

Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues

**O ensino de geometria com base na
exploração de jogos e desafios: um
experimento com alunos de design**

TESE DE DOUTORADO

DEPARTAMENTO DE ARTES & DESIGN

Programa de Pós-Graduação em Design

Rio de Janeiro,
agosto de 2008



Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues

**O ensino de geometria com base na exploração de
jogos e desafios: um experimento com alunos de design**

Tese de Doutorado

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Design da PUC-Rio.

Orientadora: Profa. Dra. Rita Maria de Souza Couto
Co-orientador: Prof. Dr. Celso Braga Wilmer

Rio de Janeiro, agosto de 2008



Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues

O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios: um experimento com alunos de design

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Design da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Dra. Rita Maria de Souza Couto
Presidente / Orientadora
PUC-Rio

Profa. Dra. Maria Aparecida Campos Mamede Neves
Membro - PUC-Rio

Prof. Claudio Cesar Pinto Soares
Membro - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Profa. Dra. Vania Ribas Ulbricht
Membro - Universidade Anhembi - Morumbi

Profa. Dra. Denise Berruezo Portinari
Membro - PUC-Rio

Profa. Dra. Luiza Novaes
Membro - PUC-Rio

Prof. Doutor Paulo Fernando Carneiro de Andrade
Coordenador(a) Setorial do Centro de Teologia e Ciências Humanas - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 29 de agosto de 2008

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues

Graduado em Engenharia de Computação pela PUC-Rio (1999), Mestre em Engenharia de Produção pela UFSC (2002) e Doutor em Design pela PUC-Rio (2008). No campo da representação gráfica, lecionou em cursos superiores na UERJ, UFRJ e PUC-Rio. Atualmente faz parte do corpo docente do Departamento de Desenho da UFPR. Sua produção acadêmica reflete o interesse em questões que envolvem lógica, geometria, criatividade e inovação.

Ficha Catalográfica

Rodrigues, Daniel Wyllie Lacerda

O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios : um experimento com alunos de design / Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues ; orientadora: Rita Maria de Souza Couto ; co-orientador: Celso Braga Wilmer. – 2008.

179 f. : il.(color.) ; 30 cm

Tese (Doutorado em Design)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

Inclui bibliografia

1. Artes – Teses. 2. Geometria. 3. Design. 4. Ensino. 5. Estrutura. 6. Gestalt. 7. Jogos. 8. Desafios. I. Couto, Rita Maria de Souza. II. Wilmer, Celso Braga. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Artes e Design. IV. Título.

CDD: 700

Para Rita Maria de Souza Couto, pela sabedoria, incentivo, confiança e amizade.

Agradecimentos

Aos meus pais, por todo o apoio.

Aos alunos participantes desta pesquisa, por suas valiosas contribuições.

Ao Dr. Celso Braga Wilmer, por revelar-me a importância do pensamento produtivo de Wertheimer.

À Dra. Maria Aparecida Mamede Neves, pelas aulas sobre Psicologia da Educação.

Às Dras. Denise Berruezo Portinari, Luiza Novaes e Vania Ribas Ulbricht, e ao Dr. Claudio Cesar Pinto Soares, por aceitarem participar da banca avaliadora.

Aos meus colegas acadêmicos, Ailton Santos Leite e Flavia Nizia da Fonseca Ribeiro, pela torcida.

Resumo

Rodrigues, Daniel Wyllie Lacerda; Couto, Rita Maria de Souza. **O ensino de geometria com base na exploração de jogos e desafios: um experimento com alunos de design**. Rio de Janeiro, 2008. 179 p. Tese de Doutorado - Departamento de Artes & Design, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho propõe uma abordagem original para o ensino de fundamentos de geometria e matemática direcionado a alunos de design. Com base na exploração de jogos e desafios, foi planejada uma série de atividades em que questões, estratégias de resolução e conceitos geométricos deveriam estar relacionados de modo integrado. Tal estrutura foi explorada e analisada em duas etapas. Na primeira, os desafios foram interpretados do ponto de vista do professor, aqui representado pelo autor da tese. Nesta fase, buscaram-se respostas para as seguintes questões: Que estratégias de raciocínio estão em jogo? Como os conteúdos podem ser trabalhados? Quais são as soluções dos desafios e como obtê-las? Na segunda, os desafios foram apresentados aos alunos, que interagiram com o professor, de maneira individual. A partir de então, novas relações foram descobertas pelos estudantes. Suas expectativas, reações e estratégias de raciocínio foram observadas ao longo de cinco encontros com aproximadamente duas horas de duração cada, procedendo-se à sua análise. Três alunos de design da PUC-Rio participaram do experimento, sendo filmados enquanto dialogavam com o professor e tentavam desvendar os problemas. A investigação começou com forte influência do modelo van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Neste caso, notou-se a presença dos três primeiros dentre os cinco níveis de pensamento por ele propostos: visualização, análise e dedução informal. No que se refere às tentativas de agrupamento e reorganização não apenas das partes nas estruturas dos exercícios propostos mas também deles próprios (considerando-os como partes de um corpo maior), recebeu destaque a ótica estruturalista da gestalt, sendo Max Wertheimer a fonte principal. Outra referência foi George Polya, por ter mostrado a importância do traçado de figuras, do uso de problemas auxiliares e do raciocínio heurístico na resolução das questões.

Palavras-chave

Geometria; Design; Ensino; Estrutura; Gestalt; Jogos; Desafios

Abstract

Rodrigues, Daniel Wyllie Lacerda; Couto, Rita Maria de Souza (advisor). **The teaching of geometry based on the exploration of games and puzzles: an experiment with design students.** Rio de Janeiro, 2008. 179 p. PhD, Thesis - Departamento de Artes & Design, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The present research presents a unique strategy for the teaching of the fundamentals of geometry and mathematics for design students. It was possible to plan a series of activities in which puzzles, problem-solving strategies and geometrical concepts were to be related in a structurally integrated fashion. This structure, which was planned to allow the reconstruction of knowledge on geometry by design students, went through two stages of exploration and analysis. Initially, the challenges were interpreted according to the instructor's viewpoint, hereby represented by the author. In this first stage, the author tried to answer the following questions: What thinking strategies are at play? In what way can the contents be explored? What are the solutions to the challenges and how can they be obtained? Secondly, the challenges were presented to the students, who interacted with the instructor in an individual manner. From then on, the students were able to discover new relationships. Their expectations, reactions and thinking strategies were observed by the author along five two-hour meetings and then analyzed. Three PUC-Rio design students took part in the research, which involved taping of their dialogues with the instructor while attempting to solve the problems presented to them. In terms of theoretical framework, one can say that the investigation was, at first, strongly influenced by van Hiele's model for the development of geometrical thinking. In this case, the first three of the five thinking levels proposed by van Hiele (visualization, analysis and informal deduction) were noticeable. As to the grouping and reorganization attempts, not only of the parts in the proposed exercise structures but also of the exercises themselves (considering these as parts of a bigger structure), they were mostly based on the gestalt structuralist viewpoint, having Max Wertheimer as the main theoretician. Another essential reference was George Polya, for having shown the importance of figure sketching, of the use of auxiliary problems as well as of the heuristic thinking involved in the process of problem resolution.

Keywords

Geometry; Design; Teaching; Structure; Gestalt; Puzzles; Challenges

Sumário

1	Introdução	17
1.1.	Reflexões Iniciais	17
1.2.	Dando forma ao objeto de estudo	18
1.3.	Relevância do Estudo	20
1.4.	Procedimentos metodológicos	21
1.5.	Organização dos capítulos	21
2	Subsídios teóricos	22
2.1.	Pensamento Geométrico	22
2.2.	Pensamento Produtivo	29
3	Atividades Preliminares	37
3.1.	Os desafios dos quadrados na figura e do corte estranho	37
3.1.1.	Sobre o desafio dos quadrados na figura	37
3.1.2.	Sobre o desafio do corte estranho	38
3.1.3.	Experimento com alunos	40
3.1.4.	Idéias ingênuas, resultados inusitados	44
3.2.	O desafio dos dominós e o tabuleiro de xadrez mutilado	49
3.2.1.	Sobre o desafio dos dominós	49
3.2.2.	A abordagem científica e a matemática	49
3.2.3.	Experimento com alunos	50
3.3.	O desafio dos tetraminós e o retângulo 4 x 5	54
3.3.1.	Sobre o desafio dos tetraminós	54
3.3.2.	Relação com o desafio anterior	55
3.3.3.	Experimento com alunos	56
3.4.	O jogo <i>Blokus</i> e suas peças: do monominó aos pentaminós	63
3.4.1.	Sobre o <i>Blokus</i>	63
3.4.2.	Bloqueios e passagens	67
3.4.3.	Por uma ocupação racional do espaço	69
3.4.4.	Relato de uma situação vivenciada com alunos de design	73

4 Atividades Intermediárias	76
4.1. O desafio dos quadrados no tabuleiro de xadrez	76
4.1.1. Sobre o desafio dos quadrados no tabuleiro de xadrez	76
4.1.2. O auxílio da geometria dinâmica	78
4.1.3. O somatório dos quadrados dos números naturais	80
4.1.4. Provas visuais do somatório dos quadrados	81
4.1.5. Somatório do quadrado dos números naturais por indução matemática	89
4.1.6. A geometria no design dos materiais concretos de apoio	93
4.1.7. Experimento com alunos	97
4.2. O desafio dos losangos em polígonos regulares	105
4.2.1. Sobre o desafio dos losangos	105
4.2.2. Sondagem prévia	106
4.2.3. Design de material concreto	107
4.2.4. O auxílio da geometria dinâmica	109
4.2.5. Indícios do somatório dos números naturais	109
4.2.6. Representações da fórmula de n em função de L	110
4.2.7. Metamorfose	112
4.2.8. Representações da fórmula de R em função de n	113
4.2.9. Determinação dos ângulos internos dos losangos	116
4.2.10. Um atalho curioso para se obter a fórmula	119
4.2.11. Um organismo em crescimento	122
4.2.12. Quebra-cabeças com losangos	123
4.2.13. Experimento com alunos	128
5 Atividades Finais	133
5.1. O jogo <i>Tantrix</i> , simetrias e arcos em concordância	133
5.1.1. Sobre o <i>Tantrix</i>	133
5.1.2. Voltas completas	134
5.1.3. Soluções simétricas e assimétricas	136
5.1.4. Concordância de arcos	140
5.1.5. Experimento com os alunos	143
5.2. Elemento de ligação entre as atividades 5.1 e 5.3	146
5.2.1. Sobre flexágonos	146
5.2.2. Hexaflexágonos	147
5.2.3. A flexão do hexaflexágono	149
5.2.4. Transformações observadas	150

5.2.5. Relações com outras atividades	151
5.2.6. “Releitura” de peças do <i>Tantrix</i>	152
5.2.7. Experimento com alunos	154
5.3. O quebra-cabeça <i>Frantic Fish</i> de livre-composição	158
5.3.1. Sobre o <i>Frantic Fish</i>	158
5.3.2. O auxílio da geometria dinâmica	162
5.3.3. Design de material concreto	164
5.3.4. Ladrilhamento variável	167
5.3.5. Experimento com alunos	170
6 Considerações Finais	172
7 Referências bibliográficas	176

Lista de figuras

Figura 1 - Determinação da área de um paralelogramo	32
Figura 2 - Opções para a repetição do exercício de cálculo da área	33
Figura 3 - Ilustração do desafio	34
Figura 4 - Respostas conscientes (tipo A)	34
Figura 5 - Respostas cegas (tipo B)	34
Figura 6 - Desenho com vários segmentos de reta e ângulos retos	37
Figura 7 - Os 11 quadrados presentes na figura	38
Figura 8 - Polígono a ser cortado em duas partes iguais	38
Figura 9 - Figura do prob. auxiliar, corte e comparação com a figura original	39
Figura 10 - Ajuste do corte em relação à figura original	39
Figura 11 - Descoberta do corte pelo raciocínio da malha de quadrados	40
Figura 12 - Corte preliminar efetuado do participante [1]	42
Figura 13 - Retomada do raciocínio pelo participante [1]	42
Figura 14 - As formas dos diferentes desafios	43
Figura 15 - Divisão em quadrados de diferentes tamanhos	44
Figura 16 - Logomarca da Construtora Castelo Branco	44
Figura 17 - Logo do banco HSBC	45
Figura 18 - Composições de tangram em diversos graus de abstração	45
Figura 19 - Outras montagens de tangram	45
Figura 20 - ichi-Gami: a principal peça do i-Gami	46
Figura 21 - Poliedro construído com 3 peças ichi-Gami	47
Figura 22 - Poliedro construído com 4 peças ichi-Gami	47
Figura 23 - Poliedros construídos com 6 peças ichi-Gami	48
Figura 24 - Poliedros construídos com 7 peças ichi-Gami	48
Figura 25 - O tabuleiro de xadrez sem as casas brancas das bordas	49
Figura 26 - O tabuleiro de xadrez e os 31 dominós empilhados	51
Figura 27 - Arranjos do participante [1]	52
Figura 28 - Divisão do tabuleiro em 3 partes segundo o participante [2]	53
Figura 29 - Arranjo inicial do participante [3] e mudanças sugeridas	54
Figura 30 - Retângulo 4 x 5 e os cinco tetraminós	54
Figura 31 - Retângulo 4 x 5 e os cinco tetraminós em padrão xadrez	55
Figura 32 - Frente e verso da superfície retangular	57
Figura 33 - Cinco tetraminós	57

Figura 34 - Arranjos do participante [1]	58
Figura 35 - Exemplos de encaixes possíveis caso houvesse dois tetraminós T	60
Figura 36 - Exemplos de encaixes possíveis caso houvesse dois tetraminós L	61
Figura 37 - Espaços vazios com os formatos dos tetraminós	61
Figura 38 - As peças do <i>Blokus</i> são os poliminós de 1 a 5 quadrados	64
Figura 39 - A primeira jogada	65
Figura 40 - Exemplo das jogadas iniciais no <i>Blokus duo</i>	65
Figura 41 - Regra de conexão	66
Figura 42 - Tabuleiros do <i>Blokus</i> clássico e reduzido com peças	66
Figura 43 - Diversos exemplos de bloqueio	67
Figura 44 - Outros exemplos de bloqueio	68
Figura 45 - Monominó, dominó, triminós e tetraminós	71
Figura 46 - Pentaminós	72
Figura 47 - Tabuleiro de xadrez com 64 casas	76
Figura 48 - Alguns quadrados 2 x 2 localizados no tabuleiro de xadrez	77
Figura 49 - Expansão da malha 3 x 3 em quadrados 2 x 2	78
Figura 50 - Expansão da malha 5 x 5 em quadrados 3 x 3	79
Figura 51 - Quadrados de diversos tamanhos localizados por suas diagonais	80
Figura 52 - Prova visual proposta por Gardner (1973) e Kalman (1991)	83
Figura 53 - Uma estratégia para o cálculo do somatório de 1 a 10	85
Figura 54 - Um raciocínio análogo para solucionar o quadrado mágico 3 x 3	86
Figura 55 - Lajotas de uma escada em construção com 5 degraus	86
Figura 56 - Prova visual do somatório dos primeiros números naturais	87
Figura 57 - Prova visual proposta por Wermuth & Schuh (1999)	88
Figura 58 - Retorno à primeira prova visual	89
Figura 59 - Analogia da indução matemática com o efeito dominó	90
Figura 60 - Encaixes no sistema de montagem do Lego	94
Figura 61 - Encaixes no sistema de montagem do <i>LiveCube</i>	95
Figura 62 - Encaixes no sistema de montagem do <i>OmniFix Cube</i>	96
Figura 63 - Diagramas de conexões de peças <i>LiveCube</i> e <i>OmniFix Cube</i>	96
Figura 64 - Tabuleiro de xadrez e quatro quadrados amarelos	97
Figura 65 - Quadrados 2 x 2 contabilizados pela primeira vez	98
Figura 66 - Quatro quadrados 3 x 3	98
Figura 67 - Quadrados refletidos ou rotacionados, uns em relação aos outros	98
Figura 68 - Prova visual com peças imantadas criadas por mim	100
Figura 69 - Divisões de um quadrado de tamanho 8 x 8 em outros quadrados	101

Figura 70 - Um dos quadrados 2 x 2 não considerados pelo participante [2]	102
Figura 71 - Duas provas visuais para o somatório de inteiros ímpares	103
Figura 72 - Modificação do desenho referente ao desafio do item 3.1.1	104
Figura 73 - Diversas etapas de uso do material didático concreto	108
Figura 74 - Divisão em losangos por intermédio de sucessivas reflexões	109
Figura 75 - Divisão em losangos por intermédio de sucessivas rotações	109
Figura 76 - Divisão em losangos por intermédio de sucessivas translações	109
Figura 77 - Cálculo da quantidade de diagonais em destaque	110
Figura 78 - Cálculo dos arcos em destaque (ex. $L = 12$, $n = 5$)	111
Figura 79 - Vários polígonos regulares particionados em losangos	112
Figura 80 - Exemplo de metamorfose (ex. $L = 12$, $n = 5$)	113
Figura 81 - Exemplo de metamorfose (ex. $L = 14$, $n = 6$)	113
Figura 82 - Primeira representação da fórmula de R em função de n	114
Figura 83 - Segunda representação da fórmula de R em função de n	115
Figura 84 - Terceira representação da fórmula de R em função de n	116
Figura 85 - Faixa selecionada com simetria bilateral (ex: $L = 12$)	117
Figura 86 - Ângulos internos calculados a partir de $360^\circ / L$ (ex: $L = 12$)	118
Figura 87 - Polígonos regulares com um número de lados divisível por 4	118
Figura 88 - Série numérica empilhada de 1 até n e ângulos internos	119
Figura 89 - Uma alternativa curiosa para visualizar a fórmula	120
Figura 90 - Triângulo de Pascal	122
Figura 91 - Visualização do padrão de crescimento da série	122
Figura 92 - Diversos arranjos de losangos internos ao dodecágono regular	123
Figura 93 - Soluções similares porém diferentes à primeira vista	123
Figura 94 - Transf. de um arranjo de losangos em um arranjo de linhas	124
Figura 95 - Embalagens do quebra-cabeça Fractiles – 7	125
Figura 96 - Geração dos lagartos e morcegos em apenas duas etapas	126
Figura 97 - Lagartos e morcegos do Batty Lizards	127
Figura 98 - Ladrilhamento com Eric e Ernestine	128
Figura 99 - Ladrilhamento com Orville e Ernestine	128
Figura 100 - Polígonos a serem preenchidos por losangos	129
Figura 101 - Polígonos preenchidos por losangos	130
Figura 102 - Duas estruturas com algumas características em comum	131
Figura 103 - Desenhos das peças do <i>Tantrix</i>	133
Figura 104 - Regra de vizinhança do <i>Tantrix</i>	134
Figura 105 - Critério para saber qual será a cor da volta completa	134

Figura 106 - Uma montagem inválida por apresentar lacunas	135
Figura 107 - Incompatibilidade de cores em caminhos secundários	136
Figura 108 - Rotações de 180° de duas peças	136
Figura 109 - Incoerência, troca de peças e solução final	136
Figura 110 - A impossibilidade do meio-giro para obter a imagem refletida	137
Figura 111 - Figura que parece não ter sido modificada após transformações	138
Figura 112 - Três soluções do quebra-cabeça com 8 peças	138
Figura 113 - Método para determinar soluções por rotação de 180°	139
Figura 114 - Doze arranjos válidos com 14 peças	140
Figura 115 - Análise das partes das peças	141
Figura 116 - Investigação dos centros dos arcos de círculo	141
Figura 117 - Malha da solução das sete primeiras peças	142
Figura 118 - Casos isolados de concordâncias	143
Figura 119 - Voltas com 3 a 7 peças de <i>Tantrix</i>	144
Figura 120 - Ovais no <i>Tantrix</i> e na perspectiva isométrica	144
Figura 121 - Arco incorreto e correção dos participantes [1] e [3]	145
Figura 122 - Malha do trihexaflexágono e passos para a montagem	148
Figura 123 - Trihexaflexágono, símbolo da reciclagem e a <i>Banda de Möbius</i>	148
Figura 124 - Passos da sequência na passagem de um estado para outro	149
Figura 125 - Ciclo completo de 3 estados	150
Figura 126 - Losangos dos setores após uma flexão (frente → verso)	150
Figura 127 - Malhas com hexágonos, losangos e triângulos equiláteros	152
Figura 128 - Ciclo completo com desenhos de peças do <i>Tantrix</i>	153
Figura 129 - Um teste para averiguar o reconhecimento das transformações	154
Figura 130 - Diagramas de transformações do “trihexaflexágono de <i>Tantrix</i> ”	157
Figura 131 - Gabarito de imagens transformadas de um flexágono hipotético	157
Figura 132 - Peixes (peças) do quebra-cabeça <i>Frantic Fish</i>	158
Figura 133 - Mosaico 1 com os peixes 2A e 3B	159
Figura 134 - Mosaico 2 com os peixes 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B	159
Figura 135 - Mosaico 3 com os peixes 1B	160
Figura 136 - Mosaico 4 com os peixes 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B	160
Figura 137 - Mosaico 5 com os peixes 1A, 1B, 2A, 2B, 3A e 3B	160
Figura 138 - Peixes separados em cabeça e cauda	161
Figura 139 - Padrões periódicos de preenchimento do plano	161
Figura 140 - Polígono e arranjo relativos à cauda do peixe 1A	162
Figura 141 - Polígonos e arranjos relativos às caudas do peixe 1B e 1C	162

Figura 142 - Outras montagens com as caudas	162
Figura 143 - Diagrama representativo da linha de raciocínio adotada	163
Figura 144 - Revisão dos padrões de preenchimento do plano	164
Figura 145 - Material concreto que visa resgatar o processo de descoberta	166
Figura 146 - Encaixes das partes das caudas dos peixes	167
Figura 147 - Arranjo não periódico com diversas instâncias do tetraminó L	168
Figura 148 - Arranjos periódicos com diversas instâncias do tetraminó L	169
Figura 149 - Quebra-cabeça variável com 3 peças derivadas do tetraminó L	169

A imaginação é mais importante do que o conhecimento.
O conhecimento é limitado. A imaginação envolve o mundo.

Albert Einstein