

## 2

### Modelos Para o Cálculo do Valor Esperado da Matriz de Covariância

Neste capítulo, são descritos os diferentes métodos para estimar a matriz de covariância condicional. São utilizados como *benchmarks* dois modelos distintos. A média móvel e a média móvel com decaimento exponencial. Apresentam-se também os modelos de Correlação Condicional Constante e Dinâmico, foco central do trabalho.

#### 2.1

##### RiskMetrics e Média Móvel

Seja cada elemento da matriz de covariância dos retornos de dadas séries financeiras descrito por um simples modelo auto-regressivo de primeira ordem AR(1):

$$h_{ij,t+1} = \alpha h_{ij,t} + e_{t+1},$$

onde  $h_{ij,t}$  representa um elemento da matriz de covariância no instante  $t$ , sendo uma variável latente,  $e_t$  representa um ruído branco e  $\alpha$  um parâmetro tal que:  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Utilizando-se a hipótese de passeio aleatório, tem-se que  $\alpha = 1$ <sup>1</sup>. O valor esperado de  $h_{ij,t+1}$ , com base no conjunto de informação até  $T$ , é dado então por:

$$E_T(h_{ij,t+1}) = h_{ij,T}.$$

Com uso da expressão acima, para estimar a previsão um período à frente, basta calcular o valor de  $h_{ij,T}$ . Duas simples possibilidades são o cálculo da média histórica que calcula a matriz de covariância amostral com todas as observações e

---

<sup>1</sup> Alguns estudos encontram evidências de que a volatilidade parece seguir um passeio aleatório. Para referências, ver Perry (1982) e Pagan e Schwert (1990).

a média móvel que calcula a matriz de covariância amostral com as “ $n+1$ ” observações mais recentes. Em ambos os casos, as duas possibilidades podem ser descritas pela expressão abaixo:

$$h_{ij,T} = \sum_{t=n}^T (r_{i,t} - \bar{r})(r_{j,t} - \bar{r}), \quad (2.1)$$

onde  $r_{i,t}$  e  $r_{j,t}$  são respectivamente o retorno do ativo  $i$  e  $j$  nos instante  $t$  e no caso da média histórica,  $n = 0$ .

Outra forma alternativa de calcular  $h_{ij,T}$  é utilizar a média móvel com decaimento exponencial popularizado na metodologia RiskMetrics<sup>2</sup>. O emprego do método justifica-se pela sua intensa utilização pela comunidade financeira e pelos reguladores do sistema financeiro, além de ser de simples implementação. A sua expressão é dada por:

$$h_{ij,T} = \frac{(1-\lambda)}{(1-\lambda^{T-n+1})} \sum_{t=n}^T \lambda^{t-n} (r_{i,t} - \bar{r}_i)(r_{j,t} - \bar{r}_j), \quad (2.2)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro decaimento.

A média móvel com decaimento exponencial utiliza as “ $n+1$ ” observações mais recentes da amostra, todavia, quanto mais recente for a observação, maior o peso para o cálculo  $h_{ij,T}$ . A vantagem do método é de então, claramente, dar mais relevância a “informação recente” do que a “informação passada”. O valor do parâmetro de decaimento  $\lambda$  é estimado segundo metodologia proposta pelo RiskMetrics baseado no critério de minimização da raiz do erro quadrático médio<sup>3</sup>.

## 2.2

### Modelos de Correlação Condicional Constante e Dinâmica

<sup>2</sup> RiskMetrics é um conjunto de metodologias e instrumentos que permite estimar a exposição ao risco de mercado de um portfólio dentro da estrutura “*Value-at-Risk*”. Lançado pela J.P Morgan, ao abrir a comunidade financeira os métodos internos de controle de risco, logo tornou-se amplamente utilizado. Para referência recente, vide Mina e Xiao (2001).

<sup>3</sup> Os métodos com o uso da média móvel e média móvel com decaimento exponencial serão denominados respectivamente Média Móvel e RiskMetrics ao longo da dissertação.

Os modelos de Correlação Condicional Constante e Dinâmica apresentam uma série de vantagens tanto na especificação do modelo, quanto na sua própria estimação tornando-os atraente do ponto de vista teórico. A principal vantagem de tais modelos é de possibilitar que se separe a especificação da variância condicional de cada série, da matriz de correlação condicional. Esta separação implica que potencialmente a estimação pode ser feita em dois estágios, permitindo que os modelos tenham um número factível de parâmetros mesmo para uma matriz de covariância de tamanho considerável. Além disso, outra vantagem interessante é a possibilidade permitida de estimar cada série utilizando um modelo para a variância condicional diferente.

### 2.2.1

#### Modelo de Correlação Condicional Constante

Proposto por Bollerslev (1990), o modelo de Correlação Condicional Constante (CCC) impõe a condição de que a correlação condicional seja constante para todo instante  $t$ . A matriz de covariância neste modelo é dada por:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R} \mathbf{D}_t,$$

onde  $\mathbf{H}_t$  é a matriz de covariância,  $\mathbf{D}_t$  a matriz diagonal com seus elementos compostos pela variância condicional  $h_{ii,t}$  de cada série no instante  $t$  e  $\mathbf{R}$  a matriz dos coeficientes de correlação linear constante,  $p_{ij}$ .

É possível deduzir que, supondo distribuição normal condicional, o coeficiente de correlação linear entre as séries  $i$  e  $j$  é igual a<sup>4</sup>:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=0}^T \hat{e}_{i,t} \hat{e}_{j,t}}{\left( \sum_{t=0}^T \hat{e}_{i,t}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{t=0}^T \hat{e}_{j,t}^2 \right)^{1/2}}, \quad (2.3)$$

<sup>4</sup> Para a demonstração, consultar Bollerslev (1990) páginas 499-500.

onde  $\hat{e}_{i,t}$  e  $\hat{e}_{j,t}$  são os resíduos padronizados das séries  $i$  e  $j$  encontrados na estimação univariada através dos modelos da família GARCH.

Assim, para calcular a matriz de covariância neste modelo, basta primeiramente estimar os modelos univariados, obter os resíduos padronizados e posteriormente utilizá-los para calcular os coeficientes de correlação linear. Neste trabalho, será utilizado o modelo GARCH(1,1) na especificação do primeiro estágio da estimação.

Notadamente, a limitação do modelo decorre da condição de correlação constante. Este tipo de restrição pode ser razoável dependendo do grupo de ativos escolhidos. Entretanto, em muitas aplicações, maior flexibilidade pode ser necessária. Um exemplo é a correlação entre duas ações de empresas diferentes. Conforme as empresas fazem novos investimentos e modifiquem seu perfil, as variáveis que determinam seus respectivos valores de mercado mudam. Espera-se então uma alteração nas na correlação das ações. Em vista desta limitação, Engle (2002) e Tse e Tsui (2002) propõem modelos de correlação condicional dinâmica com o objetivo de permitir tal flexibilização.

### 2.2.2

#### Modelo de Correlação Condicional Dinâmica<sup>5</sup>

O modelo de Correlação Condicional Dinâmica (DCC) proposto por Engle (2002), difere do modelo CCC ao permitir que a matriz de correlação condicional  $\mathbf{R}_t$  seja função do tempo. A flexibilização do modelo apresenta a vantagem de assimilar a possibilidade que a correlação entre os ativos mude com o tempo. A matriz de covariância condicional neste caso é dada por:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t,$$

onde, a única diferença para o modelo CCC são os parâmetros da matriz  $\mathbf{R}_t$  que neste caso são iguais a  $p_{ij,t}$ . Seja  $q_{ij,t}$  dado por uma das sugestões abaixo, inspirados respectivamente pelos modelos RiskMetrics e GARCH(1,1):

<sup>5</sup> Apenas o modelo de Engle (2002) será estimado nesta dissertação por ser utilizado com maior frequência em outros trabalhos.

$$q_{ij,t} = (1-\lambda)(\hat{e}_{i,t-1}\hat{e}'_{j,t-1}) + \lambda(q_{ij,t-1}) \quad (2.4)$$

$$q_{ij,t} = \bar{p}_{ij} + \alpha(\hat{e}_{i,t-1}\hat{e}'_{j,t-1} - \bar{p}_{ij}) + \beta(q_{ij,t-1} - \bar{p}_{ij}) \quad (2.5)$$

Assim, temos que o valor de cada elemento de  $\mathbf{R}_t$  é dado por:

$$\hat{p}_{ij,t} = q_{ij,t} (q_{ii,t})^{-1/2} (q_{jj,t})^{-1/2}, \quad (2.6)$$

onde  $\hat{e}_{it}$  é o resíduo padronizado encontrado na estimação univariada da série  $i$  por um modelo do da família GARCH.

Pode-se reescrever matricialmente (2.4) e (2.5) como, respectivamente:

$$\mathbf{Q}_t = (1-\lambda)(\hat{\mathbf{e}}_{t-1}\hat{\mathbf{e}}'_{t-1}) + \lambda(\mathbf{Q}_{t-1}), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{S}(1-\alpha-\beta) + \alpha(\hat{\mathbf{e}}_{t-1}\hat{\mathbf{e}}'_{t-1}) + \beta(\mathbf{Q}_{t-1}), \quad (2.8)$$

onde,  $\alpha, \beta$  são parâmetros não negativos que satisfazem  $\alpha + \beta < 1$  e  $\mathbf{S}$  é a matriz de covariância não condicional de  $\hat{\mathbf{e}}_t$ .

Para realizar a estimação, suponha que o vetor de retornos  $\mathbf{r}_t$  tenha distribuição normal com variância condicional dada por  $\mathbf{H}_t$  e seja  $\boldsymbol{\theta}$ , o vetor de parâmetros a serem estimados. A estimação de  $\boldsymbol{\theta}$  é feita a partir da função de densidade abaixo:

$$f(\mathbf{r}_t, \boldsymbol{\theta}) = (2\pi)^{-n/2} |\mathbf{H}_t|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{r}_t - E(\mathbf{r}_t))'(\mathbf{H}_t)^{-1}(\mathbf{r}_t - E(\mathbf{r}_t))\right]$$

Sendo assim, o log da função de máxima verossimilhança é dado por:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r}_t, \boldsymbol{\theta}) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^T n \log 2\pi + \log |\mathbf{H}_t| + \mathbf{e}'_t (\mathbf{H}_t)^{-1} \mathbf{e}_t \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^T n \log 2\pi + \log |\mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t| + \mathbf{e}'_t (\mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t)^{-1} \mathbf{e}_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^T n \log 2\pi + 2 \log |\mathbf{D}_t| + \log(\mathbf{R}_t) + \mathbf{e}'_t \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{D}_t^{-1} \mathbf{e}_t \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^T n \log 2\pi + 2 \log |\mathbf{D}_t| + \log(\mathbf{R}_t) + \hat{\mathbf{e}}'_t \mathbf{R}_t^{-1} \hat{\mathbf{e}}_t
\end{aligned} \tag{2.9}$$

A função de verossimilhança (2.9) pode ser maximizada em um único estágio. Contudo o interessante da formulação acima é a possibilidade de estimar os parâmetros através de um procedimento de dois estágios. Suponha que os parâmetros que descrevem a variância condicional, ou seja  $\mathbf{D}_t$ , sejam conhecidos. Logo, a parte relevante da função de máxima verossimilhança, para a maximização seria:

$$L = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^T \log(\mathbf{R}_t) + \hat{\mathbf{e}}'_t \mathbf{R}_t^{-1} \hat{\mathbf{e}}_t \tag{2.10}$$

Nesse sentido, sob condições de regularidade razoáveis, caso a estimação dos parâmetros em  $\mathbf{D}_t$  seja consistente, a estimação em dois estágios será também consistente embora não eficiente<sup>6</sup>. Condições suficientes que garantam tais propriedades são derivadas a partir de Newey e McFadden (1994) por Engle e Sheppard (2002). Desta forma, apesar de não ser eficiente, a flexibilidade permitida pela estimação em dois estágios torna o método atraente ao possibilitar a estimação de matrizes de covariância de larga escala.

Neste trabalho, estima-se o modelo DCC com a especificação inspirada pelo modelo GARCH para o segundo estágio, uma vez que este é mais flexível do que a especificação RiskMetrics. Para o primeiro estágio, testa-se três alternativas: GARCH(1,1), EGARCH(1,1) e GJR(1,1). As especificações GARCH, EGARCH e GJR foram escolhidas, novamente, devido à ampla utilização nos trabalhos sobre variância condicional. Além disso, em particular, os modelos EGARCH e GJR captam o efeito da assimetria do sinal das inovações na variância e desta forma, também é interessante avaliar o desempenho de modelos com essa característica, considerada um fato estilizado pela literatura.

---

<sup>6</sup> As condições de regularidade e a prova da suficiência de tais condições podem ser encontrados em Engle e Sheppard (2001)