2
Considerações Teóricas

A seguir são apresentadas, as principais teorias que a pesquisa abordará e que servirão de base para o estabelecimento da metodologia para a otimização na composição de carteiras de ativos reais, em particular projetos de investimentos com opções reais.

2.1.
O Modelo de Composição de Carteiras de Markowitz

De uma maneira matemática o risco pode ser tratado como uma variável aleatória, sendo que os dois primeiros momentos da sua distribuição de probabilidades (média e variância) são indicadores que definem a maior ou menor exposição ao risco ao qual o ativo está exposto. É relativamente simples estudar o risco de um ativo sob esta óptica. No entanto para uma carteira com vários ativos, a complexidade do problema de medir o risco é grande devido ao fato da distribuição de probabilidade do retorno da carteira poder diferir significativamente da distribuição de probabilidade dos ativos individuais.

Por exemplo, considere-se um universo de n ações. Seja r_j o retorno da ação j (variável aleatória) e w_j a quantidade, em dinheiro, a investir na ação j. O retorno esperado desta carteira é dado por:

$$R(w_1,\dots,w_n) = E\left[\sum_{j=1}^{n} r_j w_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[r_j\right] w_j , \qquad (1)$$

onde E[.] representa o valor esperado da variável aleatória. Por outro lado o desvio padrão do retorno é:

$$\sigma(w_1,\dots,w_n) = \sqrt{E\left[\left\{\sum_{j=1}^{n} r_j w_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} r_j w_j\right]\right\}^2\right]} \; . \qquad (2)$$

Markowitz (1952) utiliza a variância do retorno, como medida de risco. Deseja-se obter uma carteira de risco mínimo, ou seja, de variância mínima sujeito a restrições de uso do capital e de limite mínimo de retorno na carteira. Assim o modelo pode ser escrito como o seguinte programa de otimização:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{minimize} && \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}w_i w_j \quad ,\\
&\text{sujeito a} && \sum_{j=1}^{n} R_j w_j \geq \rho M_0 \ ,\\
& && \sum_{j=1}^{n} w_j = M_0 \quad ,\\
& && 0 \leq w_j \leq D_j \ , \qquad j = 1,\ldots,n.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

No programa de otimização (3) M_0 é o capital disponível inicialmente, $R_j = E[r_j]$, $R_i = E[r_i]$, $\sigma_{ij} = E[(r_i - R_i)(r_j - R_j)]$ é a covariância entre os ativos i e j, r_i ou r_j representam retornos individuais da distribuição do ativo i ou j, ρ é um parâmetro que representa a taxa de retorno mínima requerida por um investidor, e D_j é a quantidade máxima de dinheiro que pode ser investido em j. Variando o parâmetro ρ, e resolvendo o programa de otimização (3), obtêm-se um conjunto de variâncias mínimas para dados níveis de retorno, o qual constitui a chamada “fronteira eficiente” da carteira.

2.2. As Opções Reais

As empresas e as instituições financeiras, ao longo de muitos anos, têm utilizado os métodos tradicionais de avaliação de projetos para analisar as suas decisões de investimento. As regras do Valor Presente Líquido (VPL) e a Taxa Interna de Retorno (TIR) são metodologias clássicas de avaliação. Estas consideram que os projetos com VPL positivo ou TIR superior à taxa de desconto seriam, a princípio, investimentos a serem realizados.

Mas faz alguns anos, que tais métodos vêm sendo questionados. A razão principal é que eles não lidam corretamente com três características importantes que as decisões de investimentos possuem: 1) a irreversibilidade: ou seja, o fato de que o investimento é um custo afundado, de modo que o investidor não consegue recuperá-lo totalmente em caso de se arrepender; 2) a incerteza sobre os lucros futuros do investimento; 3) a possibilidade de adiamento do investimento, que pode trazer benefícios pela informação nova que se obteria do ambiente no qual está inserido. Assim, dadas estas características, a empresa poderia ter a flexibilidade de alterar as condições iniciais do projeto para salvar possíveis perdas ou gerar ganhos adicionais dependendo do cenário futuro.

A teoria das Opções Reais permite avaliar de uma maneira mais realista a flexibilidade nos investimentos. Elas têm uma analogia com as opções financeiras: uma opção de compra (*call*) sobre um ativo (o valor atual dos ganhos futuros do investimento) dá o direito mas não a obrigação de comprá-lo no futuro, a um preço de exercício (que seria custo do investimento inicial), dentro de um tempo de maturidade (tempo máximo que pode se adiar o projeto). O exercício da opção (o fato de investir) é irreversível, mas a firma sempre tem a possibilidade de preservar o valor da sua opção (adiar o investimento) até que as condições de mercado se tornem mais favoráveis.

As opções reais aumentam o valor da empresa, pela flexibilidade que outorgam aos projetos ao se adaptarem a condições futuras em resposta às alterações de mercado. Assim, é válida a seguinte relação:

$$\text{Valor do projeto} = \underset{\text{(calculado por VPL)}}{\text{Valor do projeto sem Opção}} + \text{Valor da Opção}\ . \qquad (4)$$

2.2.1.
Tipos de Opções Reais

A seguir são descritas as opções reais mais comuns à maioria dos projetos[1].

A) <u>Opções Simples</u>

A1- Opção de Diferir

É a opção que permite determinar o momento ótimo de investimento que gerará os maiores lucros. Um projeto avaliado na forma tradicional poderia apresentar um VPL não atrativo para os investidores, mas pela possibilidade de adiar a sua execução, poderia resultar em um VPL mais promissório no futuro.

A modelagem desta opção é de maneira análoga a uma opção de compra financeira (*call*). Suponha-se que um projeto requer um investimento inicial de I, e que o valor presente dos fluxos de caixa esperados hoje é de VP_0. O VPL do projeto seria então: $VPL=VP_0–I$. Admitindo que a empresa tem direitos exclusivos sobre o projeto durante os próximos anos, e pressupondo que o valor do projeto tenha um comportamento estocástico ao longo do tempo, um VPL negativo hoje, pode chegar a ser positivo se a firma postergar a execução do projeto. Seja VP_t o valor do projeto no instante t, a decisão da firma seguirá a

[1] Consulte-se Trigeorgis (1995) para um maior detalhamento sobre diversos tipos de opções reais e a maneira de precificá-los.

seguinte regra: $VP_t > I$ ➔ $VPL > 0$ ➔ a empresa investe no projeto, do contrário não investe. Caso a empresa não decida investir, não haverá fluxos de caixa, mas também não perderá o valor investido inicialmente (irreversibilidade).

Utilizando a função Máximo, o valor da opção de adiar o investimento até o período t seria: $Max(VP_t-I,0)$, se este valor (descontado por uma taxa até o período inicial t=0) é maior do que: VP_0-I, então opta-se pelo adiamento.

A2- Opção de Abandono

Se as condições futuras se tornam desfavoráveis ao projeto, pode-se abandonar o negócio e vender os ativos a um valor de salvamento pré-estabelecido. Esta opção é modelada analogamente a uma opção de venda (*put*) financeira. Para estimar o valor desta opção assuma-se que VP_t é o valor do projeto no período t, e A é o valor de abandono ou de salvamento do projeto naquele mesmo período (que viria a ser o preço de exercício). Se o valor do projeto for maior que o seu valor de abandono, o projeto deve ser continuado; no caso contrário a opção deverá ser exercida. Assim, o valor da opção seria: 0, se $VP_t > A$, ou, $(A – VP_t)$, se $VP_t < A$. Empregando a função Máximo, a Opção de Abandono se representaria: $Max(A – VP_t;0)$

A3- Opção de Contração

Esta opção dá o direito de reduzir uma parte da capacidade do investimento. O valor futuro do ativo se reduz, mas em troca se consegue poupar uma quantidade de dinheiro em perdas que o projeto original estaria gerando no momento em que se opta pela contração. A sua modelagem desta opção é semelhante a uma opção de venda (*put*) financeira, com valor do ativo subjacente igual ao valor da redução feita no projeto (este foi contraído por um fator de contração c $\in \langle 0,1 \rangle$, e com preço de exercício igual à poupança obtida “B”. Assim, seja VP_t o valor total do projeto no período t, o valor da Opção de Contração seria: $Max(c*VP_t+B - VP_t; 0) = Max(B - (1-c)*VP_t; 0)$.

A4- Opção de Expansão

Se o projeto resultou ser melhor do que o esperado, esta opção dá o direito de ampliar a capacidade do projeto original. Assim, o valor do ativo subjacente se incrementa, mas é necessário fazer previamente um investimento adicional ao realizado no início do projeto.

A sua modelagem é semelhante a uma opção de compra (*call*) financeira, tendo como valor do ativo subjacente o valor adicional ganho no projeto pela expansão (o projeto foi ampliado por um fator de expansão e >1) e preço de exercício é igual ao investimento "Y" realizado para conseguir esta expansão. Assim, seja VP_t o valor total do projeto no período t, o valor da Opção de Expansão seria: $Max(e*VP_t\text{-}Y - VP_t; 0) = Max((e\text{-}1)*VP_t - Y,0)$.

B) <u>Opções Compostas</u>

As Opções Compostas constituem uma combinação de opções simples que podem ser realizadas simultaneamente ou em forma seqüencial. Por exemplo, uma firma que investe em Pesquisa e Desenvolvimento pode precisar um tempo inicial para obter resultados de provas preliminares antes de realizar o projeto em si; logo pode decidir por expandir, contrair ou abandonar o projeto, em função da informação obtida pela espera. É muito provável, na prática, encontrar sempre mais do que uma só opção por exercer.

C) <u>Opções Switching</u>

As opções de tipo *switching* fornecem ao possuidor o direito de mudar entre distintos tipos de recursos, ativos ou tecnologia. Também permitem iniciar e encerrar operações, ou entrar e sair de um determinado ramo de atividades. Esta alta flexibilidade no transcorrer do projeto acrescenta valor a ele, no caso que o valor de alguma das escolhas se torne mais rentável no futuro.

D) <u>Opções de Aprendizagem</u>

Nas opções que se têm descrito anteriormente, considera-se que à medida que passa o tempo, as incertezas em relação ao valor do ativo e a possibilidade de exercer ou não a opção, vão se revelando. No entanto, em muitas situações a incerteza não se resolve por si só. São necessários esforços e investimentos para contar com mais informações sobre as condições do projeto e reduzir a incerteza. Por exemplo, na indústria do petróleo, quando se decide investir mais em pesquisa geológica e descobrir a magnitude exata das reservas, ou a realização de testes de mercado antes de dimensionar as vendas, por citar alguns casos.

2.3.
Medidas de Risco

Duarte (1997) apresenta um conjunto de medidas de risco tradicionais obtidas a partir de uma série de ganhos ou retornos r_j , j = {1,2,..., m}, sendo 'm' o número total de observações do retorno do ativo:

a) Desvio Padrão:
$$DP = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (r_i - \bar{r})^2}{m}}\ , \tag{5}$$

b) Semivariância:
$$SV = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Min}\left[0; (r_i - \bar{r})\right]^2}{m}}\ , \tag{6}$$

c) *Downside Risk*:
$$DR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Min}\left[0; (r_i - RMA)\right]^2}{m}}\ , \tag{7}$$

onde RMA é o Retorno Mínimo Aceitável,

d) Desvio Absoluto Médio:
$$DA = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left| r_i - \bar{r} \right|}{m}\ , \tag{8}$$

e) Semi-Desvio Absoluto Médio:
$$SDA = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left| \mathrm{Min}\left[0; (r_i - \bar{r})\right] \right|}{m}\ , \tag{9}$$

f) *Downside Risk* Absoluto Médio:
$$DRA = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left| \mathrm{Min}\left[0; (r_i - r_{RMA})\right] \right|}{m} \tag{10}$$

Cada uma dessas medidas apresenta características peculiares e é possível empregá-las para otimizar alocação de ativos em carteiras, como feito, por exemplo, em Markowitz (1952), Lewis (1990), Konno e Yamazaki (1991), Harlow (1991), Marmer e Ng. (1993) e Duarte (1997).

Duas medidas de Risco muito utilizadas na avaliação de risco em carteiras, são o VaR (*Value at Risk*) e o *Expected Shortfall*. Nas seções a seguir são apresentadas tais medidas.

2.3.1. O Valor em Risco –VaR

A metodologia do VaR – Valor em Risco, desenvolvida pelo banco J.P. Morgan (1996), surge com o objetivo de quantificar, de forma sistemática e simples, as perdas potenciais decorrentes da exposição ao risco de mercado, ou seja, aquele advindo da volatilidade dos preços de mercado (taxa de câmbio, taxa de juros, mercado de ações etc.). Essa metodologia vem desde então sendo amplamente utilizada na prática de gerenciamento de risco no mercado como medida do risco total de uma carteira de projetos, sendo inclusive mencionada em diversas práticas reguladoras do sistema financeiro internacional.

Através do VaR pode-se ter idéia da probabilidade de perda maior que um certo nível. Particularmente o VaR responde a questão: “Qual o montante mínimo que espero perder a uma certa probabilidade e horizonte?”

O VaR em termos matemáticos corresponde ao percentil da distribuição de uma carteira, podendo ser expresso em termos da perda esperada da carteira expressa em valor corrente (VaR absoluto) ou em valor esperado para o horizonte em questão (VaR relativo).

O VaR tenta resumir em um único número a perda máxima esperada dentro de certo prazo e com certo grau de confiança estatística. Ele avalia a variável aleatória que represente o ganho (ou a perda) da firma. Um VaR(95%) indica que existem 5 chances em 100 de que o prejuízo seja maior do que o indicado pelo VaR no prazo para o qual foi calculado. Torna-se um número de fácil leitura e entendimento que depende do prazo(N) e do grau (1-α)% de confiança desejado. O VaR=V pode ser lido como: "Nós estamos (1-α)% certos de que não iremos perder mais do que V unidades monetárias nos próximos N dias". Artzner et al. (1999) definem o VaR com 100(1-α)% de nível de confiança ($VaR_\alpha(r_j)$) de acordo com a Expressão (11):

$$VaR_\alpha(r) = -\inf\{r \mid P(R \leq r) > \alpha\}, \tag{11}$$

onde r é o retorno pertencente à distribuição do ativo ou portfólio, inf {r/A} é o menor limite de r dado um evento A, e inf $\{r/P(R \leq r) > \alpha\}$ indica o menor 100α percentil da distribuição de retornos. Sendo que a perda se define com sinal negativo (e os ganhos com sinal positivo), -1 é multiplicado para obter um VaR positivo para um dado nível de confiança. Usando esta definição de VaR, ele também pode ser negativo se não existirem perdas dentro do intervalo de confiança.

O cálculo do VaR é bastante simples, desde que se conheça de forma detalhada a distribuição de retornos, pois o VaR é, por definição, algum quantil associado a um percentil extremo da distribuição (usualmente 1% ou 5%). De posse desta distribuição pode-se calcular, por exemplo, o pior resultado entre os

95% melhores ou o melhor entre os 5% piores. Esse valor de corte é o VaR de 5%.

A distribuição da variável ganho pode ser levantada utilizando diversas técnicas, as quais dão origem a diferentes metodologias para o cálculo do VaR cabendo citar: VaR paramétrico e VaR por simulação histórica.

A) VaR paramétrico

Também chamado de VaR analítico, parte de uma distribuição de probabilidade (condicional ou incondicional), supostamente válida, para descrever o comportamento do ganho da carteira de investimento em análise. É conveniente e comum o uso da distribuição normal, pela facilidade operacional na obtenção de seus parâmetros. Apesar disso, muito questionamento costuma ser feito sobre a conveniência da aplicação dessa distribuição. Por exemplo, em carteiras que contêm opções, a suposição de distribuição normal pode gerar uma enorme distorção no cálculo do VaR. Para se obter o ganho de corte que define o VaR deve-se definir a distribuição apropriada, estimar corretamente seus parâmetros (no caso da normal, apenas a média e o desvio-padrão), definir o horizonte de investimento e o nível de confiança.

Supondo que o ganho tem distribuição incondicional normal, isto é, $r_j \sim N(\mu, \sigma^2)$, j=1,2,...,T, pode-se calcular o ganho de corte r_c utilizando a relação entre uma distribuição normal arbitrária e a normal padrão (se $r_j \sim N(\mu, \sigma^2)$ => $Z=(r_j - \mu)/ \sigma^2$ é N(0;1)). O valor de corte com α% de área à esquerda numa normal padrão é $Z_{(1-\alpha)\%}$, que se trata do quantil tabelado, com (1 – α)% de probabilidade à esquerda, σ é a volatilidade incondicional do ganho da carteira e μ é a média do ganho da carteira. Assim o valor de corte para a série de ganhos será dado por:

$$r_c = \mu - Z_{(1-\alpha)\%}\sigma . \qquad (12)$$

Na prática μ e σ são substituídos por seus estimadores amostrais obtidos a partir da série de ganhos do título (ou carteira), chegando-se a uma expressão simples para o VaR de α%, onde M é o valor de mercado da carteira e ΔT o horizonte de cálculo:

$$\mathrm{VaR}_{\Delta T}(\alpha\%) = (\mu - Z_{(1-\alpha)\%}\sigma)M\sqrt{\Delta T} . \qquad (13)$$

A Expressão (13) assume que μ e σ são invariantes no tempo, e não se incorporam possíveis mudanças na média e na variância da distribuição de ganhos. Assim, nessas situações, devem-se adotar modelos de média e de variâncias condicionais, ou de volatilidade variante no tempo como: EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*) do J.P. Morgan, GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic*) e seus variantes e modelos de volatilidade estocástica. Como existem diversos procedimentos para o cálculo da volatilidade, todos defensáveis teoricamente, mas que levam a estimativas diferentes de volatilidade, o analista de risco pode se deparar com os mais diferentes valores para o VaR.

B) VaR por simulação

Pode-se estimar o VaR de uma carteira utilizando diversas simulações do valor dessa carteira. Esses cenários independem se vieram de simulações de Monte Carlo ou de simulações históricas. Uma vez que se obtenha um grupo de cenários procede-se através dos mesmos cálculos estatísticos e nesse caso o VaR de 95% da carteira é determinado pelo percentil de 5% de perdas formadas pela distribuição empírica. Uma vez que a técnica de simulação é uma técnica numérica, existe um *trade-off* entre o número de simulações geradas e o custo computacional para tal. O VaR dessa forma depende do número de simulações utilizado. Pode-se de qualquer forma estimar um intervalo de confiança para o VaR e aumentar o número de simulações de forma a obter uma melhor precisão nos resultados.

2.3.2.
Perda Média Esperada (*Expected Shortfall*)

Uma crítica relacionada ao VaR é que este não fornece estimativa do tamanho da perda esperada uma vez que a perda tenha excedido o valor crítico. Por exemplo, uma carteira em que o VaR de 95% de confiança é $100 significa que há apenas 5% de chance da carteira perder mais de $100, porém não há indicação de "quão" grande pode ser essa perda.

A Perda Média Esperada ou *Expected Shortfall* (ES), ou também chamada de *Condicional Value at Risk* (CVaR), é uma medida que indica a perda média que excede o VaR, ou seja, quantifica "quão" grande é, na média, a perda (risco) a que se está sujeito em uma determinada carteira, fornecendo dessa forma informações sobre a cauda da distribuição de VPL (essa estatística é também conhecida como VaR condicional, excesso de perda média, VaR na cauda).

Pode-se pensar na medida de ES como "quão pesada" é a cauda da distribuição de ganhos de uma carteira.

Portanto, enquanto o VaR responde a pergunta "Qual a perda mínima incorrida pela carteira nos α% piores cenários?", o ES responde a questão "Qual a perda média incorrida pela carteira nos α% piores cenários?".

Matematicamente pode-se definir o ES como a esperança condicional de perdas da carteira superiores ao VaR. Suponha-se que r representa o conjunto de retornos da distribuição do ativo ou da carteira, e $VaR_\alpha(r)$ é o VaR com 100(1-α)% de nível de confiança, $ES_\alpha(r)$ define-se:

$$ES_\alpha(r) = E\,[-r \mid -r \geq VaR_\alpha(r)]. \qquad (14)$$

A Expressão (14) pode ser calculada analiticamente para a distribuição Normal, t-Student e outras. Para maiores detalhes, os ES de diversas distribuições analíticas são apresentados em Andrew, Kanto e Malo (2005).

A Figura 1, extraída de Yamai e Yoshiba (2002), apresenta de maneira gráfica os conceitos de *Expected Shortfall* e VaR.

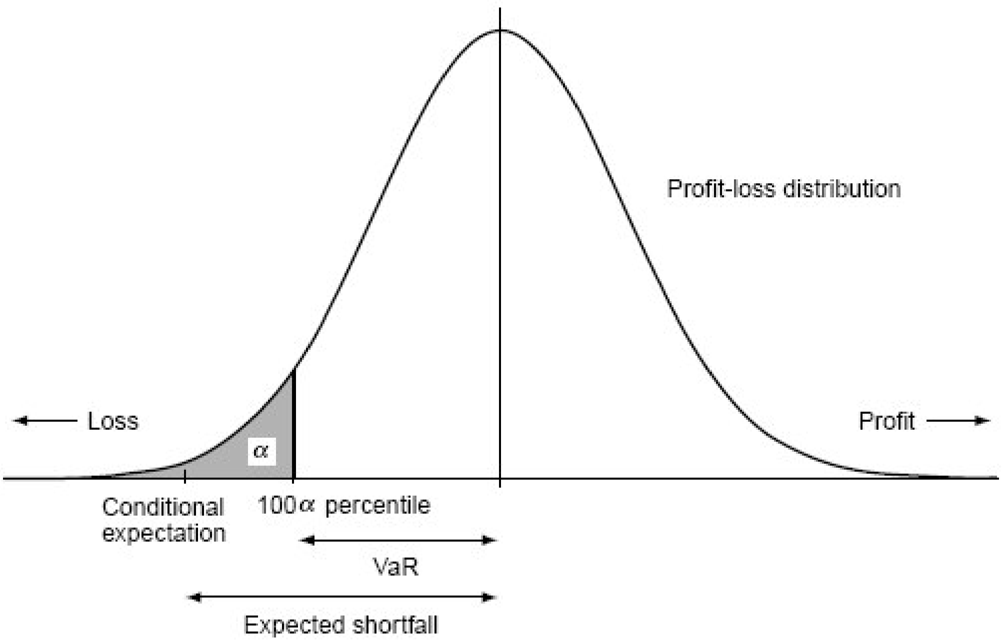

Figura 1 – VaR e *Expected Shorfall*

2.3.3. Propriedades de medidas de risco coerentes

Como estipulado no artigo seminal de Artzner et al (1999), sendo X e Y as distribuições de duas variáveis aleatórias, uma medida de risco coerente deve satisfazer as seguintes propriedades:

Alocação*:* A alocação de renda fixa à carteira diminui o risco no mesmo montante:

$$Risk(X+c)=Risk(X)-c \quad , \forall c > 0. \tag{15}$$

Subaditividade*:* O risco da soma de sub-carteiras é menor ou igual ao risco da soma individual dos ativos da carteira:

$$Risk(X+Y) \leq Risk(X)+Risk(Y). \tag{16}$$

Homogeneidade positiva de grau 1: Ao aumentar o tamanho de cada posição da carteira o risco da carteira aumenta em igual proporção:

$$Risk(cX)=cRisk(X) \ , \forall c > 0. \tag{17}$$

Monotonicidade*:* Se os ganhos na carteira X são menores que os da carteira Y para todos os cenários possíveis, então o risco na carteira X é maior que na carteira Y:

$$\text{Se } X \leq Y \Rightarrow Risk(Y) \leq Risk(X). \tag{18}$$

Medidas de risco tradicionais, tais como o Desvio-Padrão e o VaR, nem sempre satisfazem as propriedades de uma medida de risco coerente, sendo a subaditividade uma das propriedade mais importantes, que faz justamente aproveitar as vantagens da diversificação.

2.3.3.1. A não coerência do VaR e a coerência do ES

Embora a medida do VaR seja altamente empregada no mercado, este apresenta alguns inconvenientes metodológicos, pois nem sempre respeita uma das propriedades desejáveis que uma medida de risco (coerente) deve apresentar: a propriedade de subaditividade (se, por exemplo, a distribuição de ganhos não for representada por uma distribuição normal). Esta propriedade é de suma importância para gerenciamento de risco de diversas áreas de negócios uma vez que o risco do todo nunca pode ser maior que o da soma das partes.

Acerbi et al. (2001) e Acerbi e Tasche (2002) demonstram que o *Expected Shortfall* (ES) é uma medida de risco coerente, e, portanto, em um ambiente de retornos não normais resulta ser uma medida mais confiável e que permite ao investidor ter uma melhor idéia do risco ao qual se encontra exposto.

2.4.
Análise de Performance (Risco – Retorno) da Carteira

A importância da utilização de modelos para a avaliação da performance de investimentos iniciou-se com o princípio de diversificação de Markowitz e de seu modelo de média-variância na década de 1950, no qual se postula que o investidor prefere maior retorno para um mesmo nível de risco. Dessa forma, as métricas necessárias para seleção de carteiras foram baseadas no retorno esperado e no desvio padrão (risco) dos retornos. Posteriormente a relação risco vs retorno foi formalizada estatisticamente nos trabalhos de Treynor (1965), Sharpe (1966) e Jensen (1968) de precificação de ativos (*Capital Asset Pricing Model* – CAPM), onde a partir da hipótese de normalidade dos retornos ou de função utilidade quadrática dos investidores, tem-se como conseqüência que o retorno esperado de uma carteira é tanto maior quanto maior seu risco sistemático seguindo uma forma linear. Desde então a questão da análise de risco foi objeto de grande enriquecimento e crítica na literatura de finanças. Na atualidade, existem diversos métodos de avaliação de desempenho que podem ser aplicados aos fundos ou carteiras de investimentos.

A literatura referente à performance de ativos ou carteiras se concentra em maior escala no processo de seleção de um fundo de investimento ou carteiras, podendo ser dividida em duas partes: verificar qual a carteira adequada para o investidor e tentar descobrir um gestor que possa superar o mercado.

O estabelecimento de diversas maneiras para se calcular ganho e risco é tarefa não trivial e as diversas medidas propostas para indicadores de performance diferem exatamente nesse ponto. Risco pode ser estabelecido como qualquer uma das medidas apresentadas anteriormente, qual seja, o desvio padrão de uma série de ganhos, perda esperada mínima, média ou máxima a um certo nível de confiança ou ainda outra medida que inclua momentos superiores da distribuição. Nesse ponto a Figura 2 retirada de Keating e Shadwick (2002) é deveras ilustrativa, uma vez que indica a importância dos momentos de ordem superior na avaliação de um investimento. As duas distribuições apresentam a mesma média (10) e desvio padrão (152) diferindo em assimetria, curtose e em todos os momentos superiores. Entretanto, segundo alguns indicadores tradicionais de performance como média e desvio padrão ambas seriam equivalentes.

Entre as estatísticas de avaliação de performances de carteiras mais conhecidas estão os indicadores de Sharpe (IS), Treynor (IT), Jensen (IJ) e Sortino (ISor). Os índices desenvolvidos por Treynor e Jensen avaliam a performance levando em consideração o desempenho da carteira do investimento em relação ao desempenho do mercado. Já o índice de Sharpe busca avaliar a performance do investimento levando em consideração apenas o comportamento da carteira, enquanto o índice de Sortino usa o conceito de *Downside Risk*[2] para avaliar os riscos. A medida Omega (Ω), proposta por Keating e Shadwick (2002), é considerada mais consistente devido a que pode lidar satisfatoriamente com distribuições de ganhos observadas na prática (caudas pesadas e valores extremos).

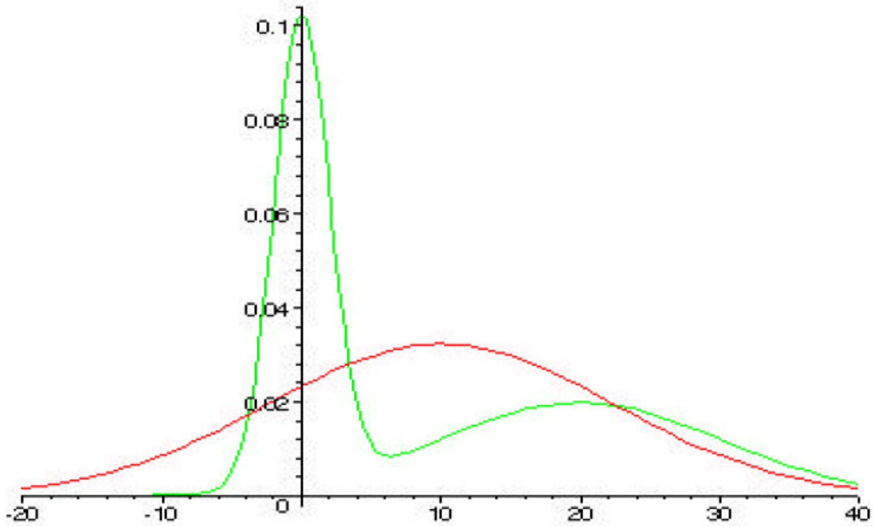

Figura 2 – Distribuições com igual média (10) e variância (152)

[2] Ver equação (7)

2.4.1. Índice de Sharpe

Entre as estatísticas de avaliação de performance mais conhecida está o Índice de Sharpe (IS). Extremamente celebrado entre os acadêmicos e praticantes do mercado financeiro, o IS tem sido amplamente utilizado na avaliação de fundos de investimento. Formulado por William Sharpe (1966), o IS se baseia na teoria de seleção de carteira, apontando pontos na linha do mercado de capitais que correspondem a carteiras ótimas.

O IS é definido na Equação (19):

$$IS = \frac{E[r_P] - r_f}{\sigma_P} \tag{19}$$

onde, r_f é a taxa de juros sem risco, e, $E[r_P]$ e σ_P representam respectivamente o retorno esperado e o desvio-padrão do portfólio.

A teoria de média e variância de Markowitz determina a composição da carteira ótima em um espaço risco-retorno, como as carteiras com máximo retorno esperado para dado risco. É fácil mostrar que as carteiras com maior IS são exatamente as carteiras ótimas.

Diversos cuidados devem ser tomados ao se aplicar o IS na seleção ou classificação de investimentos. O maior deles vem do fato do cálculo do IS não incorporar informação sobre a correlação entre os ativos; portanto, perde importância quando se quer utilizar esse indicador para adicionar um ativo (ou carteira) com risco a uma carteira que já tenha ativos arriscados.

2.4.2. Medidas de Comparação: Índices de Sortino, Alfa de Jensen e Treynor

De acordo com Sortino (1994), o índice que leva seu nome difere do Índice de Sharpe por abordar o conceito de risco denominado de *Downside Risk*, que considera no cálculo da variância apenas as perdas financeiras. Sortino percebeu que o desvio padrão media tão somente o risco de não se atingir uma média. Porém, o mais importante seria capturar o risco de se não atingir o ganho em relação a uma meta.

Portanto, o Índice de Sortino (ISor) depende explicitamente do Retorno Mínimo Aceitável (RMA), para fins de comparação de rendimentos entre a carteira ou ativo analisado e esse mínimo.

Logo, o ISor define-se segundo a Equação (20):

$$\mathrm{ISor} = \frac{E[r_P] - \mathrm{RMA}}{\mathrm{DR}}, \qquad (20)$$

onde DR é o *Downside Risk* apresentado na Equação (7).

A comparação entre o Índice de Sharpe e o Índice de Sortino depende especificamente de como o RMA é selecionado. As principais vantagens do Índice do Sortino são considerar como risco apenas as perdas, e, medi-las explicitamente em função do RMA.

Com base no modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model),* que relaciona o excesso de retorno de um fundo com o excesso de retorno de mercado, vários outros indicadores importantes agregam informação sobre a contribuição de um gestor para a performance do seu fundo. Diferentes indicadores podem gerar classificações diferentes para os fundos disponíveis e, conseqüentemente, levar a decisões diferentes sobre a aquisição dos fundos. Cada um desses indicadores é apropriado para um cenário específico de investimento. Vários indicadores de performance são construídos, tomando-se a Equação (21), que explica o excesso de retorno de um investimento arriscado, pela quantidade de risco sistemático e não-sistemático assumido:

$$E[r_P]-r_f = \alpha+\beta(E[r_M]-r_f)+\varepsilon, \qquad (21)$$

onde $E[r_P]$ é o valor esperado dos retornos do portfólio ou ativo com risco, $E[r_M]$ é o valor esperado do retorno de mercado, β (coeficiente beta) é a sensibilidade dos retornos do ativo para com os retornos do mercado ou também $\beta = \frac{\mathrm{Covariância}(r_P, r_M)}{\mathrm{Variância}(r_M)}$, e, ε é um erro aleatório normal padrão.

O α da equação (21) mede o excesso de retorno obtido pelo portfólio após ajuste pelo risco sistemático (beta vezes o excesso de retorno do mercado). Esse é um indicador proposto por Jensen (1968), conhecido como Alfa ou Índice de Jensen (IJ).

Outro indicador extraído do CAPM elaborado por Treynor (1965), chamado de Índice de Treynor (IT), mede o excesso de retorno por unidade de risco sistemático, em vez do risco total:

$$IT = \frac{E[r_P] - r_f}{\beta} . \tag{22}$$

2.5. Simulação de Monte Carlo

As simulações procuram reproduzir um cenário real de tomada de decisões através de um modelo que busca capturar as características funcionais mais importantes do projeto à medida que eventos aleatórios ocorrem, dado uma estratégia gerencial predefinida. As técnicas de simulação usam uma amostragem aleatória repetida (um processo de repetição aleatória) a partir das distribuições de probabilidade de cada uma das variáveis de entrada que determinam o fluxo de caixa de um projeto, chegando a uma distribuição de probabilidade ou a um “perfil de risco” do VPL.

A Simulação de Monte Carlo geralmente segue os seguintes passos:

1. Modelagem do projeto através de uma série de equações matemáticas para todas as variáveis de entrada importantes, chamadas em nosso caso particular de variáveis de risco, incluindo uma descrição das interdependências entre diferentes variáveis ao longo do tempo.
2. Especificação das distribuições de probabilidade para cada uma das variáveis de entrada, com base num histórico de dados ou no conhecimento e sensibilidade dos profissionais envolvidos. Para lidar com a dependência entre duas variáveis, em princípio uma simples distribuição de probabilidades pode ser determinada para a variável independente, enquanto diversas distribuições são especificadas para a variável dependente, cada uma condicionada a um intervalo de valores para a variável independente. A determinação da correlação entre duas ou mais variáveis é útil no sentido de estabelecer relações de dependência.
3. Uma amostra aleatória é então obtida (usando um gerador de números aleatórios) a partir da distribuição de probabilidades das variáveis de entrada, possibilitando assim o cálculo dos fluxos de caixa líquidos de cada período e o respectivo VPL de um projeto para a amostra

considerada. Da mesma maneira, simulando simultaneamente as variáveis aleatórias dos diversos projetos (considerando possíveis inter-relações entre as variáveis), se obterá o VPL de toda a carteira.

4. O processo é repetido diversas vezes, obtendo-se a cada repetição um VPL para cada projeto e um VPL para a carteira. Ao final, distribuições de probabilidades dos VPL podem ser geradas.

Mesmo podendo usar as simulações em problemas complexos de decisão em regime de incerteza, com um número grande de variáveis de entrada que interagem entre elas de diferentes formas ao longo do tempo, esta técnica possui limitações. Inicialmente, mesmo que a estimativa das distribuições de probabilidade seja feita de maneira não-tendenciosa, é bastante difícil e complexo capturar corretamente todas as interdependências existentes. Além disso, se um projeto pode ter diversos valores presentes possíveis – um para cada ponto da distribuição – então não se pode mais interpretar o valor presente como o preço que o projeto teria num mercado de capital competitivo. Diante deste contexto, opta-se por considerar o valor de mercado do projeto o valor esperado da distribuição dos VPL, tal como propõe a suposição MAD (*Marketed Asset Disclaimer*) proposta por Copeland e Antikarov (2001). Esta suposição é explicada melhor no Capítulo 4.

Por último, mesmo que diante das dificuldades relacionadas acima, queiram-se tomar decisões com base na distribuição de probabilidades do VPL, não há uma regra que traduza esta distribuição numa decisão clara a ser tomada. Então a análise de risco se torna uma ferramenta chave para lidar com as expectativas máximas de perda que a gerência estaria disposta a correr num determinado período de tempo.

A metodologia de otimização de carteira a ser apresentada, utiliza a Simulação de Monte Carlo como principal ferramental para realizar os diversos cálculos. Emprega-se o software comercial @Risk® 4.5, o qual é amplamente utilizado e difundido entre os acadêmicos e nas empresas, pela sua facilidade de utilização e por trabalhar na plataforma das planilhas do Excel®.