

## O *Ant Colony System* (ACS)

O *Ant Colony System* é uma meta-heurística que consiste em um aperfeiçoamento do *Ant System*, e possui um desempenho notadamente superior e aplicabilidade a problemas de tamanhos mais consideráveis. Este algoritmo data de 1996, e foi inicialmente desenvolvido por *Dorigo e Gambardella* [2]. Assim como o AS, a aplicação original proposta para o ACS é o problema do caixeiro viajante (TSP).

Uma importante diferença entre o ACS e o AS se refere à forma com que é feita a atualização dos ferormônios. No caso do AS, ela é feita de forma global e unificada, após o término de cada iteração, sendo realizada simultaneamente a evaporação de ferormônios em todos os arcos e a deposição de novos ferormônios por todos os caminhos percorridos, proporcionalmente à qualidade dos caminhos encontrados. No ACS, por sua vez, a atualização dos ferormônios se dá tanto de forma local após a ação de cada formiga, representando a evaporação dos ferormônios pelo seu caminho, quanto de forma global após o fim de cada iteração, recompensando apenas o melhor caminho encontrado pelas formigas com uma certa quantidade de ferormônios proporcional à qualidade da solução encontrada.

A principal diferença entre os algoritmos, entretanto, diz respeito à regra de decisão das formigas. No modelo AS, esta regra é considerada meramente probabilística como visto anteriormente, de forma que os arcos com maiores concentrações de ferormônios sejam mais prováveis de serem escolhidos pelas formigas. No ACS, a regra é um pouco mais complexa, sendo dita pseudo-aleatória, pois envolve uma parte determinística, ou exploratória, e uma parte probabilística, ou desbravadora, parte esta que é definida nos mesmos moldes do AS.

No ACS, temos um parâmetro extra que chamaremos de  $q_0$ , variando de 0 a 1, e que define quanto poder de exploração de novos caminhos queremos dar às formigas. Antes de cada decisão ser tomada por uma formiga, um número aleatório  $q$  de 0 a 1 é sorteado. Se este número for maior que  $q_0$ , a regra de decisão da formiga é equivalente àquela do modelo AS, ou seja, a formiga decide

para qual nó irá se direcionar com base nas probabilidades calculadas para cada arco factível, segundo as equações abaixo, que são as mesmas do modelo AS com a diferença que o expoente  $\alpha$  da variável  $\tau_{ij}$ , que representa a importância dada à densidade de ferormônios em cada arco, não é utilizado (ou seja, é igual a 1):

$$p_{ij}^k(t) = \frac{a_{ij}(t)}{\sum_{l \in N_i^k} a_{il}(t)} \quad (7)$$

$$a_{ij}(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)] [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in N_i} [\tau_{il}(t)] [\eta_{il}]^\beta} \quad (8)$$

Esta é a parte probabilística do modelo, e representa o comportamento desbravador das formigas, ou seja, as equações acima fazem com que a formiga tenha a possibilidade de experimentar novos caminhos, viabilizando a descoberta de possíveis rotas de comprimentos menores e mais interessantes. Quanto menor for o valor do parâmetro  $q\theta$ , maior é esse poder desbravador das formigas.

Por outro lado, se o número aleatório sorteado  $q$  for menor que  $q\theta$ , a formiga tomará sua decisão baseada no conhecimento disponível sob a forma de depósitos de ferormônios e distâncias. Em outras palavras, a regra de decisão da formiga será, para todo  $j$  pertencente a  $N_i^k$ :

$$p_{ij}^k(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = \arg \max a_{ij}, \text{ onde } a_{ij} = \frac{[\tau_{ij}(t)] [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in N_i} [\tau_{il}(t)] [\eta_{il}]^\beta} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (9)$$

Ou seja, a formiga escolherá o nó  $j$  que maximize o valor de  $a_{ij}$ . Na eq. 9, podemos ver que a probabilidade  $p_{ij}$  da formiga em questão escolher o nó  $j$  como destino só é igual a 1 para a aresta que possuir o valor máximo de  $a_{ij}$ , e zero para todas as outras arestas. Essa é uma regra determinística, que define que a formiga

irá explorar o conhecimento já adquirido ao invés de procurar por novos caminhos melhores. De forma mais concisa, podemos resumir a regra de decisão do modelo ACS como:

$$j = \begin{cases} \arg \max_{j \in N_i^k} \{[\tau_{ij}(t)][\eta_{ij}]^\beta\}, & \text{se } q \leq q_0 \\ S, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (10)$$

Na equação acima,  $S$  é uma variável aleatória discreta com uma distribuição de probabilidade da forma:

$$p_{ij}^k(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)][\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} [\tau_{il}(t)][\eta_{il}]^\beta}, \quad \text{para todo } j \in N_i^k \quad (11)$$

Estas probabilidades definirão qual nó será escolhido; o modo como se pode implementar esta escolha aleatória, conforme descrito anteriormente, será detalhado no capítulo 6, na descrição dos *scripts* das funções.

A outra grande diferença para o modelo AS, como dito anteriormente, é na atualização dos ferormônios. Primeiramente, o modelo ACS faz uma atualização local em cada arco, ou seja, sempre que uma formiga percorre um arco, a quantidade de ferormônios em tal arco é modificada de acordo com a regra:

$$\tau_{ij}(t) \leftarrow (1 - \rho)\tau_{ij}(t) + \rho\tau_0 \quad (12)$$

Na equação acima,  $\tau_0$  é a quantidade inicial de ferormônios em cada arco. Esta quantidade inicial de ferormônios é definida como o inverso do comprimento da solução encontrada através do método do *Nearest Neighbor*, como foi visto anteriormente ( $1/L_{nn}$ ). Adicionalmente, pode-se multiplicar este comprimento  $L_{nn}$  pelo número de nós do problema, diminuindo ainda mais esta concentração inicial de ferormônios ( $1/n.L_{nn}$ ). O parâmetro  $\rho$  define a velocidade com que a densidade de ferormônios decai; dessa forma, podemos ver que a expressão acima faz com que a densidade de ferormônios de um arco sofra uma redução cada vez que tal

arco é percorrido por uma formiga. Essa medida visa evitar que situações transitórias iniciais façam com que a solução tenda para algum caminho que possa não ser o ótimo. Isso garante que as informações mais antigas vão gradativamente assumindo um peso cada vez menor na decisão atual de cada formiga, e que novas e melhores soluções possam surgir.

No modelo AS, tínhamos uma regra única de atualização de ferormônios que também possuía o princípio de evaporação de ferormônios descrito acima, mas que incluía também na mesma expressão uma atualização global de ferormônios. Tal atualização garantia que fossem feitos diferentes depósitos de ferormônios nos arcos, de acordo com a qualidade das soluções encontrada por cada formiga. Ou seja, toda formiga era responsável por depósitos de ferormônios, que seriam tão maiores quanto melhores fossem os caminhos encontrados por cada formiga. No caso do ACS, esta regra é diferente. O reforço de ferormônios neste caso não é feito por cada formiga, mas sim de forma unificada e centralizada. Ao final de cada iteração, o melhor caminho encontrado é o único que tem sua densidade de ferormônios incrementada, representando uma diferença importante para o modelo AS. Agora, todos os arcos que compõem o caminho mais curto encontrado têm sua densidade de ferormônios atualizada segundo a regra abaixo:

$$\tau_{ij}(t) \leftarrow (1 - \rho)\tau_{ij}(t) + \rho\Delta\tau_{ij}(t) \quad (13)$$

Na eq. 13,  $\Delta\tau_{ij}(t)$  é igual ao inverso do comprimento do caminho mais curto. Ou seja, quanto melhor for a qualidade da solução, ou quanto menor for o comprimento desta solução, maior é a contribuição de ferormônios que será adicionada aos arcos desta melhor solução.

Apesar de ter sido criado originalmente para a aplicação ao TSP, o ACS foi a base para o desenvolvimento do MACS-VRPTW, algoritmo que será visto na seção seguinte e que é aplicado ao problema de roteirização de veículos com janelas de tempo.