

### 3

## Uma nova medida de performance: Omega ( $\Omega$ )

Devido às críticas referentes à abordagem de média-variância proposta por Markowitz (1952), a qual se baseia na hipótese da normalidade da distribuição dos ganhos, Keating e Shadwick (2002) apresentam a medida universal de performance denominada de Omega, a qual reflete todas as propriedades estatísticas da distribuição de ganhos, incorporando todos os seus momentos e não somente a média e a variância.

### 3.1.

#### Introdução ao Omega

Muitas dificuldades são encontradas ao momento de definir uma adequada medida de performance de um ativo ou de uma carteira. A maioria dos indicadores considera duas importantes simplificações:

- A média e a variância descrevem completamente a distribuição de retornos.
- As características do risco-retorno de uma carteira podem ser descritas sem precisar fazer referência a nenhum nível de retorno além da média dos retornos.

Estas simplificações são válidas se é assumida uma distribuição normal dos retornos, mas é geralmente aceito o fato empírico de que os retornos dos investimentos não possuem uma distribuição normal. Assim, além da média e variância, momentos de ordem superior seriam necessários para descrever melhor a distribuição.

A medida Omega ( $\Omega$ ) consegue incorporar todos os momentos da distribuição. Ela fornece uma completa descrição das características do risco-retorno, de tal modo que resulta em uma medida intuitivamente atrativa e facilmente computável. Ao invés de estimar alguns momentos individuais, Omega mede o impacto total, o qual é certamente de interesse dos tomadores de decisões.

Omega também leva em conta um nível de retorno chamado de “limite” (L) definido exogenamente, o qual é a fronteira entre o que se considera como

ganho e como perda. Mesmo em distribuições normais, dependendo do valor do  $L$ , a medida Omega fornece informações adicionais que só a média e variância não conseguiriam. Isto levaria a obter diferentes resultados em otimização de carteiras, se comparado com a otimização clássica de Markowitz.

A seguir vai se exemplificar estes conceitos, mostrando as limitações do uso exclusivo da média e variância, por meio de alguns casos.

### Caso 1:

A Figura 3 ilustra duas distribuições normalmente distribuídas:

- O Ativo A tem média ( $\mu_A$ ) igual a 0,1 e variância ( $\sigma_A^2$ ) igual a 0,04.
- O Ativo B tem média ( $\mu_B$ ) igual a 0,1 e variância ( $\sigma_B^2$ ) igual a 0,09.

Os gráficos exibidos na Figura 3 são provenientes de uma simulação de 1000 retornos, com as médias e variâncias especificadas.

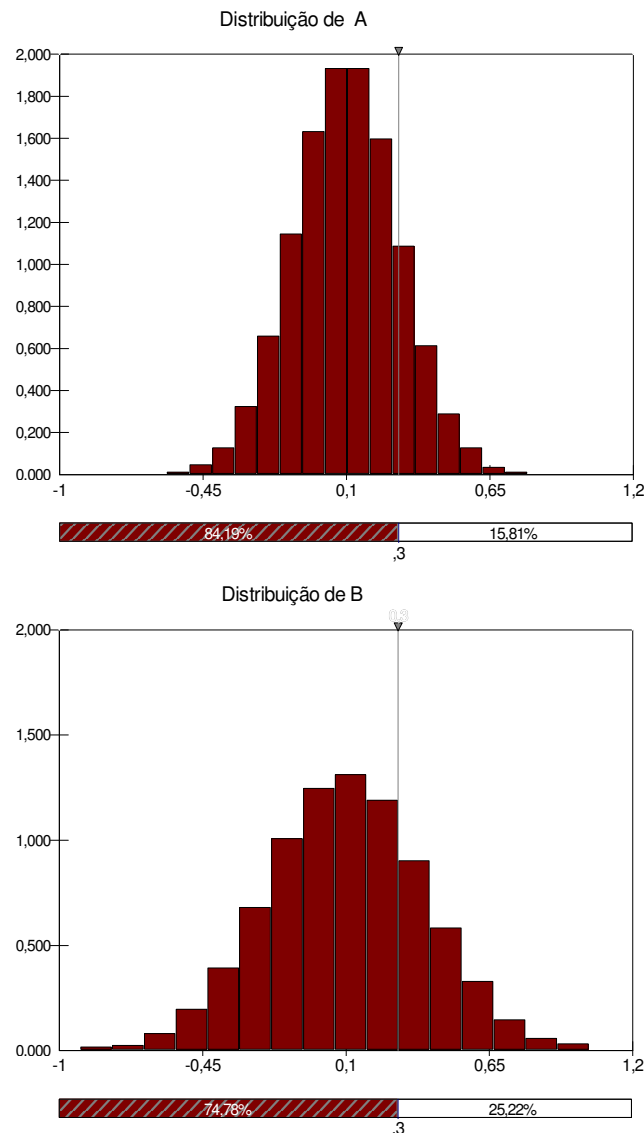


Figura 3 – Distribuição de probabilidades dos Ativos A e B

Resulta mais interessante superpor estas duas distribuições para observar as diferenças na dispersão dos dados entre elas. Além disso, vai-se considerar um limite  $L = 0,3$ , que é definido como o retorno mínimo aceitável estipulado pelo investidor. A Figura 4 exibe as distribuições dos ativos A e B de uma maneira contínua.

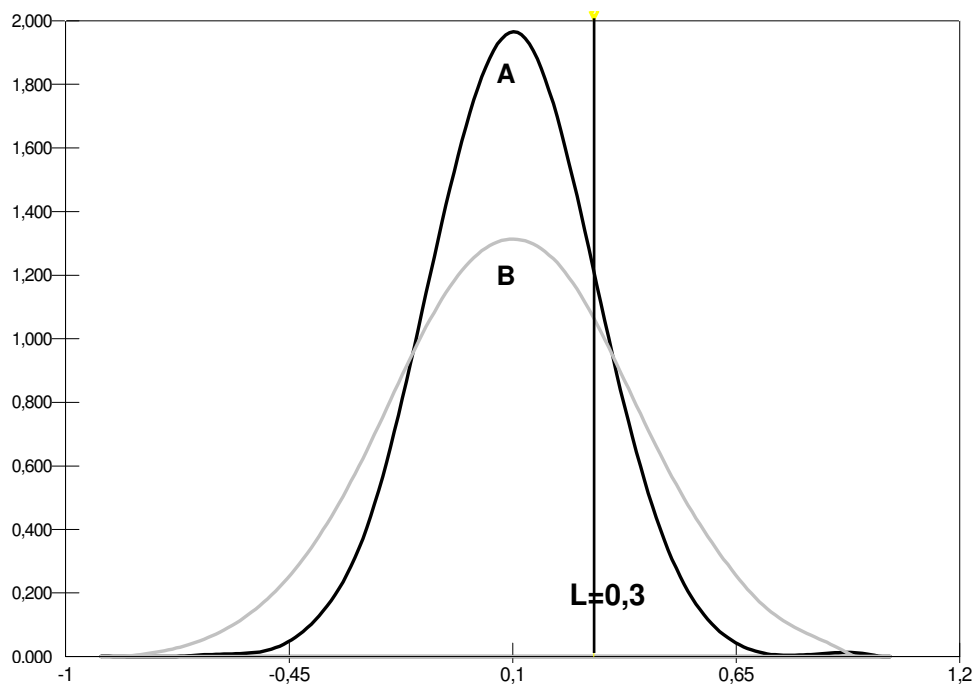


Figura 4 – Distribuições contínuas dos Ativos A e B, e o limite  $L = 0,3$

Analisando a performance destes ativos pelo Índice de Sharpe (IS):

- Ativo A:  $IS_A = (\mu_A - R_f)/\sigma_A = 1/0,2 * (\mu_A - R_f) = 5*(\mu_A - R_f)$ .

- Ativo B:  $IS_B = (\mu_B - R_f)/\sigma_B = 1/0,3 * (\mu_B - R_f) = 3,33*(\mu_B - R_f)$ .

Mas como  $\mu_A = \mu_B$ , então  $(\mu_A - R_f) = (\mu_B - R_f)$ , assim  $IS_A > IS_B$ . Isto significa que, pelo índice de Sharpe, se deve preferir o ativo A em vez do B.

A distribuição de A minimiza as potenciais perdas, mas também minimiza os potenciais ganhos. Considerando a posição do investidor que define perda como um retorno abaixo de  $L=0,3$ , observa-se na Figura 3 as probabilidades acima e abaixo deste valor para ambas as distribuições. Pode-se calcular a Taxa de Probabilidades de Ganhos vs. Perdas (TPGP), assim:

- Ativo A:  $TPGP_A = \text{Probabilidade acima de } L / \text{Probabilidade abaixo de } L$

$$TPGP_A = 0,1581/0,8419 = 0,1878.$$

- Ativo B:  $TPGP_B = 0,2522/0,7478 = 0,3373$ .

Por meio da TPGP determinou-se que para um  $L = 0,3$  o ativo B resulta mais conveniente do que o ativo A, o qual não é possível de ser identificado pelo Índice de Sharpe.

### Caso 2:

A Figura 5 ilustra duas distribuições assimétricas:

- O Ativo C tem média ( $\mu_C$ ) igual a 1,0486, variância ( $\sigma_C^2$ ) igual a 0,2196, assimetria ( $SK_C$ ) igual a -0,219 e curtose ( $K_C$ ) igual a 2,8278.

- O Ativo D tem média ( $\mu_D$ ) igual a 1,0486, variância ( $\sigma_D^2$ ) igual a 0,2196, assimetria ( $SK_D$ ) igual a 0,219 e curtose ( $K_D$ ) igual a 2,8278.

A assimetria é uma medida calculada a partir do terceiro momento da distribuição. Em uma distribuição normal, perfeitamente simétrica, a assimetria é igual a 0. Assimetria negativa indica que a distribuição se concentra mais no lado direito. Assimetria positiva, indica o contrário.

A curtose é uma medida de dispersão dos dados calculada a partir do quarto momento da distribuição. Em uma distribuição normal o valor da curtose é igual a 3. Curtose  $> 3$  indica uma distribuição leptocúrtica (mais alta com caudas pesadas). Curtose  $< 3$  indica uma distribuição platicúrtica (mais achatada).

A Figura 5 ilustra as distribuições de probabilidades (em forma contínua) dos ativos C e D. Ambos os ativos têm igual média, variância e curtose. O que é diferente é a sua medida de assimetria, a assimetria, que é da mesma magnitude, mas com sinal oposto.

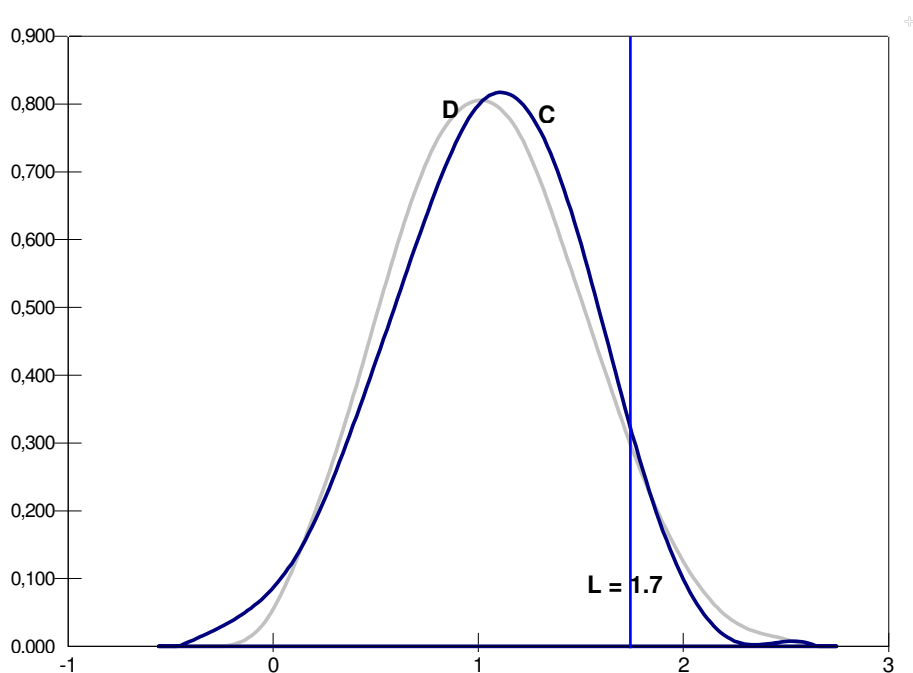


Figura 5 – Distribuições contínuas dos Ativos C e D, e o limite  $L = 1,7$

Desde o ponto de vista da análise média - variância ambos os ativos são igualmente preferíveis. O Índice de Sharpe seria o mesmo tanto para o ativo C como para o ativo D.

Considerando a posição do investidor que define perda como um retorno abaixo de  $L=1,7$ , o cálculo da taxa de probabilidade de ganhos vs. perdas (TPGP), para ambas as distribuições ficaria assim:

- Ativo C:  $TPGP_C = \text{Probabilidade acima de } L / \text{Probabilidade abaixo de } L$   
 $TPGP_C = 0,0810 / 0,9190 = 0,0881.$

- Ativo D:  $TPGP_D = 0,0890 / 0,9110 = 0,0977.$

Observando as probabilidades de ocorrência de cenários acima e abaixo do nível  $L=1,7$ , observa-se que o ativo C gera maiores perdas. Mas se o nível  $L$  fosse 0,9, o  $TPGP_C = 1,7027$  e o  $TPGP_D = 1,5575$ , tem-se uma situação contrária à anterior. Posteriormente será exibido que, pela medida Omega ( $\Omega$ ), para qualquer nível  $L$  o ativo D é preferível ao ativo C. Só no caso do  $L$  ser igual à média, ambas as medidas coincidem. Conseqüentemente, esta análise mais apurada chega a conclusões totalmente diferentes das obtidas pelo simples estudo da média-variância.

### Caso 3:

A Figura 6 ilustra outras duas distribuições:

- O Ativo E é normalmente distribuído e tem média ( $\mu_E$ ) igual a 0,5, variância ( $\sigma_E^2$ ) igual a 1,66.

- O Ativo F é simetricamente distribuído e tem média ( $\mu_F$ ) igual a 0,5, variância ( $\sigma_F^2$ ) igual a 1,66 e curtose ( $K_F$ ) igual a 6,30.

Basicamente a única diferença do ativo F para o ativo E é o seu excesso de curtose igual a 3,30 (6,3-3,0). Estas distribuições têm capacidades drasticamente diferentes para obter grandes perdas e grandes ganhos.

O ativo F, devido a suas caudas pesadas, apresenta uma maior predisposição para perdas e ganhos grandes. Por exemplo, para um  $L = 4,5$  calculam-se as taxas de probabilidades de ganhos vs. perdas (TPGP):

- Ativo E:  $TPGP_E = \text{Probabilidade acima de } L / \text{Probabilidade abaixo de } L$   
 $TPGP_E = 0,0009463 / 0,99905 = 0,9472 \times 10^{-3}.$

- Ativo F:  $TPGP_F = 0,0050225 / 0,9950 = 5,048 \times 10^{-3}.$

Observa-se que a TPGP para o ativo F é mais de 5 vezes maior do que a TPGP do ativo E, indicando uma maior chance para F ter ganhos excessivos.

Estipulando um  $L$  próximo da média, fica menos obvio qual dos dois seria mais preferível e vai depender da faixa de retornos sob consideração. Para um  $L=1,3$  os resultados são os seguintes:

- Ativo E:  $TPGP_E = 0,2678 / 0,7322 = 0,3657$ .

- Ativo F:  $TPGP_F = 0,2374 / 0,7626 = 0,3113$ .

Neste último experimento, o ativo E apresenta maiores chances de obter ganhos acima do  $L$  fixado.

Portanto, dado que ambas as distribuições têm as mesmas média e variância, as diferenças em quanto aos níveis de preferência são causadas pelos momentos superiores, neste caso específico, pelo excesso de curtose de 3,3 de ativo F sobre a distribuição normal do ativo E. Os critérios de escolha da teoria clássica de média-variância indicariam indiferença para estes dois ativos, mostrando-se incapaz de lidar com a influência dos momentos de ordem superior.

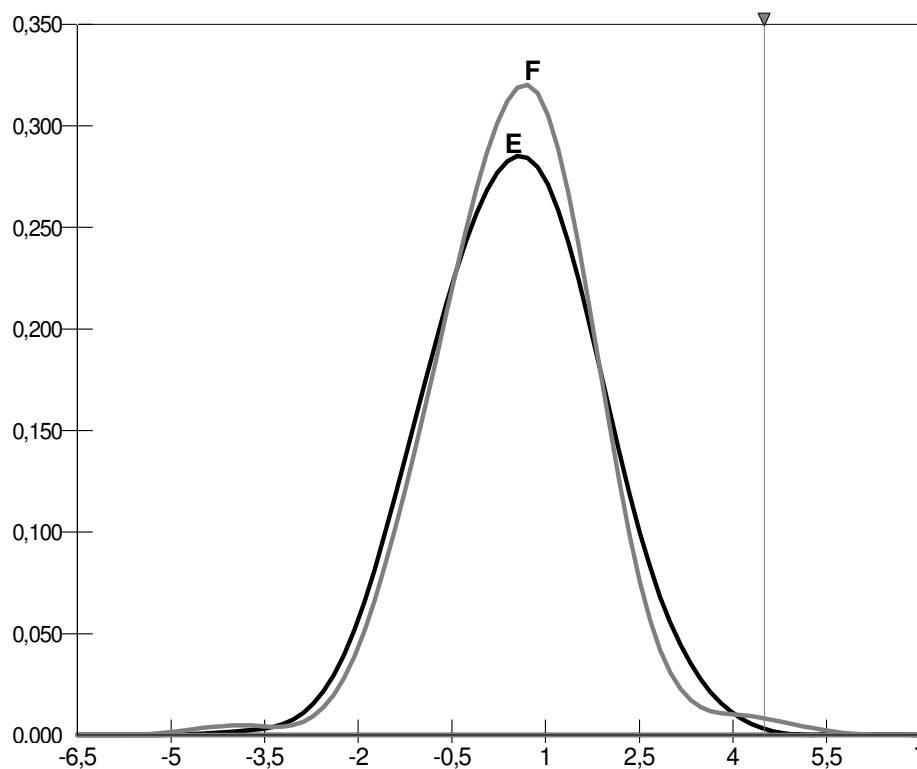


Figura 6 – Distribuições contínuas dos Ativos E e F, e o limite  $L = 4,5$

#### Caso 4:

A Figura 7 ilustra duas distribuições:

- O Ativo G é normalmente distribuído e tem média ( $\mu_G$ ) igual a 0,85, variância ( $\sigma_G^2$ ) igual a 0,2163.

- O Ativo H é assimetricamente distribuído e tem média ( $\mu_H$ ) igual a 0,8, variância ( $\sigma_H^2$ ) igual a 0,2163, assimetria ( $SK_H$ ) igual a 0,7388 e curtose ( $K_H$ ) igual a 3,2785.

Ambas as distribuições possuem a mesma variância, mas o ativo H tem um leve excesso de curtose ( $3 - 3,2785 = 0,2785$ ) sobre o ativo G, e apresenta uma assimetria positiva. A média do ativo G é maior do que a média do ativo H, e dado que ambos têm idêntica variância, o ativo G sempre seria preferível ao ativo H de acordo com o critério do Índice de Sharpe.

Para um  $L = 0,85$ , igual à média do ativo G, calculam-se as taxas de probabilidades de ganhos vs. perdas (TPGP):

- Ativo G:  $TPGP_G = \text{Probabilidade acima de } L / \text{Probabilidade abaixo de } L$

$$TPGP_G = 0,50 / 0,50 = 1,00.$$

- Ativo H:  $TPGP_H = 0,4052 / 0,5948 = 0,6812.$

Como era esperado a TPGP para o ativo G é mais alto do que a TPGP do ativo H, corroborando a teoria de Sharpe. Mas o que aconteceria se o investidor estipula um retorno desejado mais próximo das caudas direitas? Por exemplo, fazendo  $L = 1,5$  as TPGP seriam:

- Ativo G:  $TPGP_G = 0,0804 / 0,9196 = 0,0874.$

- Ativo H:  $TPGP_H = 0,0828 / 0,9172 = 0,0903.$

Com  $L = 1,5$  existem mais chances de encontrar cenários desejáveis escolhendo o ativo H. Portanto, dependendo do nível de retorno  $L$  nem sempre o ativo G que tem maior média seria o mais recomendável.

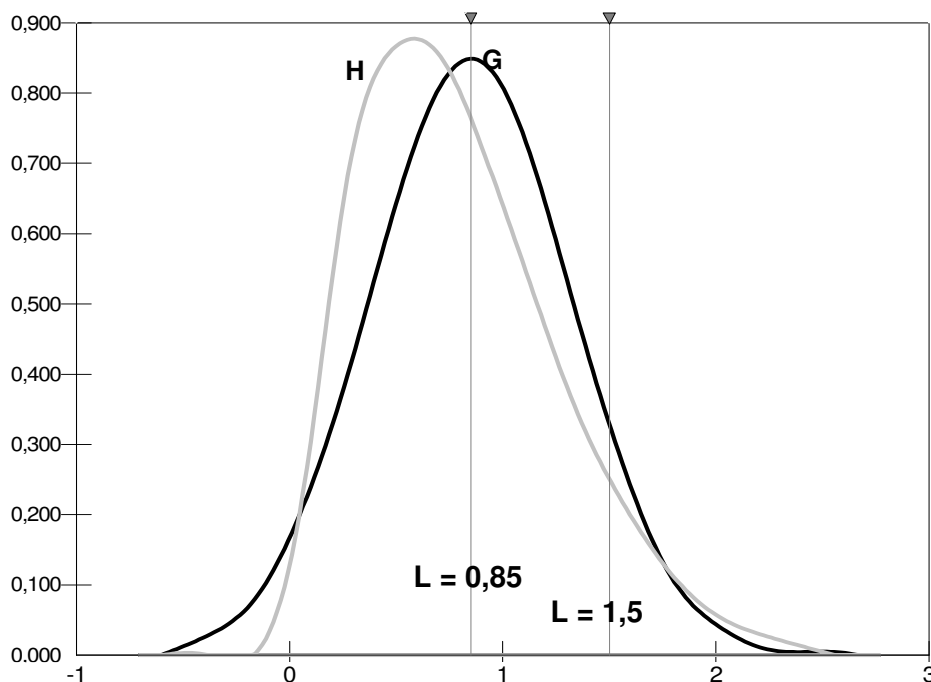


Figura 7 – Distribuições contínuas dos Ativos G e H, e os limites  $L = 0,85$  e  $L = 1,5$

A partir da análise dos casos apresentados, conclui-se que é necessário incorporar a informação dos momentos de ordem superior a 2 nas medidas de performance. A medida Omega leva em conta todos os momentos da distribuição sendo de fácil cálculo e implementação.

### 3.2. A Função Omega

Para definir a função Omega ( $\Omega$ ), primeiramente deve-se definir exogenamente o retorno limite ( $L$ ). Este divide a distribuição de probabilidades de retornos em duas áreas: a área de ganhos, e a área de perdas. Este limite varia por indivíduo e pelo tipo de investimento. Na Figura 8 se ilustra a maneira de exemplo um modelo de uma distribuição de retornos de um ativo, no qual foi estabelecido um limite  $L = 1,4$ .

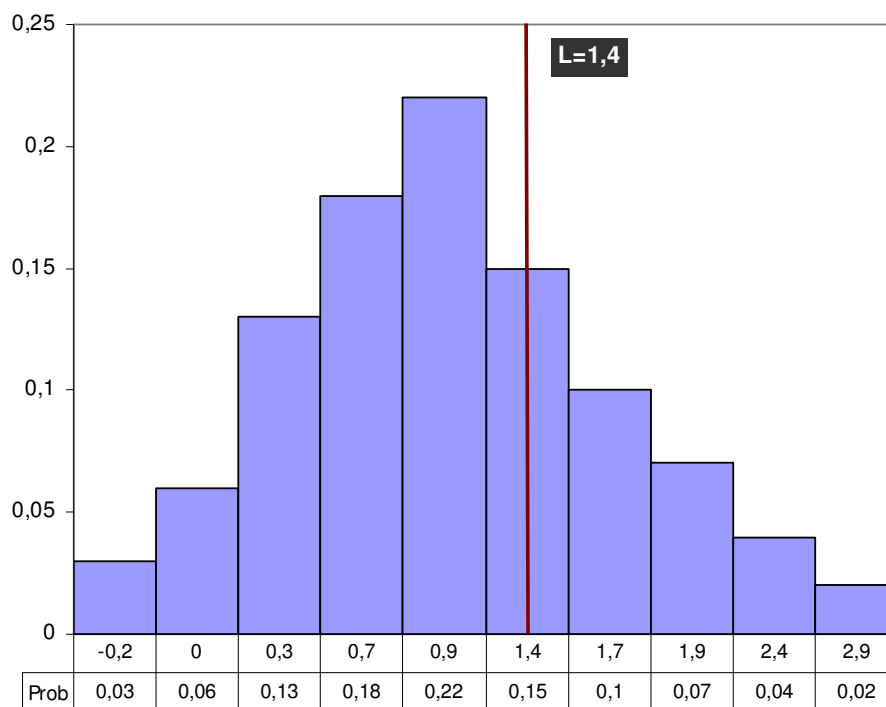


Figura 8 – Distribuição de retornos com um limite  $L=1,4$

A distribuição de probabilidades da Figura 8, na sua forma discreta como é apresentada, servirá de exemplo para entender o conceito da medida Omega e o procedimento para calcular este indicador.

Uma vez especificado o retorno limite  $L$ , pode-se comparar a probabilidade ponderada de ganhos e perdas relativos a ele:



- O ganho esperado, dado um retorno maior do que L, é justamente o valor esperado condicional dos retornos que excedem L,  $E(r | r \geq L)$ .

- A perda esperada, dado um retorno menor do que L, seria  $E(r | r < L)$ .

Assim, o ganho esperado e a perda esperada relativos ao retorno limite L, são  $g = E(r | r \geq L) - L$  e  $l = L - E(r | r < L)$  respectivamente.

No exemplo da Figura 8, estes valores seriam:

- $E(r | r \geq L) = E(r | r \geq 1,4) = (1,4 + 1,7 + 1,9 + 2,4 + 2,9)/5 = 2,06$ ,
- $E(r | r < L) = E(r | r < 1,4) = (-0,2 + 0 + 0,3 + 0,7 + 0,9)/5 = 0,34$ .

Assim:  $g = E(r | r \geq 1,4) - 1,4 = 2,06 - 1,4 = 0,66$ ,

$$l = L - E(r | r < 1,4) = 1,4 - 0,34 = 1,06.$$

Na Figura 9, utilizando a função de distribuição cumulativa, são exibidos estes resultados.

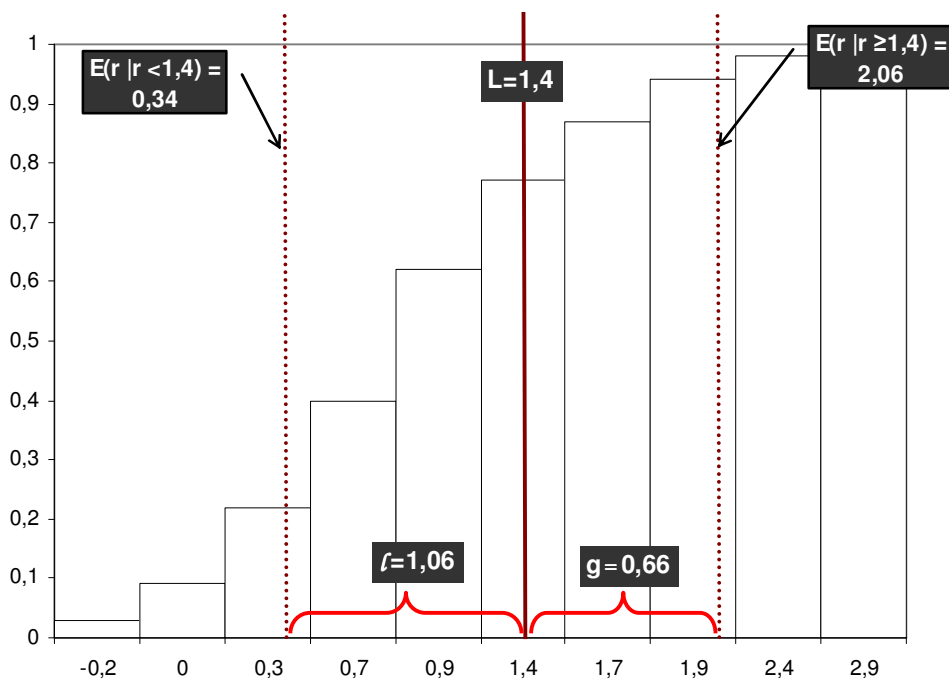


Figura 9 – Distribuição cumulativa com os respectivos ganho (g) e perda (l) esperados

Os valores esperados de ganhos e perdas por si próprios não são muito informativos. Para poder comparar de modo significativo ganhos e perdas potenciais, é necessário ponderá-los por suas probabilidades. Desse modo, se  $F(r)$  é a função de distribuição cumulativa para os retornos, tem-se que:

- A probabilidade de que um retorno seja menor do que o limite L é  $F(L)$ .
- A probabilidade de que um retorno fique acima de L é  $1 - F(L)$ .

Portanto, o índice  $\Omega = [g \times (1 - F(L))] / [l \times F(L)]$  daria uma medida da qualidade do investimento. A Figura 10 ilustra a função de distribuição cumulativa do

exemplo, mostrando o numerador e o denominador do índice  $\Omega$ , que são o retângulo superior e o retângulo inferior respectivamente.

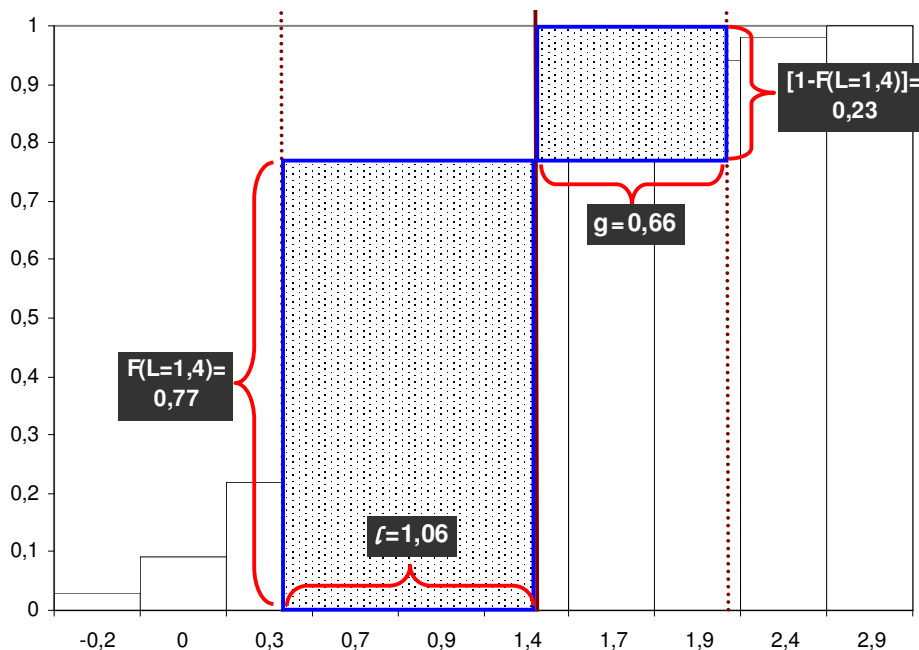


Figura 10 – Ganhos (retângulo superior) e perdas (retângulo inferior) ponderadas, relativos ao retorno limite  $L=1,4$

Através do gráfico da Figura 10 pode-se calcular o índice  $\Omega$  para o exemplo:  $\Omega = [0,66 \times 0,23] / [1,06 \times 0,77] = 0,1518 / 0,8162 = \mathbf{0,1860}$ .

O Índice  $\Omega$  considera somente um ganho e uma perda em particular. Mas sendo mais abrangentes, deve-se considerar toda a possível faixa de retornos. Assim, os ganhos e perdas de qualquer quantidade podem ocorrer com alguma probabilidade nesse intervalo. Esta situação leva a uma área única à medida que a unidade dos ganhos e perdas se torna progressivamente menor. A Figura 11 ilustra esta idéia, e de acordo com ela os ganhos e perdas ponderadas seriam calculadas como se mostra na Tabela 1.

Tabela 1 – Cálculo dos Ganhos e Perdas Ponderadas

$r < L$	$l_i = r_{i+1} - r_i$	$F(r)$	$l \cdot F(r)$
-0,2	0,2	0,03	0,006
0	0,3	0,09	0,027
0,3	0,4	0,22	0,088
0,7	0,2	0,4	0,08
0,9	0,5	0,62	0,31
1,4			
Perda Ponderada = $\sum l_i F(r_i)$			<b>0,511</b>

$r \geq L$	$g_i = r_{i+1} - r_i$	$F(r)$	$[1-F(r)]$	$g \cdot [1-F(r)]$
1,4	0,3	0,77	0,23	0,069
1,7	0,2	0,87	0,13	0,026
1,9	0,5	0,94	0,06	0,03
2,4	0,5	0,98	0,02	0,01
2,9				
Ganho Ponderado = $\sum g_i [1-F(r_i)]$				<b>0,135</b>

Assim,  $\Omega = 0,135 / 0,511 = \mathbf{0,2642}$

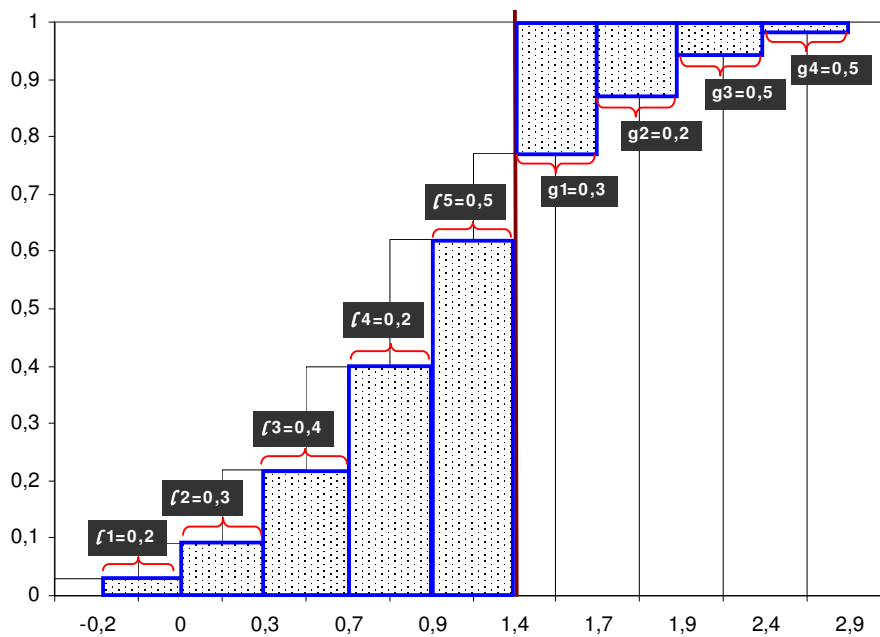


Figura 11 – Reduzindo os intervalos entre retornos refina-se a estimativa de ganhos e perdas relativos a  $L = 1,4$

Por meio do exemplo apresentado de uma distribuição de retornos com probabilidades discretas, conseguiu-se visualizar o conceito da medida de performance  $\Omega$ , a qual leva em consideração o formato íntegro da distribuição.

Quando a distribuição de probabilidades deixa de ser discreta, isto é, uma função de densidade, a forma que toma a Figura 11 no limite, quando os intervalos se tornam cada vez menores, é exibida na Figura 12. A taxa da área superior pela área inferior seria a medida  $\Omega(1,4)$ .

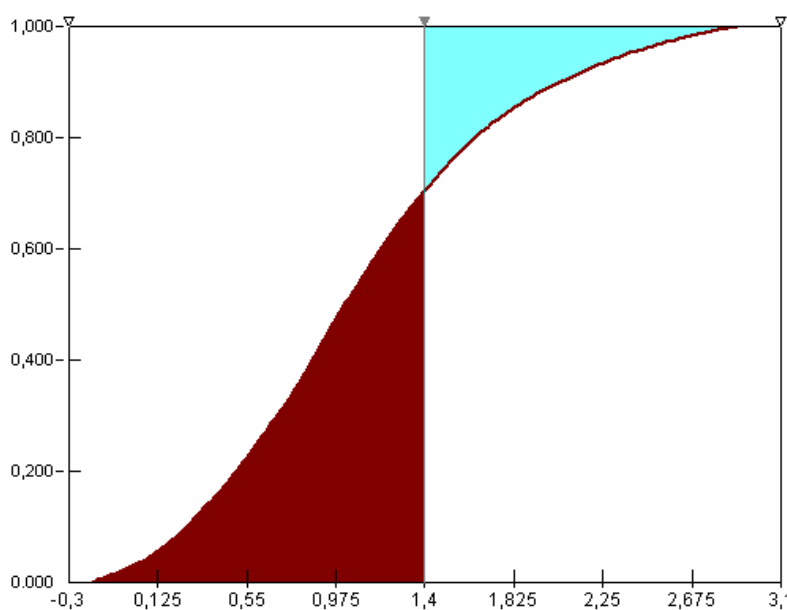


Figura 12 – O limite quando a unidade de ganhos e perdas tende a zero.

Considerando o caso de uma função de densidade, como a exibida na Figura 12, define-se:

- (a,b) = Os limites inferior e superior, respectivamente, da faixa de retornos da distribuição. No caso mais geral,  $a = -\infty$  e  $b = \infty$ .
- $I_2(L)$  = A média ponderada de ganhos acima de um nível L (área superior da Figura 12).
- $I_1(L)$  = A média ponderada de perdas abaixo de um nível L (área inferior da Figura 12).

A medida de performance  $\Omega$  calculada de maneira discreta, vira  $\Omega$  na sua forma contínua, e se define através da seguinte expressão:

$$\Omega(L) = \frac{I_2}{I_1} = \frac{\int_L^b [1 - F(x)] dx}{\int_a^L F(x) dx}, \quad (23)$$

onde:

$F(x)$  = Função de Distribuição Cumulativa (FDC) dos ganhos "x",

L = nível mínimo requerido de ganhos,

a = retorno mínimo,

b = retorno máximo.

A função  $\Omega(L)$  permite comparar retornos de diferentes ativos e classificá-los em relação à magnitude dos seus Omegas. A classificação dependerá do intervalo de retornos considerado e incorporará todos os efeitos dos momentos de ordem superior.

Apresentada a função Omega  $\Omega(L)$ , vai se exibir a forma que esta possui nos quatro casos apresentados no início desta seção. Devido à grande variação dos valores do Omega ao longo da faixa de retornos, será apresentado o logaritmo natural da medida Omega, ao invés do Omega.

### **Omega Caso 1:**

Ambos os ativos (A e B) são normalmente distribuídos com média igual a 0,1, mas o ativo A tem menor variância (0,04 vs. 0,09). Pelo exibido na Figura 13, o ativo A é preferível para qualquer retorno abaixo da média. Em troca, o ativo B é preferível para qualquer retorno acima da média.

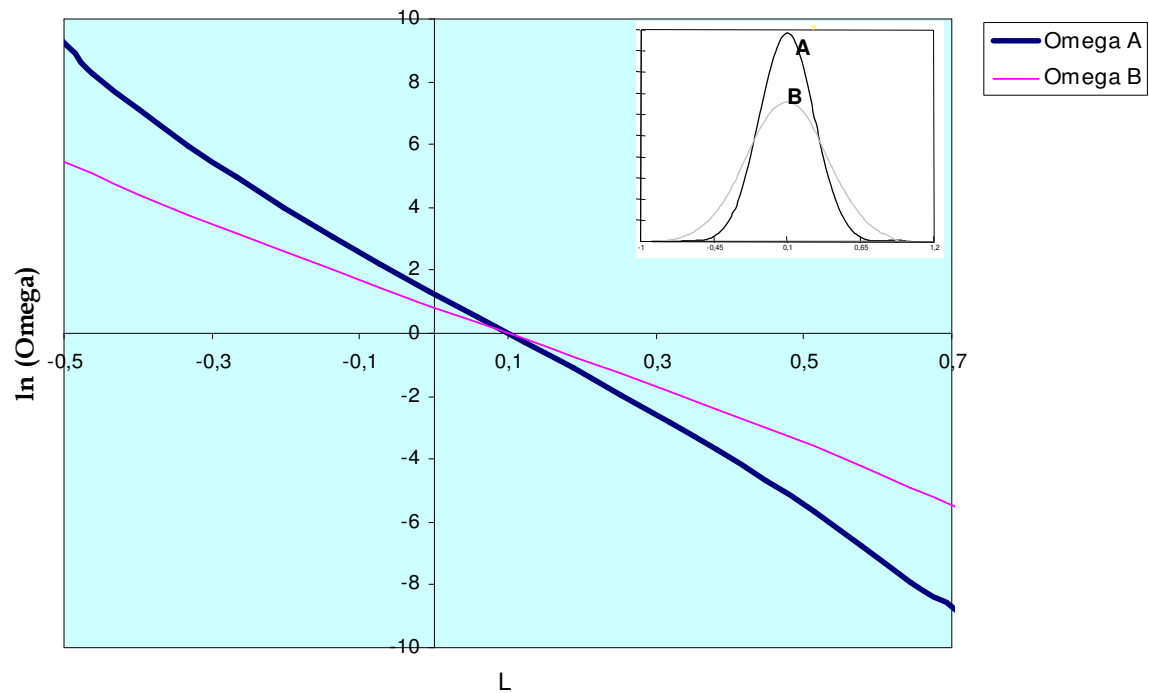


Figura 13 – Caso 1: Função  $\ln(\Omega(L))$  para os ativos A e B

### Omega Caso 2:

Neste caso, com duas distribuições assimétricas de igual média (1,0486) e variância (0,2196) e com assimetrias de igual magnitude, mas de sinais diferentes, observa-se pela Figura 14 que o ativo D (de assimetria positiva) é preferível ao ativo C em todas as situações possíveis de retornos, exceto quando o retorno iguala à média, dando em ambos os casos medidas ômegas iguais.

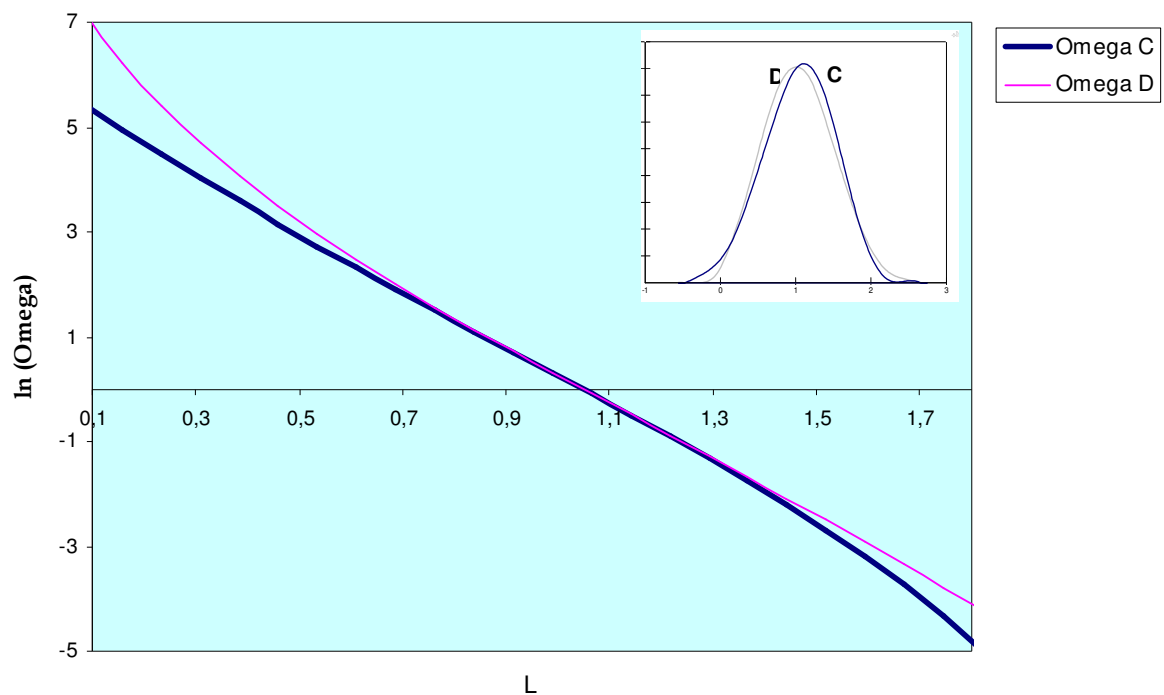


Figura 14 – Caso 2: Função  $\ln(\Omega(L))$  para os ativos C e D

### Omega Caso 3:

Neste caso, com duas distribuições simétricas de idêntica média (0,5) e variância (1,66), e tendo uma delas (F) excesso de curtose igual 3,3, observa-se pela Figura 15 que:

- Para retornos  $-\infty < r \leq -0,934$ , e,  $0,5 \leq r \leq 1,934$ , o ativo E é preferível ao F.
- Para retornos  $-0,934 \leq r \leq 0,5$ , e,  $1,934 \leq r \leq +\infty$ , o ativo F é preferível ao E.

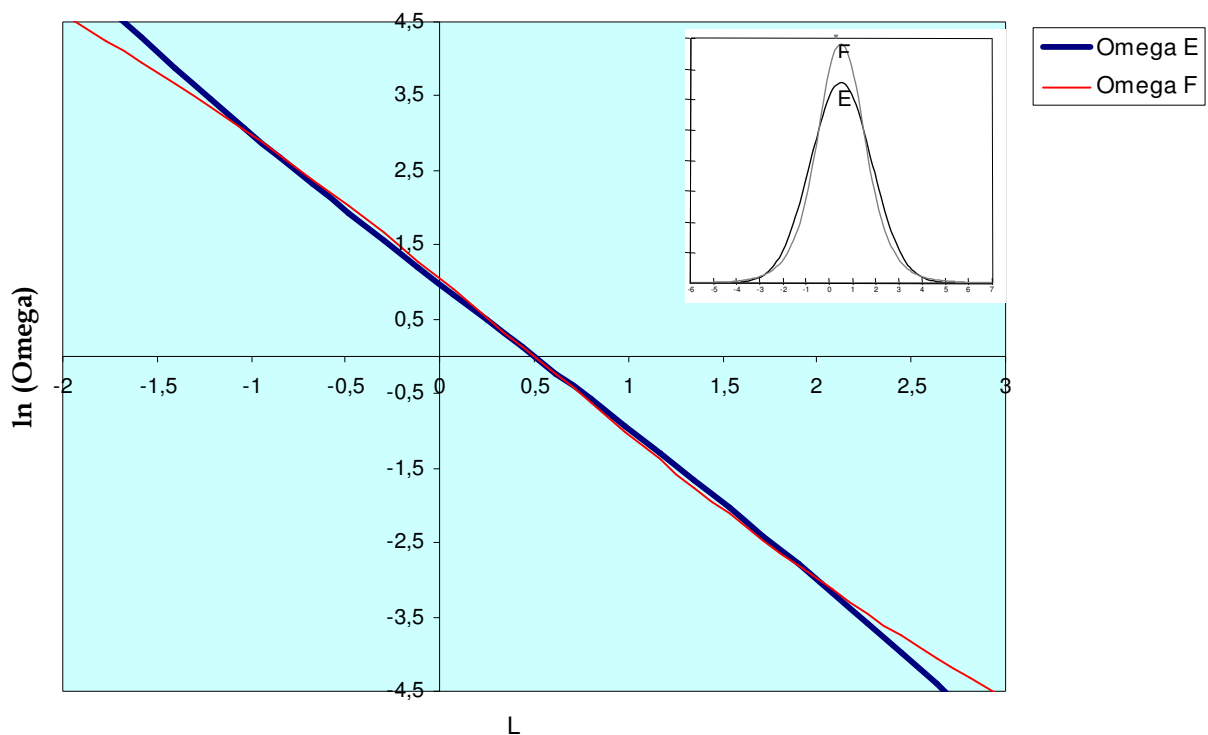


Figura 15 – Caso 3: Função  $\ln(\Omega(L))$  para os ativos E e F

### Omega Caso 4:

Este caso consiste de duas distribuições, uma normalmente distribuída com média 0,85 e outra com distribuição assimetricamente positiva com média 0,80 apresentando um leve excesso de curtose (0,2785). Ambas as distribuições possuem idêntica variância. Pelo observado na Figura 16, tem-se que:

- Para retornos  $-\infty < r \leq 0,458$ , e,  $1,271 \leq r \leq +\infty$ , o ativo H é preferível ao G.
- Para retornos  $0,458 \leq r \leq 1,271$ , o ativo G é preferível ao H.

Este caso resulta interessante de analisar através da medida Omega. Normalmente espera-se que o ativo com a maior média seja sempre o mais preferível, e dado que ambos os ativos possuem a mesma variância, como é o caso do exemplo, esta escolha fica ainda mais clara. Mas mostrou-se que, dependendo da forma da distribuição, a escolha do ativo de melhor performance é função dos retornos estipulados como limites.

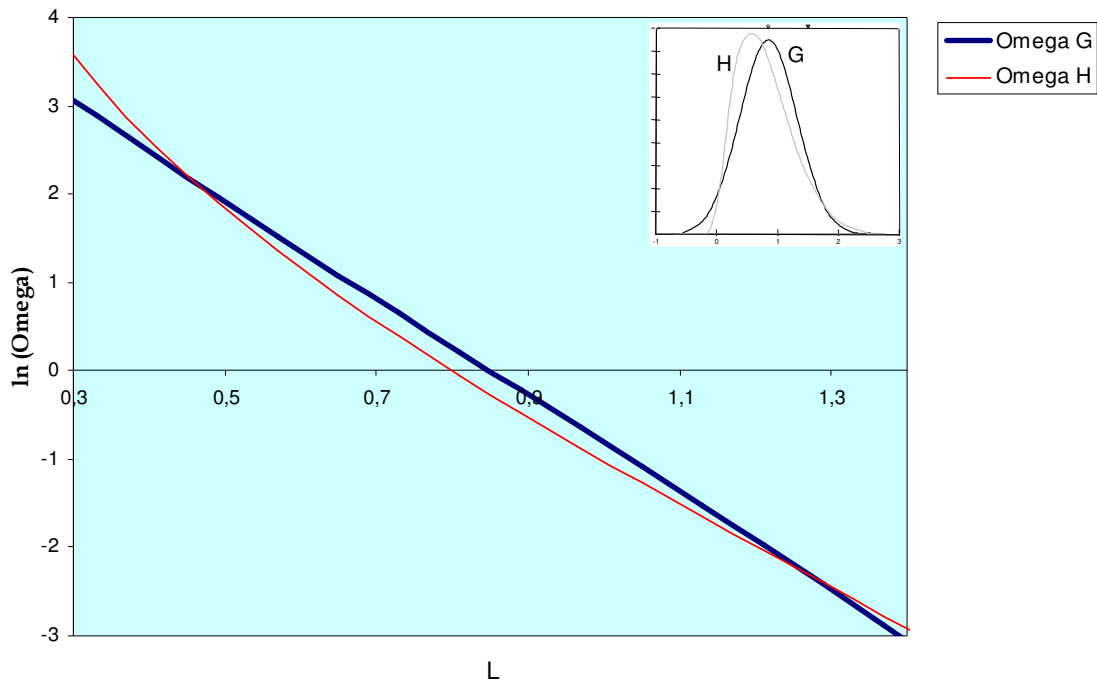


Figura 16 – Caso 4: Função  $\ln(\Omega(L))$  para os ativos G e H

Para este mesmo caso, como se comportaria a função Omega no caso que a distribuição de H seja normal, mantendo a mesma média e variância? A Figura 17 ilustra esta alteração (H vira H'). Nela observa-se que o ativo G que possui maior média será preferível à distribuição H' para todo nível de L. O resultado é coerente visto que as duas distribuições mantêm o mesmo formato (só uma é mais deslocada à direita) não existindo nenhuma diferença na forma das caudas, o que faz que a escolha de G não seja alterada.

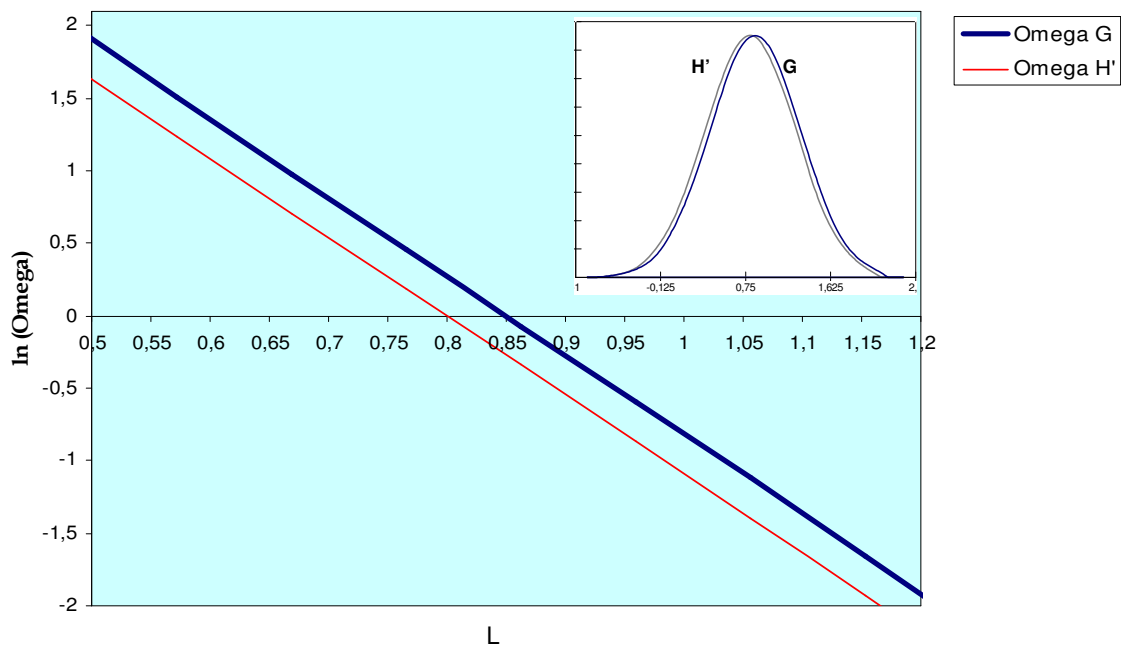


Figura 17 – Função  $\ln(\Omega(L))$  para os ativos G e H'

### 3.3. Propriedades da Função Omega

#### 3.3.1. Representação alternativa da Função Omega

A Equação (23) que define a medida Omega, pode ser representada de uma maneira mais intuitiva. Kazemi et al. (2003) demonstram que a função Omega  $\Omega(L)$  pode ser escrita como uma divisão de dois valores esperados:

- O numerador é o valor esperado do excesso de ganho  $(x-L)$  condicional a resultados positivos, ou também conhecido como *Expected Chance* (EC).
- O denominador é o valor esperado da perda  $(L-x)$  condicional resultados negativos, chamado também de *Expected Shortfall* (ES).

Estas definições podem ser apreciadas graficamente na Figura 18.

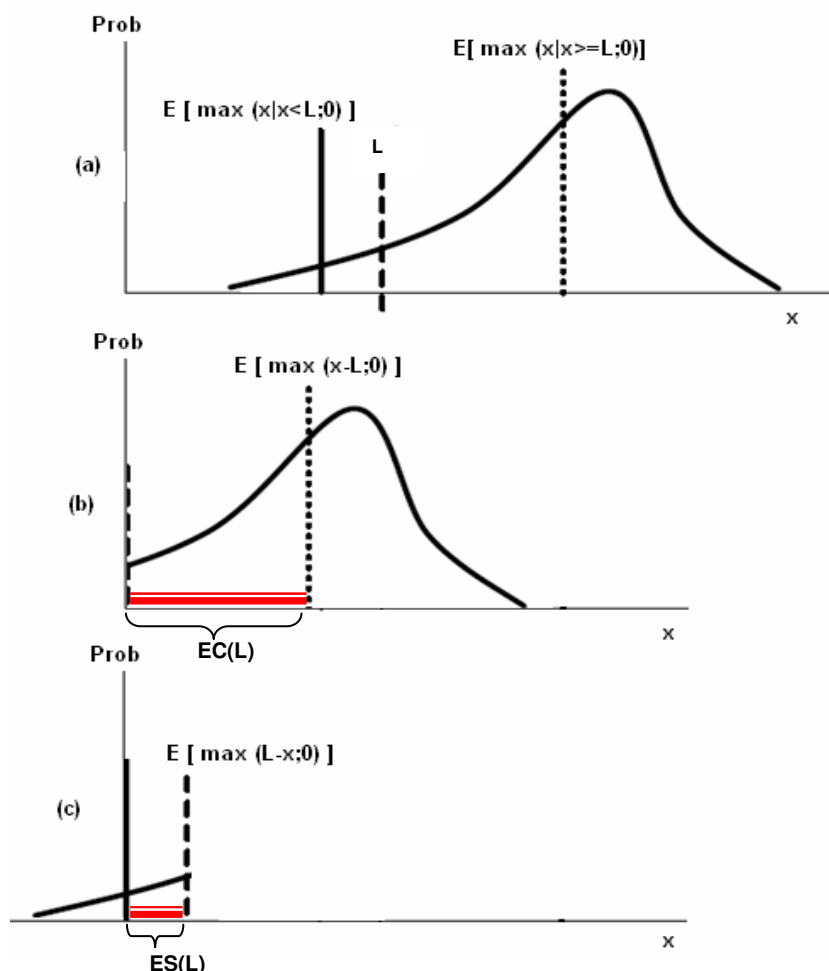


Figura 18 – Numerador (EC(L)) e denominador (ES(L)) da medida Omega.

A Figura 18 permite visualizar graficamente o numerador e denominador da medida Omega para a representação alternativa. Nela, ilustra-se a idéia



básica dessa medida. "O que se espera ganhar caso se ganhe (*expected return given no loss*) comparado com o que é esperado perder caso se perca (*expected return given loss*)?". De forma a responder essa questão, primeiro deve-se definir o parâmetro máximo aceitável de perda  $L$ , que represente as preferências de risco dos investidores, sendo que um maior  $L$  denota um maior apetite por risco. Um maior valor de Omega é preferível independente do nível de ganho requerido.

No Apêndice 1 se detalha como chegar à Equação (24), que exibe a representação alternativa da medida Omega ( $\Omega$ ):

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F(x)] dx}{\int_a^L F(x) dx} = \frac{\int_L^b (x - L) f(x) dx}{\int_a^L (L - x) f(x) dx} = \frac{E[\text{Max}(x - L; 0)]}{E[\text{Max}(L - x; 0)]} = \frac{EC(L)}{ES(L)} \quad (24)$$

A seguir, testa-se a Equação (24) no exemplo numérico apresentado na seção 3.2. A Tabela 2 mostra os resultados.

Tabela 2 – Cálculo do Omega  $\Omega(L=1,4)$  empregando a fórmula alternativa

R	Prob.	Prob. Cumul.	Max(r-L;0)	Max(L-r;0)	Prob. × Max(r-L;0)	Prob. × Max(L-r;0)
-0,2	0,03	0,03	0	1,6	0	0,048
0	0,06	0,09	0	1,4	0	0,084
0,3	0,13	0,22	0	1,1	0	0,143
0,7	0,18	0,4	0	0,7	0	0,126
0,9	0,22	0,62	0	0,5	0	0,11
1,4	0,15	0,77	0	0	0	0
1,7	0,1	0,87	0,3	0	0,03	0
1,9	0,07	0,94	0,5	0	0,035	0
2,4	0,04	0,98	1	0	0,04	0
2,9	0,02	1	1,5	0	0,03	0
E[Max(r-L;0)] =					<b>0,135</b>	
E[Max(L-r;0)] =					<b>0,511</b>	
$\Omega(1,4) = 0,135 / 0,511 = \mathbf{0,2642}$						

Pelo exposto na Tabela 2, os resultados alcançados são idênticos aos obtidos na Tabela 1 da seção 3.2, utilizando a definição conceitual do Omega.

Em termos de processamento computacional resulta mais vantajoso adotar esta última definição de Omega (Equação (24)), já que facilita o seu entendimento e permite visualizar a idéia de Omega como a relação entre a área

esperada de ganhos e a área esperada de perdas ( $L$ , escolhido exogenamente, determina o limite entre estas áreas).

Utilizando Omega, não é necessário realizar suposições paramétricas sobre a distribuição de retornos, com exceção de que existam as duas integrais:

$I_1(L) = \int_a^L F(x)dx = ES(L)$ , e,  $I_2(L) = \int_L^b [1 - F(x)]dx = EC(L)$ . Na prática, desde que se trabalhe com distribuições discretas, não haverá problema em calcular os componentes da medida Omega, tal como foi mostrado através dos exemplos numéricos.

Kazemi et al. (2003) propõem uma medida de performance alternativa, que eles denominaram de Sharpe-Omega:

$$\text{Sharpe - Omega} = \frac{\bar{r} - L}{ES(L)}, \quad (25)$$

onde  $\bar{r}$  é a média dos retornos do ativo. Essa medida daria o excesso de ganho esperado acima de um nível crítico  $L$  por unidade de risco (perda esperada). A unidade de risco nesse caso poderia ser representada como um seguro, ou seja, ao pagar o prêmio da opção de venda, o investidor teria um ganho certo representado pelo excesso entre o ganho do investimento e o nível mínimo de ganho requerido ( $L$ ).

### 3.3.2. Outras propriedades da Função Omega

Sejam  $F$  e  $G$  duas funções de distribuição cumulativa no intervalo  $(a,b)$ , onde 'a' e 'b' podem ser finitos ou não,  $L$  é o retorno limite, e as médias de  $F$  e  $G$  ( $\mu_F$  e  $\mu_G$ ) existem. A função Omega de  $F$  é definida pela Equação (26):

$$\Omega_F(L) = \frac{I_2(L)}{I_1(L)}, \quad (26)$$

onde,

$$I_2(L) = \int_L^b [1 - F(x)]dx, \quad (27)$$

$$I_1(L) = \int_a^L F(x)dx. \quad (28)$$

Dadas estas definições, podem-se deduzir algumas propriedades para Omega. A seguir descrevem-se as principais.

**Propriedade 1**

$\Omega_F$  é diferenciável e 
$$\frac{d\Omega_F}{dL} = \frac{F(L)[I_1(L) - I_2(L)]}{I_1^2(L)} - \frac{1}{I_1(L)}. \quad (29)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_F}{dL} &= \frac{\frac{dI_2}{dL} I_1(L) - \frac{dI_1}{dL} I_2(L)}{I_1^2(L)} = \frac{-[(1 - F(L))I_1(L) - F(L)I_2(L)]}{I_1^2(L)} \\ &= \frac{F(L)I_1(L) - F(L)I_2(L) - I_1(L)}{I_1^2(L)}. \end{aligned}$$

Simplificando  $I_1(L)$  no numerador e no denominador obtém-se a Equação (29).

**Propriedade 2**

$\Omega_F$  é uma função monotônica decrescente no intervalo  $(a,b)$  na imagem  $(0,\infty)$ .

Demonstração:

A propriedade 2 significa que

$$\frac{d\Omega_F}{dL} < 0. \quad (30)$$

De acordo com a equação (29),  $F(L)[I_1(L) - I_2(L)]$  deve ser menor do que  $I_1(L)$  para que a Desigualdade (30) seja verdadeira. Analisando esta condição:

$$F(L)[I_1(L) - I_2(L)] < I_1(L),$$

$$F(L) - [I_2(L)/I_1(L)] < 1,$$

$$F(L) - \Omega(L) < 1.$$

Para saber se esta última expressão se cumpre, vão se analisar os resultados que se obteriam colocando os valores extremos das imagens das funções  $F(L)$  e  $\Omega(L)$ . A imagem de  $F(L)$  é  $[0,1]$  e a imagem de  $\Omega(L)$  é  $(0,\infty)$ :

$$\text{- Se } F(L) = 0, \text{ então } F(L) - \Omega(L) = 0 - \Omega(L) < 1.$$

$$\text{- Se } F(L) = 1, \text{ e se } \Omega(L) \approx 0, \text{ então } F(L) - \Omega(L) = 1 - [\Omega(L) \approx 0] < 1.$$

$$\text{- Se } F(L) = 1, \text{ e se } \Omega(L) > 0, \text{ então } F(L) - \Omega(L) = 1 - [\Omega(L) > 0] < 1.$$

Em nenhuma situação a diferença  $F(L) - \Omega(L)$  fica maior ou igual a 1,

portanto, se demonstra que 
$$\frac{d\Omega_F}{dL} < 0.$$

Em relação à imagem da função  $\Omega_F$ , esta sempre é positiva. Por definição  $\Omega_F$  é a razão de duas integrais positivas, e por ser uma função monotônica decrescente, esta tende ao infinito quando  $L$  tende ao seu domínio inferior 'a', e  $\Omega_F$  tende a zero quando  $L$  tende ao seu domínio superior 'b'.

**Propriedade 3**

Se  $\mu_F$  é a média da distribuição  $F$ , logo  $\Omega_F(\mu_F)=1$ .

Demonstração:

Em primeiro lugar, vai se demonstrar que  $I_{2F}(L) - I_{1F}(L) = \mu_F - L$ . Assim:

$$\begin{aligned} I_{2F}(L) - I_{1F}(L) &= \int_L^b [1 - F(x)] dx - \int_a^L F(x) dx = \int_L^b dx - \int_L^b F(x) dx - \int_a^L F(x) dx \\ &= [b - L] - \int_a^b F(x) dx = [b - L] - \int_a^b (b - x)f(x) dx \\ &= [b - L] - b \int_a^b f(x) dx + \int_a^b xf(x) dx = b - L - b \cdot 1 + E(x) \\ &= b - L - b \cdot 1 + E(x) \\ &= E(x) - L = \mu_F - L. \end{aligned} \quad (31)$$

Se a Equação (31) se divide por  $I_{1F}(L)$ , obtém-se:

$$\Omega_F(L) = 1 + \frac{\mu_F - L}{I_{1F}(L)}. \quad (32)$$

Com a Equação (32) se demonstra que  $\Omega_F(L) = 1$  se  $L = \mu_F$ .

Também pode-se demonstrar que  $\Omega_F(L)$  é sempre positivo. Assim:

Se  $\Omega_F(L) > 0$ , então,  $(\mu_F - L)/I_{1F}(L) > -1$ .

Desenvolvendo esta última desigualdade  $(\mu_F - L) > -I_{1F}(L)$ , mas  $(\mu_F - L) = I_{2F}(L) - I_{1F}(L)$ , logo  $I_{2F}(L) - I_{1F}(L) > -I_{1F}(L)$ , e,  $I_{2F}(L) > 0$ .

Observa-se que se chega a uma expressão verdadeira:  $I_{2F}(L) > 0$  (por ser  $I_{2F}(L)$  a integral de uma área positiva). Assim, conclui-se que efetivamente  $(\mu_F - L)/I_{1F}(L) > -1$  o que indica que  $\Omega_F(L)$  terá sempre um valor positivo.

**Propriedade 4**

As distribuições  $F$  e  $G$  têm a mesma função Omega se e somente se  $F=G$ .

Demonstração:

Se  $\Omega_F = \Omega_G$ ,  $\Omega_F(\mu_F) = \Omega_G(\mu_G) = 1$ . Ambas as funções tem o mesmo valor na média (igual a 1), assim  $\mu_F = \mu_G$ . Chame-se de  $\mu$  à média comum.

$$\text{Sejam } \Omega_F(L) = \frac{I_2(L)}{I_1(L)}, \quad \Omega_G(L) = \frac{J_2(L)}{J_1(L)} \quad \text{e, } I = I_1(\mu) = I_2(\mu) \quad \text{e } J = J_1(\mu) = J_2(\mu),$$

para um  $L > 0$  denote-se:

$$A_F = \int_{\mu-L}^{\mu} [1 - F(x)] dx \quad \text{e } B_F = \int_{\mu-L}^{\mu} F(x) dx, \quad \text{logo, } I_2(\mu-L) = I + A_F, \quad \text{e } I_1(\mu-L) = I - B_F.$$

Com a mesma notação para  $G$ ,  $A_G$  e  $B_G$ , tem-se que  $J_2(\mu-L) = J + A_G$ , e  $J_1(\mu-L) = J - B_G$ . Dado que  $A_F + B_F = L$ , e  $A_G + B_G = L$ , a igualdade de  $\Omega_F$  e  $\Omega_G$ , em  $\mu-L$  da  $\frac{J + L - B_G}{J - B_G} = \frac{I + L - B_F}{I - B_F}$ . Daí,  $L \times (I - B_F) = L \times (J - B_G)$ , e como  $L \neq 0$ , então,  $I - B_F = J - B_G$ . Isto é o mesmo que  $I_1(\mu-L) = J_1(\mu-L)$ , e essa relação se mantém para todo  $L$ . Portanto, se  $\Omega_F = \Omega_G$ , e  $I_1(\mu-L) = J_1(\mu-L)$ , diferenciando se obtém  $F=G$ .

Além destas quatro propriedades apresentadas e desenvolvidas, no Apêndice 2 são deduzidas outras propriedades para a medida Omega ( $\Omega$ ), mas derivadas a partir da definição  $\Omega(L) = EC(L) / ES(L)$ .

### 3.4. Omega e a Dominância Estocástica

Dominância estocástica é um termo que se refere a um conjunto de relações de preferência que se podem estabelecer entre um par de distribuições. A seguir se faz uma explanação dos principais conceitos sobre dominância estocástica<sup>3</sup>.

A fim de determinar se uma relação de dominância estocástica existe entre duas distribuições, as distribuições são primeiramente caracterizadas por suas funções de distribuição cumulativa, ou FDC. Considerem-se duas distribuições  $A$  e  $B$ , caracterizadas respectivamente por suas FDC como  $F_A$  e  $F_B$ . Assim, a distribuição  $B$  domina estocasticamente a distribuição  $A$ , em primeira ordem, se para qualquer argumento  $y$ ,  $F_A(y) \geq F_B(y)$ . Se  $y$  denota um nível de renda, logo a desigualdade na definição significa que a proporção de indivíduos com uma distribuição de rendimentos não superiores a  $y$  em  $A$ , é maior ou igual do que a proporção de tais indivíduos em  $B$ .

Ordens superiores de dominância estocástica também podem ser definidas. Para este efeito, devem se fazer integrais repetidas da FDC para cada distribuição. Formalmente, define-se uma seqüência de funções  $D^1(y) = F(y)$ ,  $D^{s+1}(y) = \int_0^y D^s(z) dz$ , para  $s=1,2,3...$ , assim, a função  $D^1$  é a FDC da distribuição

---

<sup>3</sup> Em Levy e Sarnat (1984) tem-se uma mais ampla descrição dos conceitos de dominância estocástica.

que se deseja analisar,  $D^2(y)$  é a integral de  $D^1$  de 0 a  $y$ ,  $D^3(y)$  é a integral de  $D^2$  de 0 a  $y$ , e assim por diante. Por definição, a distribuição B domina a distribuição A na ordem  $s$  se  $D_A^s(y) \geq D_B^s(y)$ . Esta definição deixa claro que havendo dominância de primeira ordem implica dominância em todas as ordens superiores. De uma forma mais geral, a dominância na ordem  $s$  implica dominância em todas as ordens superiores a  $s$ .

Em análise de carteiras são comumente abordadas as três primeiras ordens da dominância estocástica:

- A dominância estocástica de primeira ordem seleciona os investimentos dando preferência a um retorno maior. Este critério assume que o investidor não leva em conta o risco, preferindo sempre o investimento com o retorno maior. Graficamente as FDC não devem se cruzar para que exista a dominância em primeira ordem do investimento cuja FDC fica à direita.
- A dominância estocástica de segunda ordem permite selecionar os investimentos dando sempre preferência pelos de retorno maior, só que neste caso o investido é avesso ao risco.
- A dominância estocástica de terceira ordem possui os mesmos critérios da dominância estocástica de segunda ordem, mas adicionalmente o investidor tem aversão crescente ao risco.

Fazendo a comparação entre a medida Omega ( $\Omega$ ) com os critérios de dominância estocástica, destaca-se que Omega ( $\Omega$ ) possui a vantagem de permitir ao investidor estabelecer exogenamente um retorno limite “L” o qual divide a distribuição de retornos do investimento em uma área de ganhos, e em uma área de perdas. O risco é definido assim pelo próprio investidor, e, como foi apresentado nos casos ilustrativos da seção 3.2, dependendo do valor que tome “L” um investimento é preferível a outro. Pelo critério da dominância estocástica, como foi exposto, é exigido que as FDC cumpram certas condições, o qual abrange toda a distribuição, mas o investidor ao estabelecer o que ele considera como ganho mínimo aceitável (L), lhe é mais interessante saber, nesse ponto, qual distribuição lhe oferece a melhor relação ganho esperado versus perda esperada (EC / ES). A análise pelos critérios de dominância estocástica pode identificar distribuições em que não exista dominância (em alguma ordem) de uma distribuição para outra e vice-versa. Nesses casos o investidor não saberia qual investimento escolher, situação que com o uso da medida Omega( $\Omega$ ) nunca

vai acontecer, já que para cada nível de “L” existe sempre uma distribuição preferível (ou no mínimo equivalente) do que outra.

Por outro lado, como será apreciado em seções posteriores, a implementação de um programa de otimização para a composição de uma carteira, utilizando como função objetivo a maximização da medida Omega ( $\Omega$ ), é realizado de maneira bastante simples e intuitiva, semelhante ao programa de otimização usando os critérios de Média-Variância de Markowitz (1952). Utilizando os critérios de dominância estocástica o programa de otimização se tornaria bastante complexo, dada a natureza desses critérios, fazendo que seja de difícil implementação. A utilização da medida Omega ( $\Omega$ ) resulta ser computacionalmente muito prática, de fácil entendimento e atende às expectativas de retornos desejados pelos investidores.

### 3.5. Otimização com a Medida Omega

#### 3.5.1. O Programa de Otimização

Uma maneira de otimizar a carteira P utilizando a medida de performance Omega ( $\Omega$ ), adaptada da proposta feita por Ick e Nowak (2006), é por meio do seguinte programa:

$$\left. \begin{array}{l} \max_P \Omega(L) = \frac{EC_P(L)}{ES_P(L)} \quad , \\ \text{sujeto a : } \sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad , \\ \quad \quad \quad 0 \leq w_j \leq 1 \quad . \end{array} \right\} \quad (33)$$

Onde:

$ES_P(L) = E[\text{Max}(L - R_{P_i}; 0)]$  = Perda Média Esperada da carteira P ou *Expected Shortfall*,

$EC_P(L) = E[\text{Max}(R_{P_i} - L; 0)]$  = Ganho Médio Esperado da carteira P ou *Excess Chance*,

$R_{P_i} = \sum_{j=1}^n w_j r_{ij}$  = retorno da carteira P no período i,

$r_{ij}$  = retorno do ativo j no período i (são ‘n’ ativos no total),

$w_j$  = porcentagem da carteira investido no ativo j.

### 3.5.2. Exemplo de Aplicação

A seguir, otimiza-se por Omega uma carteira composta por quatro ativos, aplicando o programa de otimização descrito na seção anterior, e logo se compara com a otimização aplicando a modelagem clássica de Markowitz (1952), com fins de entender melhor as vantagens da otimização pelo Omega.

Na Tabela 3 se apresentam os quatro ativos que compõem a carteira, junto as suas principais estatísticas. Para cada ativo foram considerados 500 períodos de observações, o que constitui a sua distribuição de retornos.

Tabela 3 – Propriedades Estatísticas dos Dados Históricos de Retornos de Quatro Ativos

	Média	Variância	Assimetria	Curtose	Valor Mínimo	Valor Máximo	JB Test
Ativo X	0,15	0,25	-0,90	3,42	-1,69	0,84	71,63
Ativo Y	0,20	1,44	1,96	8,38	-1,00	7,41	925,06
Ativo Z	0,25	1,00	1,90	8,17	-0,80	6,39	856,89
Ativo W	0,05	0,16	-1,42	5,51	-2,02	0,53	299,31

Os quatro ativos apresentados na Tabela 3 são muito longe de serem normalmente distribuídos, o qual é indicado pelo Teste de Jarque-Bera. Observa-se que todos os valores são bem maiores do que 5,99 que é o valor da chi-quadrada com dois graus de liberdade e probabilidade de 95%, que é tomado como referencial para o teste da hipótese de normalidade.<sup>4</sup> O gráfico das distribuições é apresentado na Figura 19.

Os ativos X e W apresentam assimetria negativa e um leve excesso de curtose, em troca, os ativos Y e Z têm assimetria positiva e um considerável excesso de curtose, assim como uma dispersão maior dos seus retornos o que se reflete numa maior variância.

Por outro lado, os ativos encontram-se correlacionados, o que é exibido na Tabela 4. Observa-se que os ativos X e W, que tem o mesmo sentido da assimetria, apresentam correlação positiva entre eles e negativa com o resto de ativos. Situação similar acontece entre os ativos Y e Z.

<sup>4</sup> Para maiores detalhes sobre o teste de Jarque-Bera, consulte Bera & Jarque (1980).



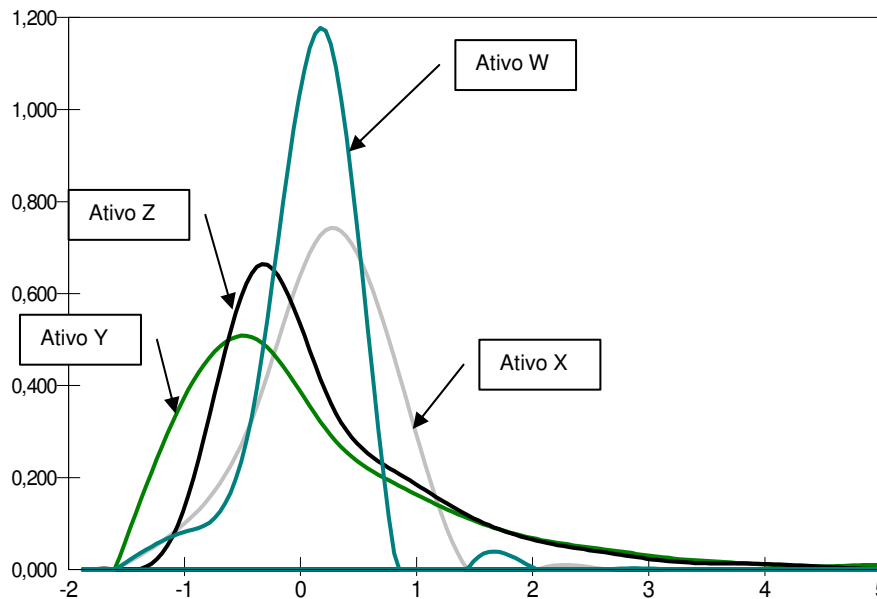


Figura 19 – Distribuição de probabilidades dos retornos dos quatro ativos

Tabela 4 – Matriz de Coeficientes de Correlação

	X	Y	Z	W
X	1	-0,42	-0,46	0,44
Y	-0,42	1	0,46	-0,45
Z	-0,46	0,46	1	-0,48
W	0,44	-0,45	-0,48	1

Os resultados da otimização da composição do portfólio usando Markowitz e a medida Omega com diferentes níveis de retornos limite  $L$ , são apresentados na Tabela 5. A otimização pela metodologia Média-Variância de Markowitz não leva em conta outros momentos da distribuição, e daí que as porcentagens da composição variam significativamente em quase todos os ativos em relação à otimização pelo Omega.

Tabela 5 – Composição do Portfólio

	Metodologia Empregada			
	Markowitz	Omega (L=0%)	Omega (L=3%)	Omega (L=15%)
$w_1 = \% \text{Ativo X}$	27,12%	35,10%	44,54%	47,90%
$w_2 = \% \text{Ativo Y}$	9,46%	10,10%	10,84%	2,74%
$w_3 = \% \text{Ativo Z}$	15,34%	28,51%	28,95%	49,37%
$w_4 = \% \text{Ativo W}$	48,08%	26,30%	15,66%	0,00%

Como em Markowitz o objetivo é minimizar a variância, o ativo W foi escolhido em maior proporção devido a que apresenta a menor variância em relação aos outros. As correlações entre os ativos também influenciam a preferência naqueles que diminuem o risco da carteira.

Quando se maximiza a medida Omega, observa-se que os ativos X e Z vão ganhando maior representatividade na carteira, devido a que nesses ativos encontra-se maior probabilidade de retornos acima do valor estipulado como limite L. A Figura 20 apresenta a forma que toma a distribuição do Portfólio otimizado, em função da metodologia utilizada.

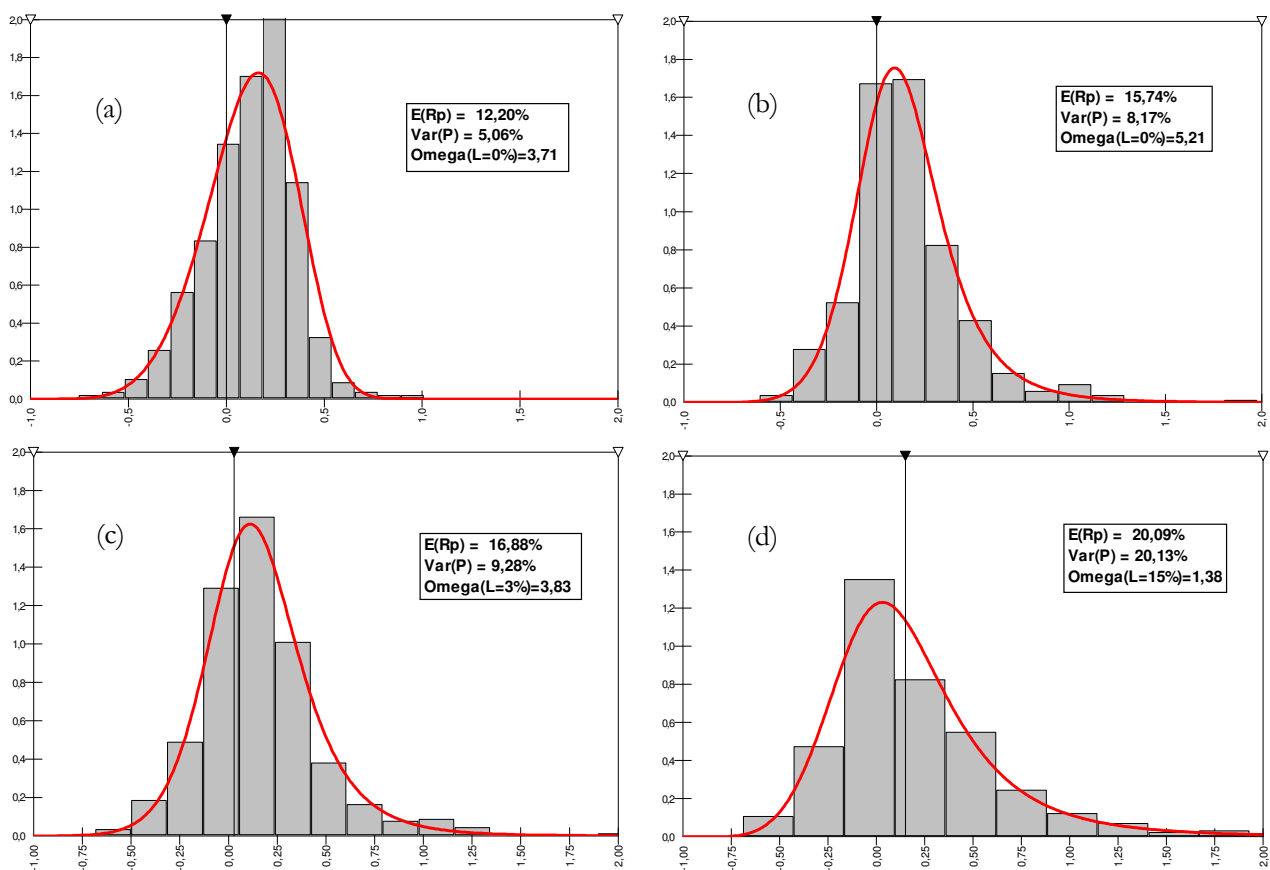


Figura 20 – Distribuição de probabilidades dos retornos do portfólio P otimizado. (a) Otimização Média-Variância de Markowitz, (b) (c) e (d) Otimização pela medida Omega com diferentes níveis de L.

A Tabela 6 apresenta as principais estatísticas do portfólio otimizado empregando ambas as metodologias abordadas.

Tabela 6 – Principais Estatísticas do Portfólio Otimizado

	Metodologia Empregada			
	Markowitz	Omega (L=0%)	Omega (L=3%)	Omega (L=15%)
Média	12,20%	15,74%	16,88%	20,09%
Variância	5,06%	8,16%	9,28%	20,13%
Assimetria	-0,34	1,24	1,12	1,77
Curtose	3,92	7,37	7,15	9,07
JB Test	27,06	524,85	462,03	1029,53
Valor Mínimo	-75,15%	-60,47%	-68,03%	-68,75%
Valor Máximo	101,18%	198,08%	208,43%	324,49%
EC <sub>P</sub>	16,70%	19,47%	18,80%	18,41%
ES <sub>P</sub>	4,50%	3,74%	4,91%	13,32%
Omega	3,71*	5,21	3,83	1,38

\* O Omega é calculado com L=0

Observa-se na Tabela 6, através do teste de Jarque-Bera, que todas as distribuições dos portfólios otimizados não apresentam normalidade. Também se aprecia que a metodologia de Markowitz sempre encontra o portfólio com a menor variância, mas seu índice Omega (L=0) comparado com o Omega do portfólio otimizado com essa medida (com mesmo L=0) é consideravelmente menor (3,71 vs. 5,21). A relação de ganhos ponderados vs. perdas ponderadas é mais significativa quando se faz a otimização pela medida Omega. Justamente pela não normalidade das distribuições encontram-se diferenças nos resultados obtidos entre uma metodologia e outra, sendo que a otimização pela medida Omega consegue lidar melhor com distribuições não normais.

Graficamente, na Figura 21 são comparadas numa mesma escala (ES vs. EC) a otimização Média-Variância de Markowitz com a otimização pelo Omega (L=0), utilizando suas fronteiras eficientes. Como explicado na seção 1.1, fronteira eficiente é o melhor conjunto de carteiras que oferecem o máximo retorno ou ganho para um dado nível de risco.

Observa-se na Figura 21 que a fronteira eficiente calculada pela medida Omega é superior à fronteira calculada por Markowitz (Média-Variância), especialmente nos pontos com menores perdas médias esperadas (ES). O máximo Omega da fronteira de Markowitz é menor do que o máximo Omega da outra fronteira, da mesma forma, o Omega de mínima variância fica bem inferior.

Assim, demonstra-se que para um mesmo nível de perdas esperadas, pela otimização da medida Omega se encontram ganhos esperados (EC) superiores.

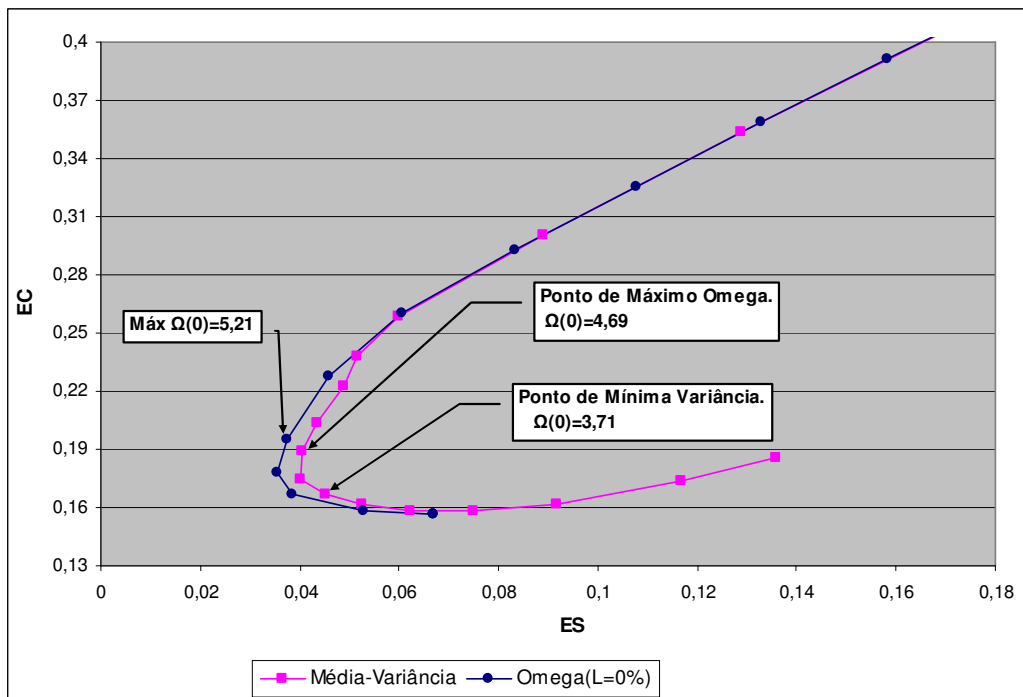


Figura 21 – Fronteiras eficientes na escala ES vs. EC

Ao fazer o gráfico de ambas as fronteiras na escala Média – Variância, obtém-se o gráfico exibido na Figura 22.

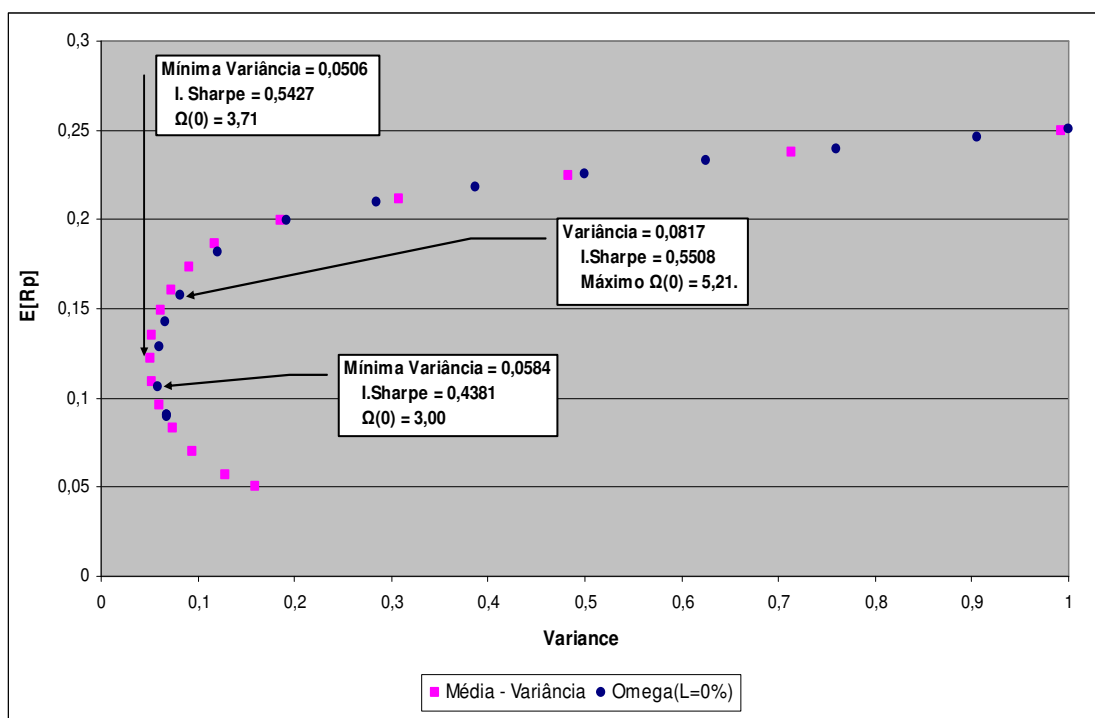


Figura 22 – Fronteiras eficientes na escala Média do Portfólio (E[R<sub>p</sub>]) vs. Variância

Dada a suposição de normalidade dos ativos na metodologia de Markowitz, encontra-se uma fronteira eficiente do portfólio levemente superior (na escala Média – Variância) à fronteira obtida pelo Omega ( $L=0$ ). Caso os ativos tivessem uma distribuição normal, ambas as fronteiras seriam iguais, fornecendo os mesmos resultados, mas esta diferença aparece porque a fronteira calculada pelo Omega, leva em conta o formato da distribuição de retornos do portfólio o qual não é normal. Na fronteira calculada por Markowitz se assume a normalidade da distribuição de retornos dos ativos e encontra sempre a o portfólio de menor variância. Apesar disso, ambas as fronteiras não se afastam muito uma da outra, e à medida que cresce a variância as curvas vão ficando iguais.

Por outro lado, para efeitos de medir a performance usando a medida clássica de Sharpe, a fronteira de Markowitz no ponto de mínima variância, apresentou um valor deste índice levemente inferior ao índice de Sharpe obtido no ponto de máximo Omega da fronteira eficiente calculada por esta medida. Mas sabe-se que este índice assume a normalidade dos retornos, portanto, não é o mais apropriado em outras situações, como neste exemplo.

Foi também calculado o valor da medida Omega ( $\Omega$ ) otimizado para diferentes níveis de L. Como era esperado, Omega cai à medida que o L fica maior. A Figura 23 permite visualizar este comportamento.

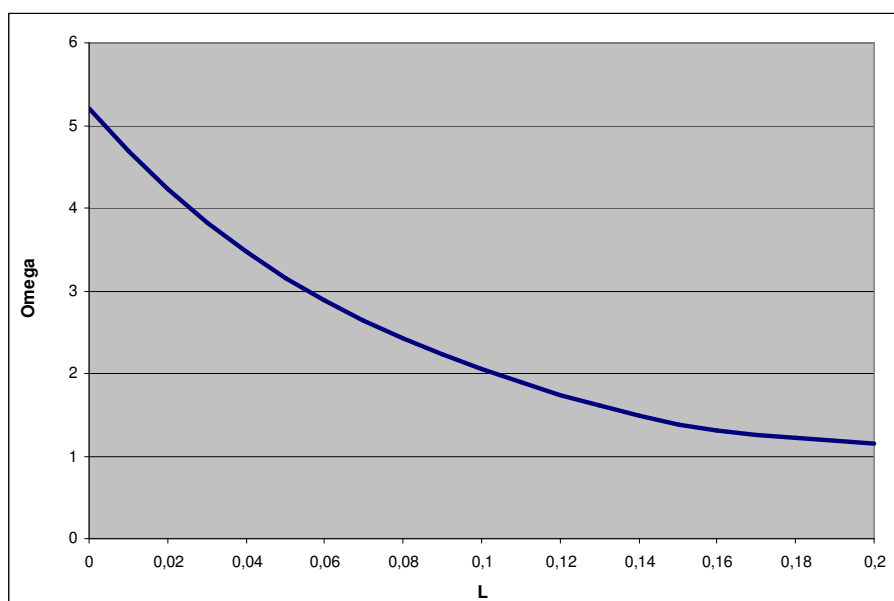


Figura 23 – L vs. Omega

Enquanto Omega cai à medida que o L fica maior, o retorno do portfólio ( $R_P$ ) cresce juntamente com o aumento do L, chegando a um nível no qual o retorno médio do portfólio se estabiliza, independente do valor de L.

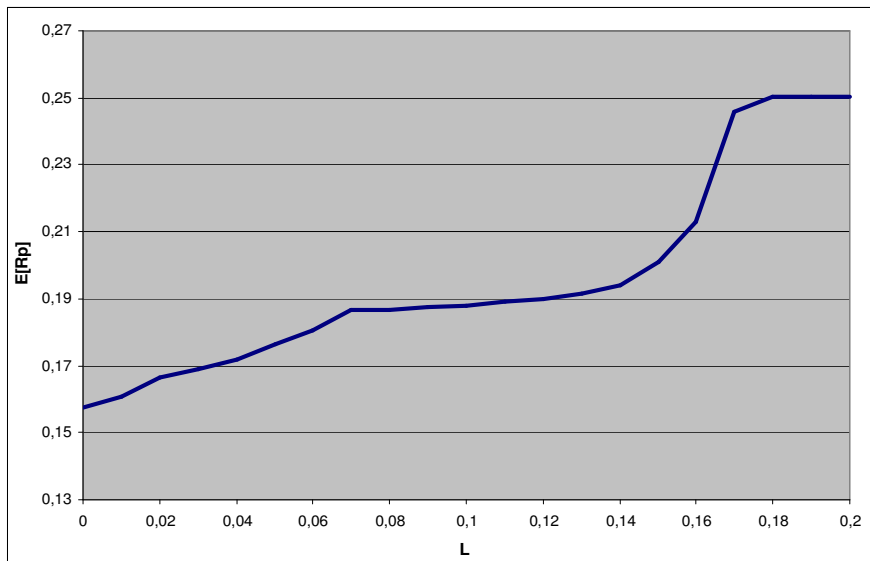


Figura 24 – L vs. Média do Portfólio ( $E[R_P]$ )

A forma da Figura 24 se explica porque à medida que L cresce, vão ficando menos retornos à direita do L, isto é, o EC fica menor. Conseqüentemente, para melhorar o resultado da otimização, o programa procurará portfólios com maior variância, e porém maior valor esperado, com o objetivo de capturar a maior quantidade possível de valores à direita do L, mas vai chegar um momento, se L crescer muito, que já não será possível aumentar mais à variância do portfólio, estabilizando-se justamente na carteira que oferece o maior retorno com o maior desvio-padrão. No exemplo apresentado, esta carteira está formada exclusivamente pelo ativo “Z” o qual possui uma média de 0,25 e uma variância de 1 (não existe outra combinação de ativos que ofereça um portfólio de maior retorno e variância). No gráfico, percebe-se justamente que o  $E[R_P]$  se estabiliza em 0,25.

### 3.5.3. Análise dos resultados e comparações das metodologias testadas

Através do exemplo apresentado na seção anterior pode-se concluir:

- Quando não existe normalidade nas distribuições de retornos dos ativos, ao levar em conta todos os momentos da distribuição (assimetria, curtose, caudas pesadas, valores extremos, etc.) consegue-se medir o real impacto

dos ganhos e perdas esperadas. Tudo isto se incorpora através da medida Omega. No caso de lidar com ativos com distribuições normais, a otimização pela Média-Variância fornecerá os mesmos resultados do que a otimização através da maximização da medida Omega justamente porque nesses casos as distribuições são definidas apenas pelos dois primeiros momentos. Portanto, Omega ( $\Omega$ ) resulta ser mais geral e aplicável a qualquer situação.

- A Figura 21 permite apreciar a diferença entre uma fronteira eficiente otimizada por Omega, e outra utilizando Markowitz. Através da medida Omega se consegue achar uma melhor fronteira, que leva em consideração o verdadeiro formato da distribuição de retornos do portfólio e não simplesmente os dois primeiros momentos da distribuição.
- Pela Tabela 6 aprecia-se que quanto maior é o nível do retorno limite escolhido ( $L$ ), a medida Omega diminui, isto porque à medida que  $L$  fica maior, a área do EC vai ficando menor e a área do ES cresce. Assim, o valor do índice Omega tende a diminuir. Fazendo  $L=0$ , fornecerá a medida Omega de maior valor, mas cabe lembrar que a escolha do  $L$  depende das expectativas dos investidores e suas próprias preferências.  $L=0$  indica que é aceito como mínimo não ter retornos negativos no portfólio, mas para outro investidor esta posição talvez não lhe seja tão atrativa.
- As fronteiras eficientes do Omega para três níveis de  $L$ , são ilustradas na Figura 25. Observa-se que a maior  $L$ , os valores do Omega diminuem.

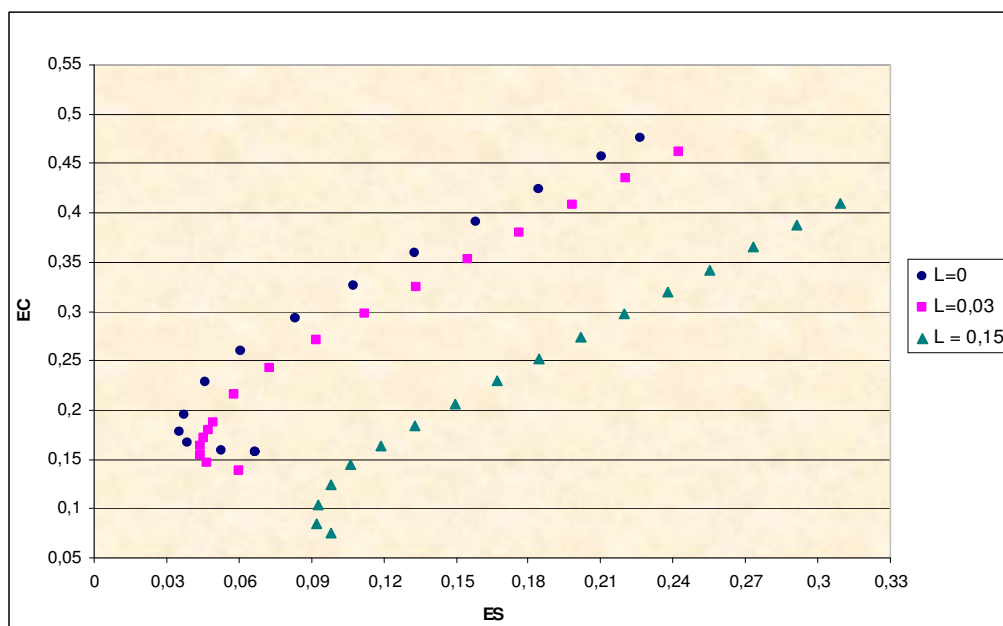


Figura 25 – Fronteiras eficientes para três níveis de  $L$