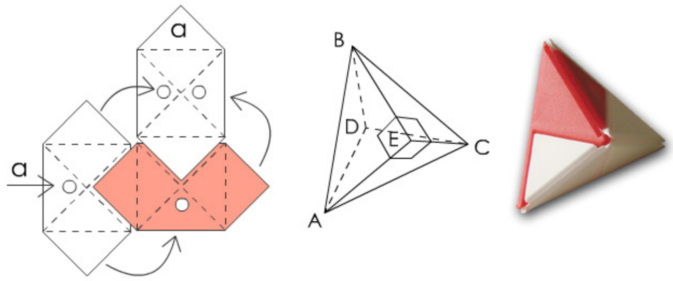

Figura 21 - Poliedro construído com 3 peças ichi-Gami

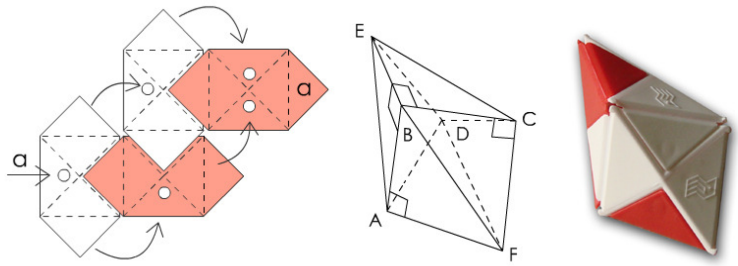

Figura 22 - Poliedro construído com 4 peças ichi-Gami

Em princípio, dado um número de peças ichi-gami, é praticamente impossível predizer de que tipo são e quantos diferentes poliedros podem surgir. Portanto, a ação é necessária. É preciso brincar com as peças, encaixando-as, e descobrir o que acontece. A abordagem manual, por ensaio e erro, faz parte da brincadeira. As figuras 23 e 24 mostram outras montagens[3].

3 Há um artigo, de minha autoria, com uma análise mais detalhada do i-Gami (RODRIGUES, 2008). Além de compará-lo ao origami modular tradicional e identificar outras características, eu resolvo um problema de design do produto, sugerindo a inclusão de novas peças ao *kit*.

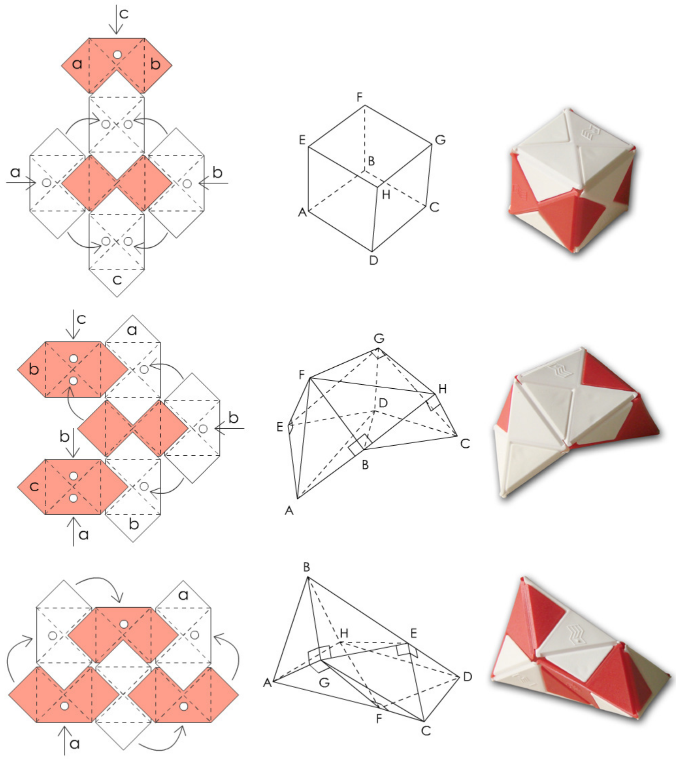

Figura 23 - Poliedros construídos com 6 peças ichi-Gami

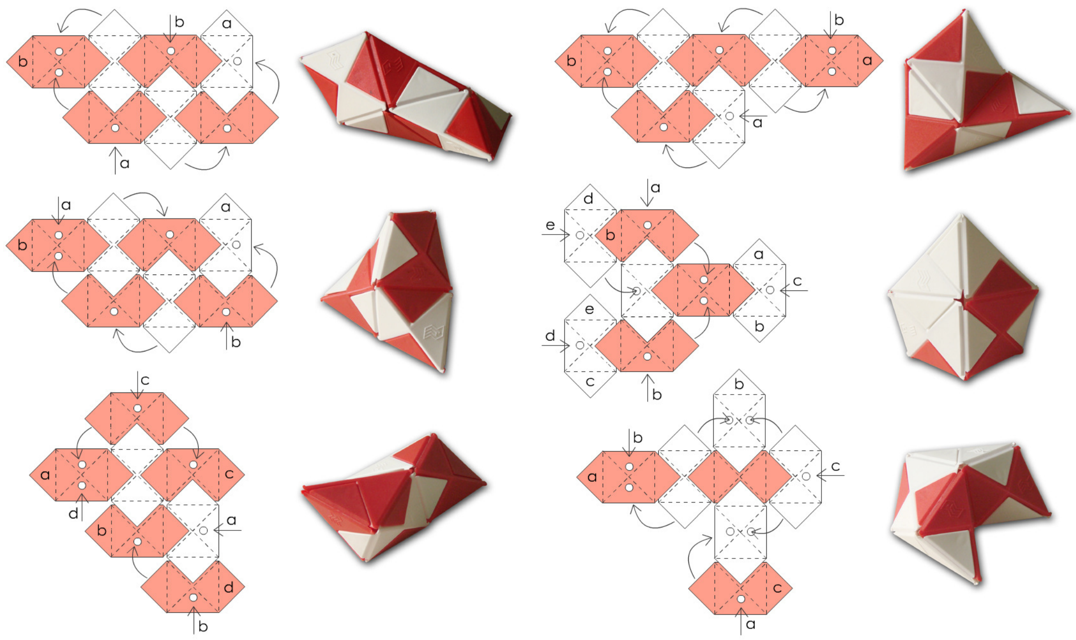

Figura 24 - Poliedros construídos com 7 peças ichi-Gami

3.2. O desafio dos dominós e o tabuleiro de xadrez mutilado

3.2.1. Sobre o desafio dos dominós

O desafio do tabuleiro de xadrez é um problema clássico, conhecido por especialistas em jogos e quebra-cabeças. Dentre vários autores que o citam, destacam-se Gardner (1994), Golomb (1996), Martin (1996) e Singh (1997). Mais do que um mero passatempo, o desafio serve como um ponto de partida para destacar as diferenças entre os processos de raciocínio indutivo e dedutivo, razão pela qual foi escolhido para fazer parte do programa de atividades preliminares da pesquisa.

A tarefa é proposta nos termos a seguir explicitados: tem-se um tabuleiro de xadrez e 32 dominós. Cada dominó possui o tamanho exato para cobrir duas casas adjacentes. Logo, os 32 dominós podem cobrir todas as 64 casas (quadrados) do tabuleiro. Agora, suponha que as duas casas brancas, opostas nas quinas do tabuleiro sejam descartadas (figura 25). Será possível colocar 31 dominós de tal maneira que todos os 62 quadrados restantes sejam sobrepostos? Se possível, mostre ao menos uma solução. Em caso contrário, prove que isso é impossível.

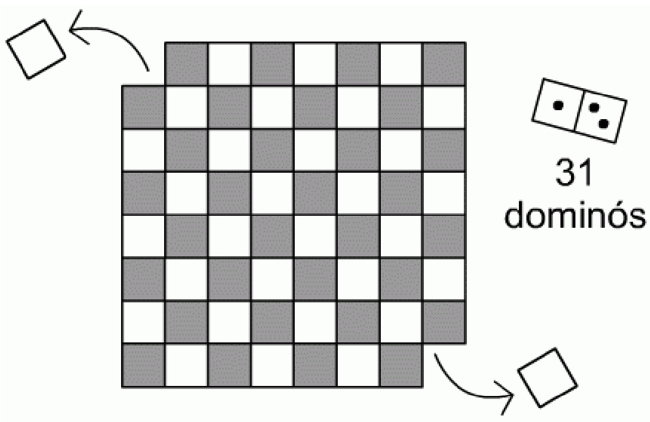

Figura 25 - O tabuleiro de xadrez sem as casas brancas das bordas

3.2.2. A abordagem científica e a matemática

Segundo Singh (1997), existem duas abordagens para tentar solucionar o desafio do tabuleiro de xadrez mutilado: uma científica e outra matemática[4]. A

4 A comparação é pertinente mas os termos usados pelo autor demandam uma revisão crítica. Não se pode afirmar que a abordagem matemática não seja “científica”. Embora formal, a matemática também é uma ciência. Além disso, Singh (1997) parece

relação entre a evidência observacional e a generalização científica tem um caráter 1 - indutivo. Já a abordagem matemática tem um caráter 2 - dedutivo. Na geometria euclidiana, por exemplo, todos os teoremas propostos são demonstrados a partir de axiomas e postulados.

1 - Abordagem indutiva - Por meio da experimentação, com o tabuleiro e os dominós disponíveis, o indivíduo tenta resolver o problema. Existem muitos arranjos diferentes e só há como explorar um pequeno grupo deles. Sem sucesso, depois de tentar preencher o tabuleiro de diversas formas, com várias configurações, levanta-se a hipótese de que não é possível preenchê-lo. Conforme aponta Singh (1997, p.44), "a conclusão de que a tarefa é impossível é uma teoria baseada na experimentação, mas o cientista terá que viver com a hipótese de que um dia sua teoria poderá ser derrubada."

2 - Abordagem dedutiva - Uma prova de caráter matemático não admite incertezas, ela é absoluta, eterna e incontestável. Ela começa com uma série de axiomas e, passo a passo, após uma série de inferências, chega-se a uma conclusão. Um argumento deste tipo é o seguinte:

Quando os dois quadrados brancos (1 x 1) são retirados do tabuleiro, restam 62 quadrados dos quais 32 são pretos e 30 são brancos. Cada dominó cobre dois quadrados adjacentes sempre de cores diferentes, um branco e um preto. Não importa qual for o arranjo, n dominós vão sobrepor sempre a mesma quantidade de quadrados brancos e pretos. Logo, 30 dominós cobrirão 30 quadrados brancos e 30 pretos. Porém, não será possível incluir o 31º dominó. Duas casas pretas (não adjacentes) estarão descobertas. Tendo em vista que o último dominó não pode ser partido em dois quadrados, é impossível cobrir todo o tabuleiro com os dominós.

3.2.3. Experimento com alunos

Para viabilizar a exploração manual das peças, foram apresentados um tabuleiro de xadrez e 31 retângulos (dominós), obtidos por meio de cortes

---

desconsiderar o fato de que as ciências factuais (naturais e sociais) podem mesclar os métodos indutivo e dedutivo, tal como ocorre no modelo hipotético-dedutivo, proposto por Popper (1977).

precisos em papelão tipo paraná. As casas brancas das pontas não foram recortadas e retiradas mas sobrepostas por dois quadrados de papel laranja (um para cada casa), com o auxílio de uma fita adesiva. Além do material concreto (figura 26), disponibilizou-se uma folha de papel com um desenho semelhante ao da figura 25.

Figura 26 - O tabuleiro de xadrez e os 31 dominós empilhados

Ao serem questionados se seria possível colocar os 31 dominós no tabuleiro, sobrepondo os 62 quadrados restantes, os participantes forneceram as seguintes respostas:

Participante [1] - Inicialmente, sem tocar nos dominós, ele disse: "Eu acho que não vai dar, vai sobrar um. Logo de início eu pensei que ia sobrar um quadradinho, mas não tenho certeza". Aparentando sentir dificuldades para resolver o problema apenas olhando para a figura, ele decidiu pegar os dominós e arriscar uma configuração específica. Na primeira tentativa, colocou vários deles no tabuleiro, numa conformação em espiral, (figura 27A). "Devia ser porque sobram dois, mas eu não sei como juntar esses dois." Perguntei a que "dois" ele se referia, curioso para saber se havia prestado atenção nas cores. Respondeu-me apenas "dois quadradinhos", apontando-os no tabuleiro. Sugeri então que ele tentasse explorar novas configurações, reorganizando os dominós de outras maneiras, para ter novas idéias. Em uma de suas tentativas posteriores, sobraram novamente dois quadrados pretos (figura 27B). "Consegui deixar eles perto, mas não juntos. Acho que não vai dar porque sempre vão sobrar duas (casas) pretas." Agora seu discurso fazia referência às cores. Não eram mais "dois quadrados" que sobravam, mas dois quadrados pretos. Comentei que, de fato, na hora de colocar o 31º dominó sobravam duas casas pretas, contudo a questão era: “por que sobravam duas pretas?” Sorrindo, ele apontou para os dois quadrados descartados e me informou o motivo. Tratava-se das duas casas brancas retiradas previamente. “Pois é, agora que eu entendi. Se eu tivesse tirado duas pretas também não ia dar certo.”

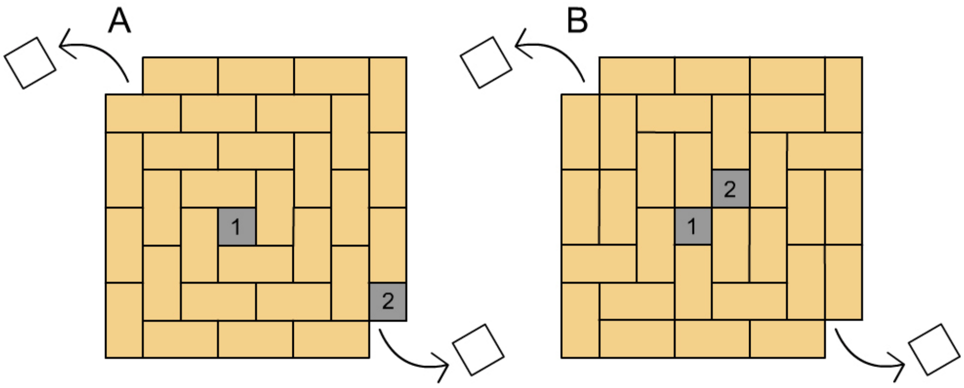

Figura 27 - Arranjos do participante [1]

Participante [2] - Uma vez descrito o enunciado, apenas olhando para a figura do desafio, ele apresentou um raciocínio dedutivo com base em cálculos. “Eu acho que esse pedaço aqui, por ser um quadrado perfeito. Sei lá... 36 tem raiz (inteira), né? Sei lá, esse quadrado aqui do meio você vai conseguir preencher certinho mas aí você vai ficar com números ímpares (de quadrados) aqui (nas bordas). Aí vai ficar sobrando... Acho que talvez não dê certo.“ Embora um pouco confuso, com alguns ajustes o seu raciocínio fazia sentido. Ele visualizou um quadrado maior 6 x 6 no meio do tabuleiro, que continha 36 casas (quadradinhos 1 x 1). Todo quadrado n x n, com n par pode ser preenchido por dominós. As 36 casas do quadrado 6 x 6 poderiam ser preenchidas por 18 dominós. O tabuleiro ficaria dividido em três regiões (figura 28): o quadrado 6 x 6 no centro e duas faixas de quadradinhos em formato de L, separadas e giradas 180º, uma em relação à outra. Cada faixa destacada conteria 13 casas, um número ímpar. Logo, não haveria como preenchê-las com os dominós restantes. Seis dominós seriam colocados em cada uma das faixas, mas o 31º dominó iria sobrar juntamente com duas casas pretas, separadas. Confirmei sua conclusão de que nem todos os dominós seriam encaixados neste arranjo específico, mas lembrei que para generalizar a resposta ele deveria prosseguir e buscar mais argumentos. Relutante em testar outras configurações por ensaio e erro, ele desistiu de ir adiante e solicitou a resposta.

Insisti. Pensei em ajudá-lo com dicas e perguntas, de modo que ele pudesse participar da descoberta. Disse-lhe que, para começar, eu investigaria se a quantidade total de quadradinhos do tabuleiro era a mesma dos contidos nos dominós. A resposta veio a seguir. “É o mesmo número. São 31 pares, mas não pode ser mudada a disposição. Eu acho que é isso. Você tirou um daqui (um quadrado branco) e um daqui (outro quadrado branco). Mas se tivesse tirado os dois juntos, né? Porque os dominós não podem ser quebrados. (...) Se tivesse tirado esses dois daqui por exemplo (adjacentes), talvez desse certo.” Valeu a pena insistir. Havia um avanço em sua linha de pensamento. Procurei manter o diálogo. De fato, duas casas brancas tinham sido retiradas. Perguntei se ele notara quantas casas pretas e quantas casas brancas haviam restado no tabuleiro após a mutilação. A resposta foi negativa. Ele não havia pensado em termos de cores, contudo seu palpite estava correto. Se fossem retiradas duas casas vizinhas, elas seriam uma preta e outra branca. Neste caso, todos os arranjos seriam válidos.

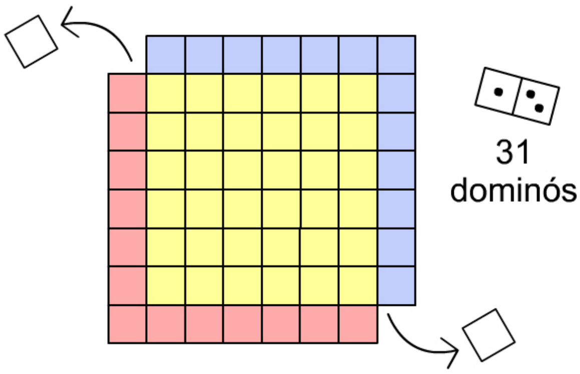

Figura 28 - Divisão do tabuleiro em 3 partes segundo o participante [2]

Participante [3] - Em princípio ele notou e me disse que o número de casas no tabuleiro era o dobro da quantidade de dominós. Seu palpite inicial era de que todos os dominós seriam alocados sem problemas. No entanto, após sete minutos de diversas tentativas, sua previsão ainda não havia se concretizado. Perguntei se ele gostaria de obter auxílio e a resposta foi positiva. “Uma dica, por favor.” Tentei resgatar uma linha de raciocínio interrompida para guiá-lo a partir dali. Disse-lhe que eu iria refazer um de seus arranjos prévios e depois alterá-lo aos poucos. A figura 29A mostra o arranjo escolhido. No tabuleiro estavam presentes 30 dominós, empilhados numa malha retangular. Solicitei que ele atentasse para o fato de que dois quadrados pretos estavam sobrando, razão pela qual não havia como encaixar o 31º dominó. Pedi que ele deslocasse ou rotacionasse sempre um novo dominó adjacente a um dos quadrados pretos restantes, de maneira lenta e gradual, sem afetar os outros dominós (figura 29B e 29C). Por indução natural, tentei fazê-lo enxergar que os dois quadrados pretos apenas se deslocavam, estando sempre aparentes. Todavia, ele não parecia disposto a continuar interagindo, motivo que me levou a não mais solicitar a sua participação e, então, explicar o resto da resposta.

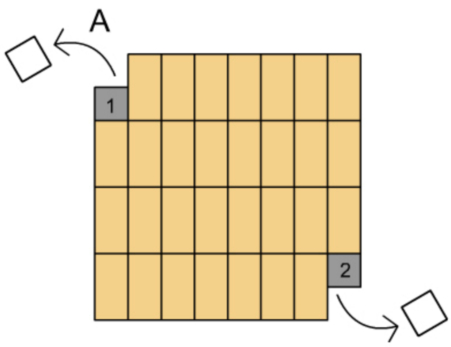

Figura 29 - Arranjo inicial do participante [3] e mudanças sugeridas

3.3. O desafio dos tetraminós e o retângulo 4 x 5

3.3.1. Sobre o desafio dos tetraminós

Enunciado por Gardner (1986) e Golomb (1996), o desafio em questão é outro clássico da matemática recreativa que envolve o preenchimento de uma figura por poliminós[5].

Conforme mostra a figura 30, será viável preencher todo o retângulo com os cinco tetraminós dados? As peças podem ser transladadas, refletidas (viradas) ou rotacionadas para os encaixes. Se possível, mostre ao menos uma solução. Em caso contrário, prove que isso é impossível.

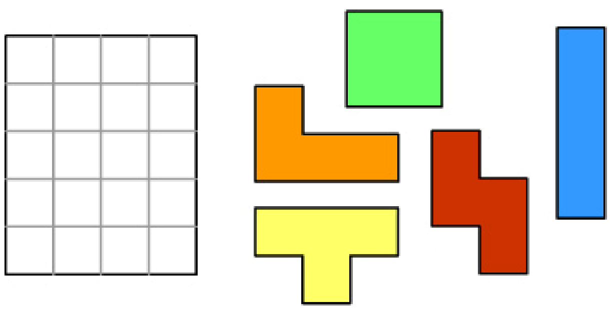

Figura 30 - Retângulo 4 x 5 e os cinco tetraminós

5 Poliminós são figuras formadas por quadrados de mesmo tamanho, adjacentes uns aos outros. Os poliminós assumem diferentes nomes de acordo com a quantidade de quadrados. Os mais conhecidos são os monominó, dominó, triminós, tetraminós e pentaminós. Ao todo, são cinco tetraminós com formatos diferentes.

3.3.2. Relação com o desafio anterior

Com o intuito de resolver o desafio, em primeiro lugar, é preciso verificar se a área total do retângulo equivale à area total das peças. Cada peça é dividida em quatro quadrados. Como são cinco peças no total, existem 4 x 5 = 20 quadrados. O retângulo, por sua vez, é dividido numa grade de quatro linhas por cinco colunas de quadrados. Novamente, 4 x 5 = 20. Aparentemente, a tarefa de colocação das peças é viável.

No desafio anterior, 31 dominós deveriam ser dispostos sobre um tabuleiro com 62 quadrados. A igualdade de áreas foi confirmada, porém a montagem era impossível. O raciocínio levava em conta as cores das casas do tabuleiro. Por terem sido retiradas duas casas brancas, o tabuleiro havia ficado com 30 casas brancas e 32 pretas. Como cada dominó deveria obrigatoriamente ocupar uma casa branca e outra preta, o 31º dominó ficava de fora. Faltava uma casa branca e sobrava outra preta.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado ao desafio dos tetraminós. O retângulo é dividido em uma malha quadriculada. Se seus quadrados forem preenchidos por um padrão xadrez, ele vira uma espécie de tabuleiro com 20 casas, 10 brancas e 10 pretas. Tal como no desafio anterior, cada peça, ao ser disposta sobre o tabuleiro, preenche um número específico de casas de cada cor, qualquer que seja a posição ocupada (figura 31). Mesmo considerando todas as rotações e reflexões possíveis, quatro das cinco peças sempre ocupam duas casas brancas e duas casas pretas. Esses quatro tetraminós, ao serem colocados sobre o tabuleiro, fazem sobrar duas casas pretas e duas brancas mas como o último tetraminó (em formato de T) ocupa três casas de uma cor e uma de outra cor, a montagem é impossível.

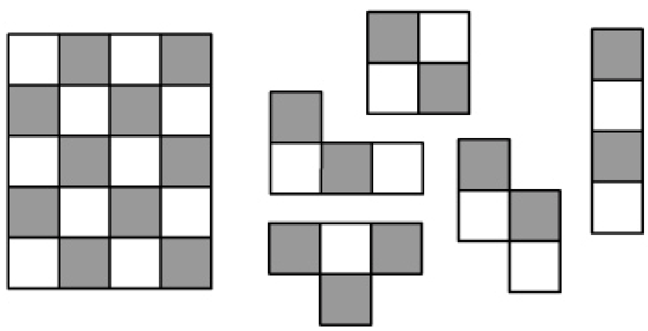

Figura 31 - Retângulo 4 x 5 e os cinco tetraminós em padrão xadrez

No experimento com alunos, minha intenção era investigar se os participantes traçariam por conta própria um paralelo com o desafio anterior. Os dois desafios pertencem a uma mesma classe de problemas, contudo o esforço de generalização não é gratuito. As características comuns são mascaradas por um conjunto de diferenças, tais como, por exemplo:

→ No desafio prévio, o tabuleiro possuía um padrão xadrez. No desafio atual, há apenas um retângulo (cuja malha quadriculada poderia ter sido omitida). Será necessário imaginar esse retângulo com casas pretas e brancas, alternadas.

→ No desafio prévio, dois quadrados foram descartados do tabuleiro. No desafio atual, nenhum quadrado foi retirado do retângulo. Como a raiz do problema anterior se resumia ao descarte dos quadrados, o aluno pode concluir, equivocadamente, que desta vez não haverá problemas de encaixe.

→ No desafio prévio, havia várias peças (31 dominós) iguais (congruentes) presentes. O desafio atual traz poucas peças (cinco tetraminós) e todas são diferentes (não congruentes nem semelhantes). Como relacioná-las com as peças do desafio anterior?

3.3.3. Experimento com alunos

Para viabilizar a manipulação direta das peças, foi preparada uma cartela retangular, de papelão tipo paraná, com diferentes impressões em cada face. Na frente da placa havia uma malha quadriculada 4 x 5 simples. No verso havia outra malha, de tamanho equivalente, porém preenchida por um padrão xadrez (figura 32). A idéia era apresentar, em primeira instância, a malha simples, sem cores. Caso o aluno permanecesse com dificuldades para resolver o problema, as posições seriam trocadas, numa tentativa de resgatar a lógica do desafio anterior.

Paralelamente, foram apresentados cinco tetraminós, cada um de cor diferente, feitos com papelão e borracha EVA (figura 33). Além do material concreto, havia um desenho semelhante ao da figura 17 numa folha de papel.

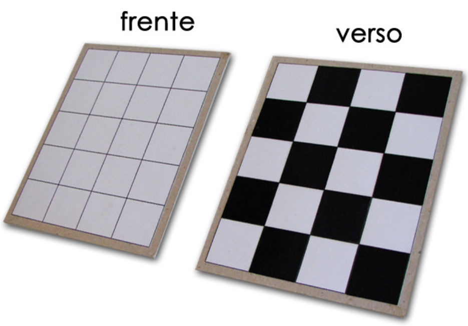

Figura 32 - Frente e verso da superfície retangular

Figura 33 - Cinco tetraminós

Ao serem questionados se seria viável preencher todo o retângulo com os cinco tetraminós dados, os participantes forneceram as seguintes respostas:

Participante [1] - “Em termos de área, eu já vi que dá.” Conforme o previsto, a primeira providência foi a comparação das áreas. O teste atuava como um filtro. Se elas não fossem iguais, o problema terminava ali. A mesma linha de raciocínio havia sido útil nos dois desafios anteriores (corte estranho e tabuleiro mutilado). Porém, a resposta deveria depender das formas das peças, razão pela qual ele começou a experimentar encaixes em diferentes arranjos, seguindo uma abordagem indutiva. Sua primeira tentativa (figura 34A) veio acompanhada de um pensamento em voz alta. “Pô, tem que dar porque sobram quatro pecinhas, mas não tem como botar outra. (...) Por quê não? Não sei. Vou pensar. Vamos ver de outro jeito.” Ao explorar novos encaixes, ele procurou descobrir quais peças poderiam ou não permanecer em determinadas posições. “Essa aqui não pode ficar no canto. Isso também não pode acontecer Nem isso. Não, essa aqui tem que ficar no canto.” Bastava colocar três peças sobre o retângulo para perceber que as próximas não iriam se encaixar no espaço disponível. Após o quarto arranjo (figura 34B), ele optou por dar uma pausa.

“Não vai dar. Não vai. Agora, por quê? Tem uma explicação lógica, né? Você quer. Deixa eu pensar um pouco.”

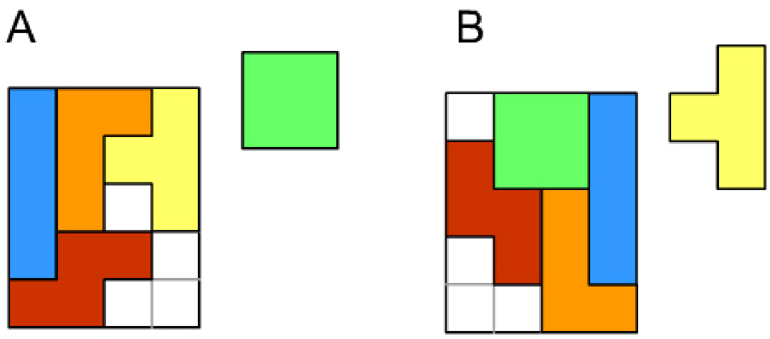

Figura 34 - Arranjos do participante [1]

Sua próxima dúvida foi sobre os tetraminós. “Essas não são todas as peças que você pode fazer com quatro (quadrados), né? Tem mais uma. São todas?” Eu disse que sim. Eram todas possíveis. Ao conferir, concordou comigo, porém admitiu não ter uma explicação para o fato de elas não se encaixarem dentro do contorno. Perguntei se ele queria ajuda e, com sua autorização, troquei a face do retângulo, deixando à mostra o padrão xadrez. A mudança foi válida. O interesse em prosseguir havia retornado.

“Ah tá, deixa eu tentar. Agora sim. (...) Tem dez (casas) pretas e dez brancas. Os dominós encaixam aqui.” Sorrindo, ele arriscou um palpite. “O número de pretas e brancas tem que ser um múltiplo de quatro?” Respondi que não. Não necessariamente. Ficou clara para mim sua intenção em descobrir a quantidade ideal de quadrados pretos e brancos para viabilizar a montagem. O desafio anterior foi lembrado, mas a mudança dos dominós para os tetraminós ainda representava um obstáculo. Em seguida, ele deixou a peças de lado, se debruçou sobre a mesa e olhou atentamente para a figura. Após cerca de 32 segundos, empilhando peça por peça, disse-me: “Esse aqui (vinho), ele precisa de duas pretas e duas brancas. Esse (verde), de duas pretas e duas brancas. Esse (azul), de duas pretas e duas brancas. Duas pretas e duas brancas (laranja). Três brancas e uma preta (amarelo).” A razão das peças não se encaixarem foi revelada. Segurando o tetraminó amarelo com sua mão direita, disse-me: “É por causa desse aqui. Eu preciso de onze (casas) brancas e nove pretas.”

Expliquei que o tetraminó amarelo também poderia ocupar três quadrados pretos e um branco, dependendo de sua orientação. Se todos os outros tetraminós fossem colocados antes, sempre sobrariam dois pretos e dois brancos, inviabilizando a montagem. Dei-lhe os parabéns por ter sido persistente e recebi uma confirmação sobre a relevância do desafio anterior. Apontando para o desenho do tabuleiro de xadrez mutilado, ele completou: “(acertei) graças a esse aqui. Eu pensei nesse aqui.”

Participante [2] – Em princípio ele se mostrou confiante de que ao menos um arranjo poderia preencher o retângulo. “Acho que existe um jeito.” Depois de algumas tentativas, me apresentou um raciocínio. “Eu tô pensando num lance: tipo essa peça aqui (verde). Ela sempre tem que ter dois quadrados de lado (2 x 2) e aí eu não tenho como preencher os quadrados.” Em seus arranjos, sempre que ele colocava os tetraminós sobre a cartela, a peça verde ficava de fora. Seu entusiasmo não durou muito e em seguida pediu ajuda: “Vai, diz aí.” Troquei a face da cartela e sugeri que ele tentasse novamente. Ao abandonar o tetraminó em forma de Z (vermelho) e colocar as outras peças sobre o retângulo, falou que a quantidade de quadrados pretos e brancos das lacunas não era a mesma. “Eles preenchem de forma desigual os quadrados, o número de pretos e de brancos. Neste caso que eu coloquei, eles preenchem mais rapidamente os brancos do que os pretos. (...) É uma coisa estranha porque esse preenche dois e dois (laranja), esse dois e dois (verde), esse dois e dois (azul). Esse (amarelo) sempre preenche três de um e um de outro.[6]” A solução estava próxima, porém ainda restava contar os quadrados relativos à peça que ele havia descartado, o tetraminó Z. Estimulei-o, indagando: e essa peça que está faltando? Em seguida deu a resposta: “Essa também preenche de forma ‘regular’. Então o problema ‘estaria’ nessa peça aqui (tetraminó T), talvez. Das duas uma: ou eu teria que ter uma peça que contrabalançasse essa (tetraminó T), preenchendo as pretas mais rapidamente do que as brancas, ou eu teria que eliminar (substituir) essa por alguma que seguisse essa regra aqui, de ocupar e desocupar.” Por fim, ele me explicou que se eu tivesse apresentado a face impressa em padrão xadrez logo de início, a solução não teria sido encontrada naquele intervalo de tempo. “Talvez eu demorasse muito para me dar conta do preto e do branco.” Em sua opinião, a troca de uma face pela outra representou um sinal de que ele deveria buscar uma relação com o desafio anterior. Fiquei surpreso com seu ponto de vista pois eu imaginara que o grau de dificuldade do problema seria o mesmo em ambos os casos.

Participante [3] - Sua primeira reação foi de desconfiança. “É, outra pegadinha.” Ele contou o número de quadrados e disse que o retângulo tinha 20 quadrados, enquanto as peças tinham 21. Aconselhei-o a conferir o número de quadrados dos tetraminós. Ele havia se enganado em relação à peça amarela, pensando que era composta por cinco quadrados. Refeita a contagem, confirmou: “A princípio é possível.” O primeiro teste, das áreas, havia sido concluído. Porém, com as peças em mãos e um sorriso no rosto, ele mudou de opinião: “Não deve ser possível, mas como sou teimoso, eu vou tentar.” Em cerca de dois minutos, manipulando as peças, ele informou que sentia falta de uma peça semelhante à amarela. “Tá, eu tô sentindo muita falta de uma peça a mais dessa. Por incrível que pareça, não sei se eu tô indo pelo (caminho) certo. Cismei.” Propus que ao menos quatro peças fossem colocadas no tabuleiro.

Segundo ele, se um novo tetraminó em forma de T substituísse uma das outras peças (o quadrado 2 x 2), haveria algumas soluções possíveis. De fato, a figura 35 mostra três arranjos possíveis nessa situação, obtidos por ensaio e erro. “Porque se eu usar outras peças, elas vão ficar separadas por quadradinhos.” Sua hipótese era baseada em poucas tentativas, sendo a generalização precoce. Após quatro peças terem sido colocadas no tabuleiro, a região desocupada podia ser ou não contígua, dependendo da montagem. A figura 36 mostra por meio de três exemplos que se o tetraminó T (amarelo) fosse substituído por outro do tipo L (laranja), novos arranjos também seriam válidos.

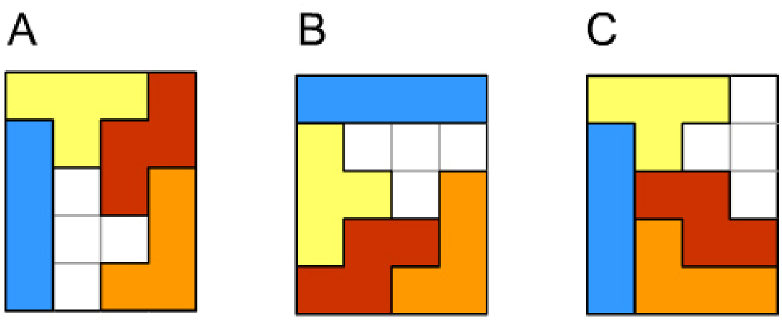

Figura 35 - Exemplos de encaixes possíveis caso houvesse dois tetraminós T

6 Ao contar os quadrados pretos e brancos, ele segurava e levantava as peças do tabuleiro.

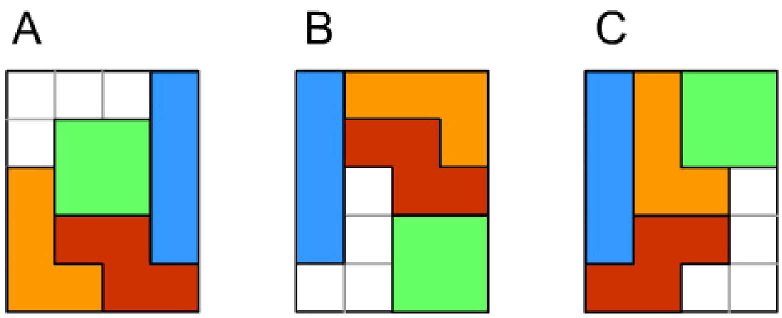

Figura 36 - Exemplos de encaixes possíveis caso houvesse dois tetraminós L

Ao rever a cena pelo vídeo, dei-me conta de que seu estranhamento em relação ao tetraminó T deveria ter sido interpretado por mim como um estímulo para fornecer-lhe uma dica. A partir daquele instante, teria sido oportuno trocar a face da cartela e pedir que ele tentasse preencher novamente o tabuleiro (cartela com o padrão xadrez) de modo a deixar uma área contígua vazia no formato do tetraminó T. Qualquer que fosse a montagem, a região desocupada sempre teria três quadrados brancos e um preto ou três quadrados pretos e um branco. Outra sugestão seria deixar um espaço vazio em forma do tetraminó L. Neste caso, ficariam à mostra dois quadrados brancos e dois pretos.

Quando uma peça é colocada sobre o tabuleiro, ela esconde os quadrados que estão embaixo. Consequentemente, tal como pode ser observado na figura 37, mesmo quando não se instrui alguém para isso, talvez seja mais fácil perceber a quantidade de quadrados de cada cor que cada peça ocupa, não por sua inclusão no tabuleiro e, sim, por sua falta. Aparentemente, meu repertório de alternativas para a condução do aprendizado dos alunos ganhou uma nova opção e, por mais simples que possa parecer, a idéia não me ocorreria sem que eu tivesse prestado atenção ao participante [3]. Em síntese, ele me ensinou a ensinar.

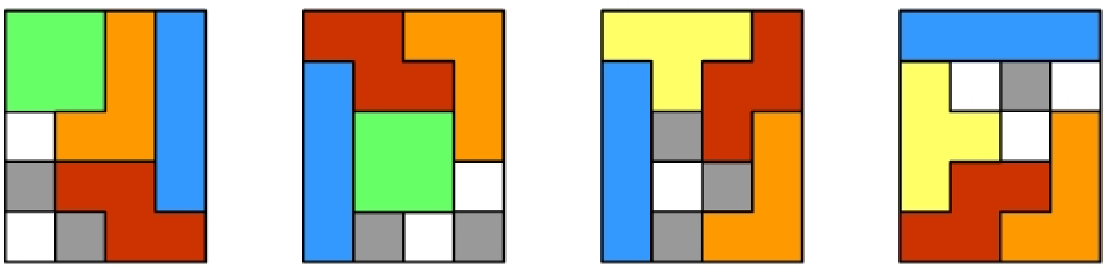

Figura 37 - Espaços vazios com os formatos dos tetraminós

Na sequência da atividade, ele testou outras configurações com quatro peças e se deu conta de que em muitos casos as peças ficavam separadas por quadrados isolados. “Três. Sobrou uma, separada.” Ou ainda: “Todas separadas.” Perguntei se ele estava disposto a continuar por conta própria ou queria uma dica. “Vou ser um pouco mais insistente. Tenho que conseguir.” Três minutos se passaram para que ele concluísse que não seria mesmo possível. Perguntei se ele tinha alguma explicação, se enxergava alguma lógica por trás daquilo. “Ah, não sei se minha lógica é muito certa, né? Mas por mais que eu tire alguma das peças, seja ela essa ou outras, se sobrarem juntas é nesse formato.” Manipulando as peças, ele tentou me mostrar uma configuração específica em que o tetraminó L e o alongado (azul) permaneciam adjacentes. Tanto a figura 35A quanto a 35C contêm os dois tetraminós nas posições por ele especificadas.

Informei que eu iria executar uma modificação, uma espécie de “upgrade”. Troquei a face da cartela, revelando o padrão xadrez. Ao perceber a mudança, sorriu e aparentou entusiasmo. “Vou sonhar com esses quadrados agora.” Novamente pegou as peças e prosseguiu com os arranjos. “Estou tentando achar a lógica do negócio, mas eu estou quebrando a cabeça. Não estou conseguindo. A diferença do preto e do branco. Malditos quadrados pretos e brancos. (...) O número de quadrados pretos é igual ao número de quadrados brancos.” Conforme eu havia previsto, ele se mostrava tentado a fazer uma conexão com o desafio anterior. Inicialmente, quando o número de casas pretas e brancas era igual, os dominós cobriam o tabuleiro de xadrez. Depois, a quantidade de casas brancas ficou menor do que a de casas pretas e eles não puderam mais ser ali dispostos. Então por que a mesma condição não seria válida para os tetraminós? Em que medida o participante [3] havia compreendido a estrutura do desafio anterior?

“Tá ok, desisto.” Mas já? Insisti. Disse-lhe que eu ainda iria fornecer outra pista (a última). “Isso.” Deixei o tetraminó T de lado e com as outras quatro peças modifiquei sua última configuração. Coloquei aqueles tetraminós sobre o tabuleiro e solicitei que ele prestasse atenção às cores dos quadrados das lacunas. “Duas pretas e duas brancas.” Troquei as peças de lugar e mostrei novos arranjos. A quantidade de quadrados de cada cor permanecia. ”Duas pretas e duas brancas.” Continuei trocando as posições, executando reflexões e rotações dos tetraminós até que em determinado momento ele resolveu me interromper. Com o tetraminó T nas mãos[7], comentou que para poder encaixar aquela peça seria necessário ter um conjunto de casas pretas e brancas em quantidade diferente das que estavam visíveis no tabuleiro. “Ela ocupa sempre três pretas e uma branca. Mesma lógica do anterior.” Confirmei sua resposta e acrescentei que qualquer das outras peças sempre iria ocupar duas pretas e duas brancas. Por mais dicas que eu lhe tivesse oferecido, o último passo do raciocínio ainda ficou por sua conta.

3.4. O jogo *Blokus* e suas peças: do monominó aos pentaminós

3.4.1. Sobre o *Blokus*

Blokus é um jogo abstrato de conexão, inventado pelo francês Bernard Tavitian e comercializado pela empresa Sekkoïa. Embora não esteja disponível no Brasil, o jogo é sucesso em 35 países. Desde o lançamento do produto original em fevereiro de 2000 até o término de 2007[8], cerca de três milhões de unidades foram vendidas.

Alguns conceitos básicos de geometria parecem brotar das situações-problema que os jogadores do *Blokus* enfrentam. Além disso, tanto a habilidade de visualização quanto os raciocínios lógico dedutivo e indutivo são constantemente requisitados.

Existem diferentes versões comerciais do *Blokus*, das quais duas são destacadas aqui:

1 - Versão clássica - traz um tabuleiro de 20 x 20 quadrados e quatro conjuntos distintos de peças, sendo cada conjunto identificado por uma cor: azul, amarelo, vermelho e verde. Podem participar de dois a quatro jogadores.

2 - Versão reduzida - é mais compacta do que a original, pois vem com um tabuleiro de 14 x 14 quadrados e dois conjuntos distintos de peças, disponíveis nas cores laranja e violeta. Apenas dois jogadores podem participar, razão pela qual o jogo recebe o nome de *Blokus duo*.

7 Em várias ocasiões, notei que os participantes pegavam e moviam as peças para falar delas, em vez de simplesmente apontá-las ou citá-las. Nas conclusões das cadeias de raciocínio, o acesso ao material concreto pareceu-me indispensável.

8 Conforme descrito no site do jogo: http://www.blokus.com/en/presentation.html

Em ambas as versões, cada jogador[9] dispõe de um conjunto de 21 peças caracterizadas pelos poliminós de 1 a 5 quadrados (figura 38). Ao todo são:
1 monominó + 1 dominó + 2 triminós + 5 tetraminós + 12 pentaminós = 21 poliminós.

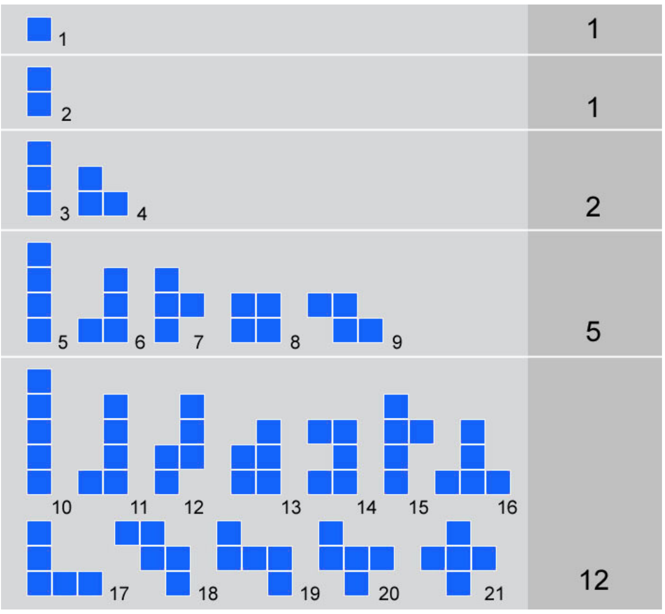

Figura 38 - As peças do *Blokus* são os poliminós de 1 a 5 quadrados

Objetivo

Seja qual for a versão do jogo, o objetivo de cada participante é ocupar a maior parte disponível no tabuleiro com peças de sua cor, de preferência utilizando todas. Será vencedor quem conseguir ocupar, com suas peças, o maior número de quadrados cinzentos.

Regras e restrições

Na versão clássica, ao iniciar o jogo, todo participante deve obrigatoriamente posicionar uma peça numa das quatro quinas do tabuleiro, conforme mostra a figura 39. A ordem de jogada é azul, amarelo, vermelho e verde, no sentido horário.

9 Na versão clássica, há também um modo de jogo para dois participantes. Cada jogador controla dois conjuntos de peças, em vez de apenas um. O primeiro usa as peças azuis e vermelhas enquanto o segundo usa as amarelas e verdes.

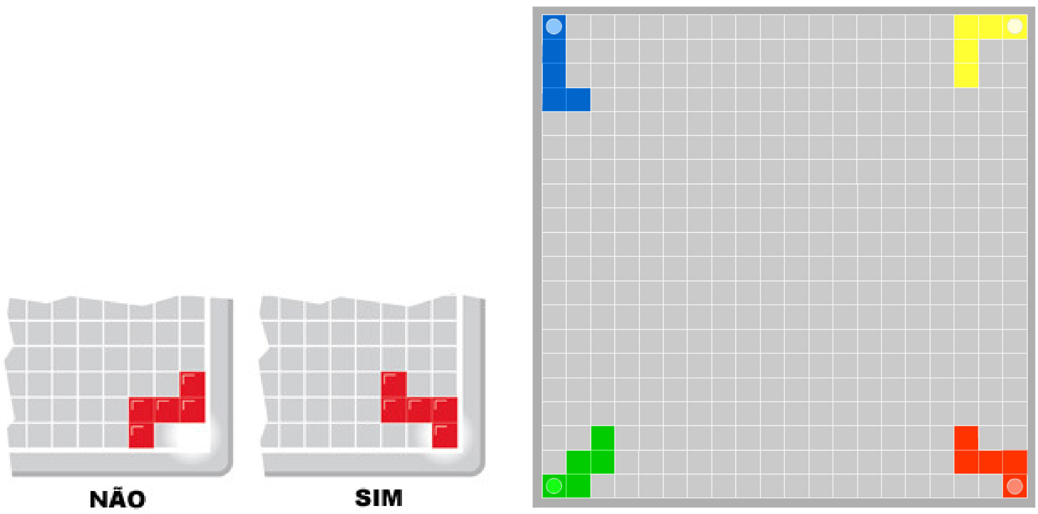

Figura 39 - A primeira jogada

No *Blokus duo* são considerados outros pontos de partida, indicados no meio do tabuleiro por dois círculos. Neste caso, primeiro joga a cor violeta e depois a laranja. O fato de os jogadores começarem próximos aumenta a ocorrência de lances arriscados e agressivos. A figura 40 traz um exemplo dos primeiros movimentos na versão reduzida.

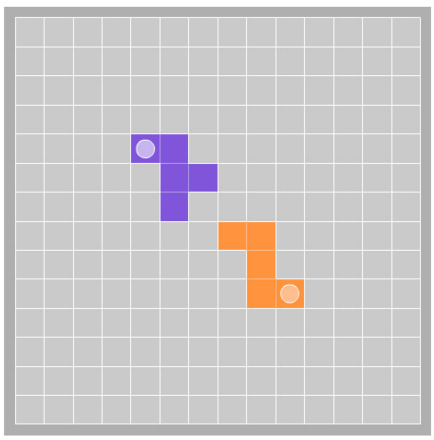

Figura 40 - Exemplo das jogadas iniciais no *Blokus duo*

Toda nova peça colocada no tabuleiro deve encostar em, ao menos, uma outra da mesma cor mas as duas só podem ser ligadas pelas quinas - vértices, nunca pelos lados - arestas (figura 41). Uma vez colocada no tabuleiro, a peça não pode mais ser retirada.

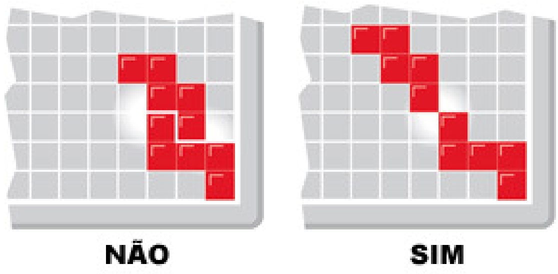

Figura 41 – Regra de conexão

A regra que impede a colocação de poliminós adjacentes de mesma cor tem uma relação direta com o teorema das quatro cores. Poliminós de cores diferentes podem ser encostados lado a lado, mas os de mesma cor devem ser unidos somente por seus vértices. Na medida em que o jogo avança, as peças dos adversários se misturam no tabuleiro, formando curiosas composições plásticas. A figura 42 traz exemplos de disposições de peças ao término de dois jogos.

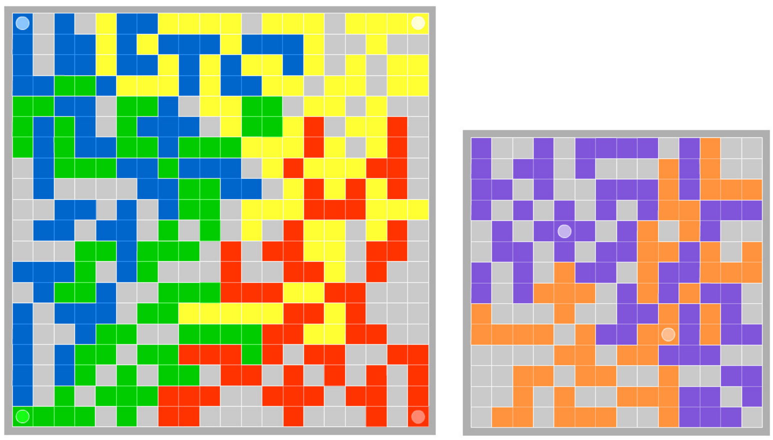

Figura 42 - Tabuleiros do *Blokus* clássico e reduzido com peças

Fim do jogo

Quando um jogador é bloqueado e não tem como colocar mais peças no tabuleiro, ele deve passar a sua jogada para o próximo da fila. Posteriormente, os outros participantes continuam na ordem normal de jogada até que ninguém mais possa adicionar peças no tabuleiro. Terminado o jogo, todos devem verificar se sobraram peças suas. Cada quadrado das peças restantes conta como um ponto negativo. Se todas as 21 peças tiverem sido colocadas no tabuleiro, o jogador ganha um bônus de 15 pontos. Este bônus é acrescido de 5 pontos caso a última peça corresponda ao quadrado único. Após os cálculos, os resultados são comparados e o vencedor é anunciado.

3.4.2. Bloqueios e passagens

A principal característica do *Blokus*, como seu nome indica, é o bloqueio, recurso fundamental para limitar as opções de jogadas dos oponentes. Ele ocorre sempre que uma peça de um jogador encosta em outra peça adversária de maneira a restringir futuras ramificações. Para vencer, é importante não apenas saber bloquear os adversários, mas também evitar ser bloqueado, garantindo passagens por entre as suas peças. A seguir, quatro situações são ilustradas na figura 43.

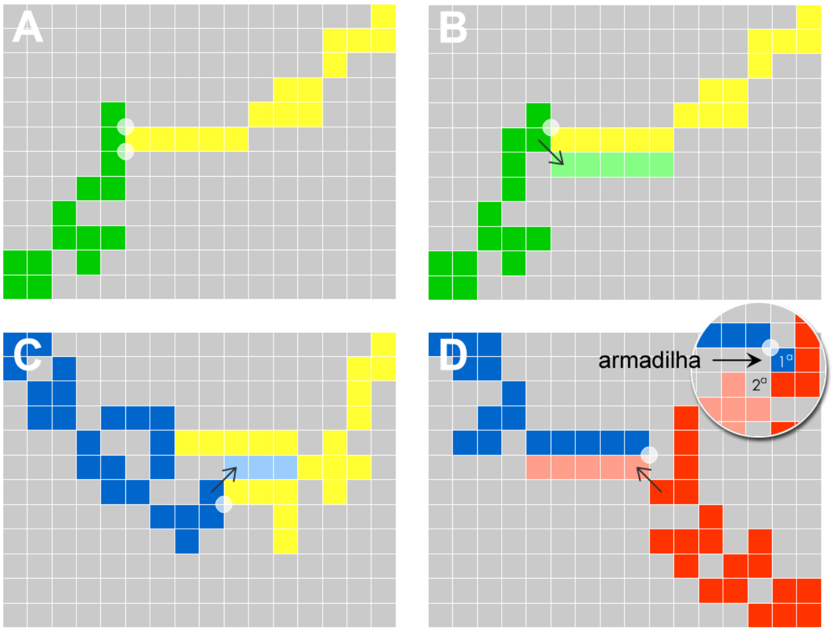

Figura 43 - Diversos exemplos de bloqueio

Na situação A, a última peça verde colocada no tabuleiro bloqueia dois vértices adjacentes da peça amarela mais próxima, retardando seu avanço. Com o intuito de facilitar a visualização na figura, círculos brancos ressaltam os vértices bloqueados.

A situação B é uma variante da anterior. Em vez de bloquear os dois mesmos vértices da peça amarela, o jogador verde opta por obstar apenas um. Tendo em vista que peças de mesma cor jamais poderão ser vizinhas por suas arestas, o jogador verde passa a ter acesso (seta) a uma região inacessível ao amarelo (representada pelo tom verde claro) e vice-versa.

Na situação C, uma das peças azuis bloqueia apenas um vértice do pentaminó amarelo que possui o formato da letra L, rotacionado 180º. Desde que o triminó azul alongado esteja disponível, o participante azul garante uma passagem (seta) pela lacuna entre amarelos (representada pelo tom azul claro). Seria mais apropriado se o azul bloqueasse também o vértice adjacente, logo acima do anterior? Com certeza, não. Este vértice já havia perdido a função de servir como ponto de contato para futuras ramificações. A razão é conhecida. Trata-se da regra que impede a colocação de poliminós adjacentes de mesma cor.

Na situação D, o jogador vermelho bloqueia o azul de uma maneira indireta. Embora não haja um contato direto entre as peças adversárias, para que o participante azul avance por baixo (vértice em destaque), ele deverá dispor obrigatoriamente do monominó. Como se sabe, o quadrado único é de capital importância. Se o azul optar pelo uso do monominó, seu oponente vermelho ainda terá condições de impedir sua passagem na próxima jogada, deixando uma brecha tão reduzida quanto a primeira (armadilha indicada à parte). Como não existe um 2º monominó azul disponível para uso, o bloqueio será inevitável nessa região. De todo modo, o jogador vermelho passa a ter acesso garantido (seta) à região vizinha do azul (representada pelo tom vermelho claro).

Existem bloqueios melhor executados do que outros? Sim. Um jogador iniciante, ciente da necessidade de bloquear seus oponentes é capaz de agir com agressividade e imprudência. Na figura 44, duas novas situações são apresentadas: E e F. Na situação E, após sucessivas jogadas, o jogador verde bloqueou as amarelas mas também ficou bloqueado. Na situação F, o jogador verde bloqueou as amarelas, mas garantiu quatro passagens (setas). Leva vantagem quem souber planejar e aproveitar essas saídas.

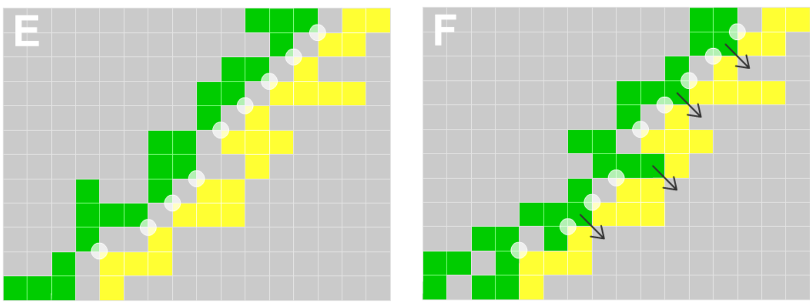

Figura 44 - Outros exemplos de bloqueio

3.4.3. Por uma ocupação racional do espaço

Além dos bloqueios e das passagens, existem vários outros fatores que influenciam a dinâmica do *Blokus*. Quem aceitar participar do jogo e estiver disposto a melhorar seu desempenho, terá a oportunidade de exercitar suas faculdades cognitivas de forma envolvente. O pensamento prático cederá espaço para o pensamento cogitativo e a análise das diversas possibilidades de resolução ampliará o olhar sobre o objeto. A esse respeito, Macedo, Petty e Passos (2000), baseados no construtivismo de Piaget, comentam:

> (...) jogar favorece a aquisição de conhecimento, pois o sujeito aprende sobre si próprio (como age e pensa), sobre o próprio jogo (o que o caracteriza, como vencer), sobre as relações sociais relativas ao jogar (tais como competir e cooperar) e, também, sobre conteúdos (semelhantes a certos temas trabalhados no contexto escolar). Manter o espírito lúdico é essencial para o jogador entregar-se ao desafio da 'caminhada' que o jogo propõe. Como conseqüência do jogar, há uma construção gradativa da competência para questionar e analisar as informações existentes. Assim, quem joga pode efetivamente desenvolver-se. (Macedo, Petty & Passos, 2000, p.23)

Um minuto para aprender e uma vida inteira para dominar. Para se tornar um bom jogador de *Blokus*, é preciso ter interesse, dedicação e tempo disponível. Nenhuma partida é igual à anterior. Quem não tem familiaridade com o jogo encontra dificuldades em resolver os desafios que se apresentam como, por exemplo, a escolha das peças mais adequadas em lances decisivos. Somente após uma série de partidas, as armadilhas passam a ser previstas e combatidas de maneira eficaz. A visão de jogo muda e aprende-se a definir com maior clareza as prioridades para o uso de peças e a ocupação de regiões do tabuleiro. Contudo, se o tempo é uma variável importante para que ocorra essa transformação, de que maneira o *Blokus* pode ser trabalhado com os alunos? Os conteúdos programáticos são extensos e a carga horária das disciplinas é reduzida. Paralelamente, sabe-se que o jogo se destina a dois ou quatro jogadores. Em sala de aula pode estar um grupo de 20 ou, até mesmo, 30 indivíduos e o jogo sequer é vendido no Brasil. Como superar esses obstáculos? O relato de uma situação planejada e vivenciada em classe trará argumentos para uma possível resposta.

Quanto ao tempo dedicado ao jogo, parte-se da hipótese de que, com a ajuda do professor, os alunos podem formar um primeiro palpite sobre como ganhá-lo após uma ou duas partidas. Para isso, um exame prévio de implicações lógicas de suas regras é imprescindível. Não se pretende formar mestres no jogo. As estratégias e táticas são válidas mesmo em seu primeiro nível. Sua estrutura geral de funcionamento é percebida, heuristicamente, à medida que conceitos geométricos são resgatados. Segundo Polya:

> O raciocínio heurístico não é visto como final e estrito mas apenas como provisório e plausível, cujo propósito é descobrir a solução de problema presente. Nós somos com frequência obrigados a usar o raciocínio heurístico. (...) Nós precisamos do provisório antes de obter o final. Nós precisamos de raciocínio heurístico quando construímos uma prova estrita, tanto quanto precisamos de andaimes quando construímos um prédio. (Polya, 2004, p.113)

No xadrez, certas peças valem mais do que as outras. A rainha vale mais do que a torre. A torre vale mais do que o bispo e assim por diante. Essa hierarquia é válida em termos globais, todavia as constantes mudanças no tabuleiro levam a configurações específicas. Pela expectativa de serem promovidos, peões passam a ser muito valiosos ao término das partidas. Os cavalos também podem ser particularmente úteis, chegando a superar os bispos em ataques combinados. Por analogia, o mesmo ocorre no *Blokus*? Existe uma escala global de valores para as peças? Como determiná-la? O xadrez e o *Blokus* são jogos com características muito distintas. Porém, uma referência cruzada entre as regras e o objetivo do *Blokus* parece apontar para uma escala de valores das peças. Neste sentido, deve-se prestar atenção a três fatores:

1 - Se o objetivo principal do participante é ocupar o maior número possível de casas do tabuleiro com quadrados das peças de sua cor, é aconselhável jogar primeiro as maiores. Aparentemente, as peças de maior área são mais valiosas se comparadas com as menores. Em um tabuleiro cada vez mais lotado de peças, passa a não sobrar espaço para os pentaminós e tetraminós restantes. Ainda que permaneçam áreas disponíveis, as chances de encaixe são mínimas.

2 - Há algo de paradoxal na regra que impede a colocação de poliminós adjacentes. Toda peça colocada no tabuleiro elimina um determinado número de quadrados ao seu redor que antes poderiam ser ocupados pelo próprio jogador. Ou seja, a conquista de algumas áreas no tabuleiro implica automaticamente na impossibilidade de cobrir outras (auto-bloqueio). Acresce-se o fato de que tais áreas, a ele inacessíveis, correm o constante risco de serem invadidas pelos

oponentes. Quem “forçar” passagens e for bem sucedido poderá avançar pelas brechas deixadas por outros.

3 - Grande parte dos bloqueios é inevitável. Por mais preparado que seja o jogador, não há como finalizar um jogo sem ter sido bloqueado em diversas ocasiões. Uma maneira de permanecer com muitas opções de jogada é ter sempre vários pontos para ancorar novas peças. É preciso dispor de muitos vértices úteis no tabuleiro. Numa hierarquia, as peças com o maior número de vértices úteis devem valer mais. Na versão clássica do *Blokus*, após o alcance do centro do tabuleiro, a manutenção das opções de jogada é um fator decisivo para a vitória. No *Blokus* duo, como se impõe começar no meio do tabuleiro, o uso imediato dessas peças é fundamental.

Feita a análise, segue-se a síntese. As figuras 45 e 46 trazem novamente as peças do *Blokus*, porém, desta vez com outros itens em destaque. A numeração nada tem a ver com o valor das peças, servindo apenas para facilitar a tarefa de referenciá-las. Quadrados extras aparecem em cinza, agrupados ao redor dos poliminós. Eles mostram as zonas proibidas, automaticamente inacessíveis ao próprio participante. Há destaque também para os vértices úteis, cobertos por círculos brancos. Grosso modo, a quantidade de quadrados cinzentos tem uma relação direta com a extensão do contorno do poliminó. Em princípio, quanto maior for a área em relação ao perímetro, mais valiosa deverá ser a peça. No entanto, nem todas as peças são convexas. Assim, deve haver um desconto para cada ângulo côncavo. O motivo da subtração pode ser conferido nas próprias figuras. Por exemplo, a peça 14 tem perímetro = 12 *L* e conta com 2 ângulos côncavos. Logo, ela possui 12 – 2 = 10 quadrados adjacentes. A peça 21 também tem perímetro = 12 *L* mas traz 4 ângulos côncavos. Neste caso são 12 – 4 = 8 quadrados adjacentes.

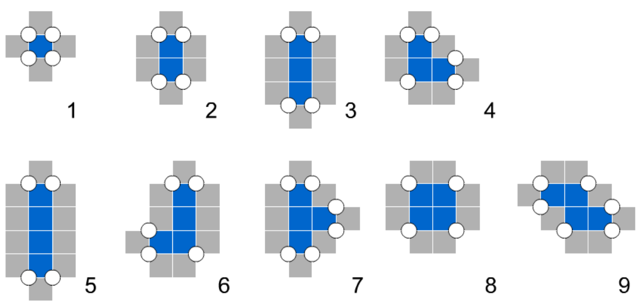

Figura 45 - Monominó, dominó, triminós e tetraminós

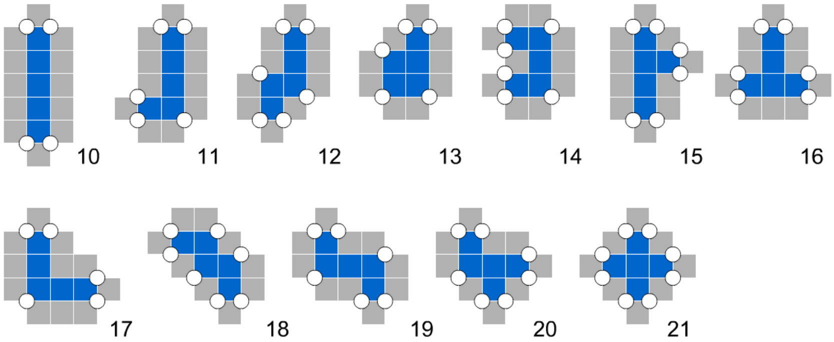

Figura 46 – Pentaminós

Um primeiro cálculo para o índice é sugerido pela razão de ocupação *R* das peças no tabuleiro. Calcula-se o valor de *R* para cada peça fazendo-se a divisão de quadrados utilizados (em azul) pelo número de quadrados perdidos (em cinza). Em termos globais, desconsiderando os vértices úteis, dentre as duas peças do exemplo anterior, a 21 vale mais do que a 14. Ambas são pentaminós, não obstante a peça 21 tem uma “aura auto-bloqueante” menor.

$R14 = 5 / 10 \quad \therefore \quad R14 = 0{,}50$

$R21 = 5 / 8 \quad \therefore \quad R21 = 0{,}63 \qquad R21 > R14$

A razão de ocupação é um parâmetro útil, mas não leva em consideração o potencial de cada peça para suportar novas ramificações. Logo, a quantidade de vértices úteis *V* também deve ser incluída no cálculo. Sugere-se, então, que o valor final de cada peça seja obtido pelo calculo de *R* x *V*. Dessa forma, peças com razão de ocupação equivalente podem ter valores finais diferenciados. É o caso das peças 7 e 8.

$R7 = 4 / 8 \quad \therefore \quad R7 = 0{,}50 \qquad\qquad R7 \times 6 = 3$

$R8 = 4 / 8 \quad \therefore \quad R8 = 0{,}50 \qquad R7 = R8$, mas... $\qquad R8 \times 4 = 2 \qquad I7 > I8$

A tabela, a seguir, mostra os valores intermediários e os resultados dos cálculos para obter o índice global. Isoladamente, à direita, as peças são referenciadas em ordem descrescente de valores. A peça mais valiosa é a 21 e a menos valiosa é a 1.

Uma correção faz-se necessária. A peça 1 é essencial para atravessar barreiras adversárias. Portanto, não faz sentido determinar seu valor antecipadamente. Algo semelhante ocorre com a peça 2. Sabe-se ainda que, se o monominó for posto por último no tabuleiro e todas as outras peças forem colocadas antes, ganha-se o bônus de 5 pontos, além dos 15 extras na contagem final.

Peça	Vértices Úteis (V)	Quadrados Utilizados	Quadrados Perdidos	Razão de Ocupação (R)	I = V x R
1	4	1	4	0,25	1,00
2	4	2	6	0,33	1,33
3	4	3	8	0,38	1,50
4	5	3	7	0,43	2,14
5	4	4	10	0,40	1,60
6	5	4	9	0,44	2,22
7	6	4	8	0,50	3,00
8	4	4	8	0,50	2,00
9	6	4	8	0,50	3,00
10	4	5	12	0,42	1,67
11	5	5	11	0,45	2,27
12	6	5	10	0,50	3,00
13	5	5	9	0,56	2,78
14	6	5	10	0,50	3,00
15	6	5	10	0,50	3,00
16	6	5	10	0,50	3,00
17	5	5	11	0,45	2,27
18	7	5	9	0,56	3,89
19	6	5	10	0,50	3,00
20	7	5	9	0,56	3,89
21	8	5	8	0,63	5,00

Peça	Valor
21	5,00
18	3,89
20	3,89
7	3,00
9	3,00
12	3,00
14	3,00
15	3,00
16	3,00
19	3,00
13	2,78
11	2,27
17	2,27
6	2,22
4	2,14
8	2,00
10	1,67
5	1,60
3	1,50
2	1,33
1	1,00

Valores e cálculos intermediários para se obter o índice global

3.4.4. Relato de uma situação vivenciada com alunos de design

No curso de Design da PUC-Rio, criei uma dinâmica de trabalho inusitada em uma de minhas turmas de Fundamentos de Geometria. Na primeira aula do segundo semestre letivo de 2007, com vistas a "quebrar o gelo", convidei os estudantes para uma partida conjunta de *Blokus*, uma atividade não apenas lúdica, mas também vinculada ao pensamento geométrico. Meu principal objetivo era ganhar a confiança dos alunos e fomentar uma imagem positiva da disciplina deixando-os estimulados a participar das próximas aulas[10].

---

10 Os três participantes voluntários foram alunos desta turma. Até então nenhum deles me conhecia. Tenho a impressão de que aquela partida de Blokus foi um fator

Aproveitei a malha quadriculada do quadro verde disponível em sala de aula para traçar o contorno de um tabuleiro de 20 x 20 quadrados, destinado a quatro jogadores. Na região esquerda do quadro, enumerei e desenhei um conjunto de 21 poliminós na cor branca. A turma foi dividida em três grandes grupos e cada um atuou como um jogador (azul claro, amarelo e vermelho), sendo eu o quarto participante (verde claro). Como estava de pé e muito próximo ao quadro, fiquei responsável por colocar todas as peças no tabuleiro, tanto as minhas quanto as dos outros jogadores[11]. Para que isto acontecesse, era necessário que, em todas as rodadas, os integrantes de cada grupo entrassem em um consenso para decidir qual peça seria jogada e de que maneira ela seria orientada no tabuleiro. Caso ela sofresse alguma transformação, eu precisava saber se esta sofreria uma reflexão ou, então, uma rotação. Qual seria o eixo de reflexão? Horizontal ou vertical? Quais seriam a amplitude e o sentido de rotação? Horário ou anti-horário? Tratar-se-ia de uma transformação combinada? Enquanto tais parâmetros não fossem corretamente especificados, a peça não seria "colocada" por mim no tabuleiro. Toda comunicação deveria ser realizada por via oral e de modo claro, por representantes escolhidos por mim aleatoriamente, dando-se a chance de todos participarem.

À medida que o jogo ia se desenvolvendo, os estudantes ficavam cada vez mais entusiasmados. Quando descobriram que podiam bloquear e serem bloqueados, compreendendo assim o real espírito do jogo, a disputa começou de fato. Quem, do lado de fora, observasse o que acontecia naquela sala, dificilmente iria imaginar que ali estava sendo conduzida uma aula. Para decidir quais peças deveriam ser colocadas, quase todos falavam alto e simultaneamente, pois não parecia fácil entrar em consenso. Entretanto, tal caos aparente demonstrava que os alunos realmente estavam intessados pelo jogo e queriam vencê-lo.

Tudo indicava que a diversão estava sendo garantida, mas e quanto ao aprendizado? Cada aluno era compelido a olhar para o tabuleiro no quadro, analisar a situação de jogo e pensar numa peça ideal. Uma vez escolhida uma peça, ele ainda tinha que imaginar sua posição e orientação sem recorrer a qualquer material concreto. As rotações e reflexões eram produtos de operações mentais. Depois, ainda precisava convencer os colegas de grupo que aquela

---

decisivo para motivá-los, deixando-os à vontade nos experimentos, mesmo cientes de que seriam filmados.

11 Colocar as peças significava desenhá-las sobre o tabuleiro.

seria a melhor opção. Não apenas a visualização e o pensamento geométrico estavam sendo postos em prática, mas também a linguagem.

Grande parte dos alunos gesticulava tentando representar as peças e suas transformações associadas. Quando eu perguntava aos representantes da vez qual seria a peça escolhida e como ela deveria ser disposta no tabuleiro, poucos informavam os eixos de reflexão ou as amplitudes e sentidos de rotação de modo correto. Aproveitei que havia alguns alunos de mídia digital na sala e sugeri uma analogia: se aquilo fosse um *game*, eu seria a parte do programa responsável pela interface. Somente os comandos com os parâmetros corretos surtiriam efeito, apresentando a imagem da peça solicitada na tela do monitor.