

## 4 Abordagem proposta

A abordagem proposta consiste na combinação do modelo de animação interativa de fluidos baseado em SPH apresentado por Muller et al. (2003), com o modelo para simulação de águas rasas, também baseado em SPH, apresentado em Rodriguez-Paz e Bonet (2005) para simulações em engenharia. A idéia é incorporar características do terreno à formulação descrita em (Muller et al., 2003), reproduzida no Capítulo 3, para produzir animações de fluidos sobre terrenos em tempo real. A seguir descrevemos como esses dois modelos baseados em SPH foram combinados.

Na Seção 4.1, é definido o domínio de simulação com base no modelo de águas rasas. Na Seção 4.2, descrevemos como os dois modelos foram combinados e na Seção 4.3 são descritas as funções de suavização utilizadas na simulação.

### 4.1 Domínio do problema

Na hipótese de águas rasas apresentada em (Rodriguez-Paz; Bonet, 2005) o domínio do problema é constituído pela superfície de um terreno e pelo fluido sobre essa superfície. A solução é baseada em uma projeção 2D deste domínio. A superfície do terreno é representada por uma função do tipo  $H(x, y)$  que fornece a altura da superfície em cada ponto. O fluido é discretizado através de um sistema de partículas e projetado sobre um plano. Cada partícula no plano projetado representa uma coluna de fluido com altura  $h_t$  e massa constante  $m$  sobre a superfície do terreno. Essas partículas se movem de acordo com a topografia do terreno, sempre na direção tangente à superfície (Fig. (4.1)).

A componente  $z$  da posição da base de cada coluna de água (Fig.4.1) é dada por

$$z = H(x, y). \quad (4-1)$$

Derivando no tempo, a componente vertical da velocidade pode ser calculada da seguinte maneira:

$$v_z = \nabla H \cdot \vec{v}, \quad (4-2)$$

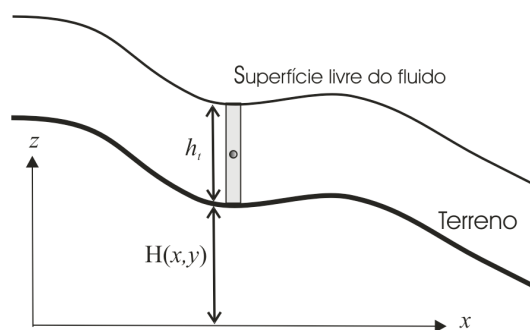


Figura 4.1: Domínio de simulação de águas rasas.

onde  $\nabla H$  é o gradiente do terreno na posição ocupada pela coluna e  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  é o vetor velocidade contendo as componentes  $x$  e  $y$  da velocidade da coluna. Sendo assim, as incógnitas do problema são as coordenadas  $x$  e  $y$  das partículas a cada instante de tempo e a altura da coluna de água  $h_t$ .

As alturas das colunas de água relacionam-se com a massa específica projetada do fluido  $\rho$ , que é a quantidade de massa por unidade de área. Dado que o fluido em movimento será assumido incompressível, essa relação é definida pela equação

$$\rho = h_t \rho_w, \quad (4-3)$$

onde  $\rho_w$  é a massa específica por unidade de volume do fluido.

## 4.2 Combinação dos modelos

Nesta seção descrevemos como os modelos foram combinados considerando as particularidades no cálculo da massa específica e das forças que influenciam o movimento do fluido.

### 4.2.1 Avaliação da massa específica

Conforme dito anteriormente, o fluido acompanha a superfície do terreno e sua massa específica projetada 2D se expande ou contrai de acordo com a altura da coluna segundo a equação (4-3). Para manter a precisão da solução, em (Rodriguez-Paz; Bonet, 2005) foi utilizado raio de interpolação ( $h$ ) variável. Isto leva à necessidade de utilização de um método iterativo para resolver uma não linearidade que surge da solução com  $h$  variável, o que aumenta o custo da simulação. A utilização de um  $h$  variável também aumenta a complexidade na determinação de quais partículas estão dentro do raio de interpolação. Como no nosso caso estamos interessados em animação e podemos abrir mão de precisão, desde que isso não comprometa o realismo visual, utilizaremos, na abordagem

proposta, a avaliação da massa específica com  $h$  fixo, conforme na equação 3-6 apresentada por (Muller et al., 2003).

#### 4.2.2

#### Equações governantes

A partir do domínio descrito na Seção 4.1, são derivadas as equações governantes no modelo para simulação de águas rasas proposto em (Rodríguez-Paz; Bonet, 2005). Com tais equações, obtém-se uma expressão para aceleração de uma partícula de fluido que considera as propriedades do terreno. Tal expressão é dada por:

$$\vec{a}_i = -\frac{\vec{g} + \vec{v}_i \cdot k_i \vec{v}_i - \vec{t}_i \cdot \vec{\nabla} H_i}{1 + \vec{\nabla} H_i \cdot \vec{\nabla} H_i} \vec{\nabla} H_i - \vec{t}_i \quad (4-4)$$

onde  $\vec{t}_i = \vec{T}_i/m_i$  (Força interna sobre massa),  $k_i$  é a curvatura do terreno na posição da partícula  $i$  e  $\vec{\nabla} H_i$  o gradiente.

Para definição do modelo proposto nesta dissertação, anulamos o termo  $t_i$ , correspondente à força interna na Equação (4-4), obtendo-se a seguinte expressão:

$$\vec{F}_{ext} = -\frac{\vec{g} + \vec{v}_i \cdot k_i \vec{v}_i}{1 + \vec{\nabla} H_i \cdot \vec{\nabla} H_i} \vec{\nabla} H_i \quad (4-5)$$

Isso é feito porque nesta dissertação as forças internas serão calculadas segundo (Muller et al., 2003). A Equação (4-5) é utilizada para substituir a força externa no modelo de Muller et al. que considera apenas a gravidade. Assim, temos uma expressão para aceleração que combina força externa decorrente da gravidade e propriedades do terreno, com forças internas de um modelo de simulação simplificado e menos custoso, que apresenta bons resultados para animação. Essa expressão é dada a seguir:

$$\rho \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{F}_{ext} + \mu \nabla^2 \vec{v}, \quad (4-6)$$

onde  $p$  é a pressão e  $\mu$  a viscosidade do fluido.

Procedemos a discretização seguindo o esquema da Seção 3.3. No entanto, no modelo de águas rasas a pressão é dada pela pressão hidrostática considerando a altura da coluna de água que cada partícula representa sobre o terreno. Deste modo, substituímos a Equação (3-11) para o cálculo da pressão, pela expressão a seguir:

$$p = \frac{1}{2} \vec{g} \rho_w h_t^2 \quad (4-7)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\rho_w$  a massa específica por unidade de volume e  $h_t$  a altura da coluna de água.

### 4.3 Funções de suavização

As funções de suavização estão diretamente ligadas à performance e estabilidade do método SPH e devem satisfazer certas propriedades para serem aplicadas em problemas hidrodinâmicos (Liu; Liu, 2003).

1. Uma das propriedades das funções de suavização é que elas devem ser normalizadas dentro do domínio de suporte; ou seja:

$$\int W(\vec{x} - \vec{x}', h) d\vec{x}' = 1, \quad (4-8)$$

A integral deve ser unitária dentro do domínio de suporte para garantir que a interpolação seja correta. Como a simulação ocorre em uma projeção 2D do domínio, as funções de suavização utilizadas precisam ser normalizadas neste espaço. Neste trabalho, obtivemos versões 2D (Equações (4-11), (4-12) e (4-13)) das funções de suavização propostas por Muller et al. (2003).

2. As funções de suavização devem possuir um domínio de suporte compacto; ou seja:

$$W(\vec{x} - \vec{x}') = 0, \text{ para } |\vec{x} - \vec{x}'| > \kappa h, \quad (4-9)$$

onde  $\kappa$  é uma constante e  $h$  o raio de interpolação. Estes fatores definem o domínio de suporte da função de suavização.

3. O valor da função de suavização  $W(\vec{x} - \vec{x}')$  deve ser maior ou igual a 0 para qualquer ponto  $\vec{x}'$  dentro do domínio de suporte de  $\vec{x}$ .
4. O valor da função de suavização  $W(\vec{x} - \vec{x}')$  deve decrescer com o aumento da distância entre  $\vec{x}$  e  $\vec{x}'$ .
5. A função de suavização deve satisfazer a condição de uma função do tipo delta de Dirac a medida que o raio de interpolação  $h$  se aproximar de 0, ou seja:

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{x} - \vec{x}', h) = \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4-10)$$

6. A função de suavização deve ser uma função par (condição de simetria). Partículas à mesma distância do ponto  $\vec{x}$  devem contribuir da mesma forma independente da posição.
7. A função de suavização deve ser suficientemente suave. Para garantir uma boa aproximação a função de suavização e suas derivadas devem ser contínuas.

As Equações (4-11), (4-12) e (4-13) representam as funções de suavização 2D para massa específica, força de pressão e força de viscosidade respectivamente.

$$W_{cor}(r, h) = \frac{4}{\pi h^8} \begin{cases} (h^2 - r^2)^3, & 0 \leq r \leq h, \\ 0, & \text{cc.} \end{cases} \quad (4-11)$$

$$W_{press}(r, h) = \frac{10}{\pi h^5} \begin{cases} (h - r)^3, & 0 \leq r \leq h, \\ 0, & \text{cc.} \end{cases} \quad (4-12)$$

$$W_{visc}(r, h) = \frac{5}{3\pi h^2} \begin{cases} -\frac{r^3}{2h^3} + \frac{r^2}{h^2} + \frac{h}{2r} - 1, & 0 \leq r \leq h, \\ 0, & \text{cc.} \end{cases} \quad (4-13)$$

#### 4.4 Implementação

Na implementação do SPH (Muller et al., 2003; Silva Neto et al., 2005), é necessária uma identificação das partículas dentro de uma vizinhança definida pelo suporte  $h$  da função de suavização. Uma abordagem muito comum para tratar este problema é a subdivisão do espaço em um grid regular cujo tamanho das células é definido por  $h$ . Cada célula possui uma lista com as partículas localizadas naquela região do espaço. Dessa forma, dada uma partícula  $i$ , a busca pelas partículas na vizinhança definida por  $h$  é feita apenas na célula onde a partícula  $i$  se encontra e em suas células vizinhas. Essa estratégia, reduz o custo computacional de  $O(n^2)$ , para  $O(nm)$ , onde  $n$  é o número total de partículas e  $m$  é o número médio de partículas nas células vizinhas. Outra vantagem na utilização dessa estrutura é que ela pode ser empregada na redução do número de verificações de colisão de uma partícula com a geometria que delimita as fronteiras do fluido e com outros objetos na cena. Isto é feito através da identificação das células que são cortadas por algum tipo de fronteira.

Em posse das vizinhas da partícula  $i$ , calcula-se sua massa específica  $\rho$ , altura da coluna de água  $h_t$  e pressão  $p$  através das equações (3-6), (4-3) e (4-7). Em seguida, calcula-se as forças decorrentes da pressão e viscosidade, conforme as equações (3-10) e (3-13). Essas forças constituem as forças internas utilizadas na nossa abordagem. Em seguida, é feita a integração no tempo. Cada partícula manterá informações sobre seu estado atual (instante  $t$ ) e seu próximo estado (instante  $t + \delta t$ ) até que todas as partículas do domínio tenham sido integradas no tempo. Após terminada esta etapa, inicia-se uma nova iteração sobre o sistema

de partículas. Nessa iteração, o estado da partícula, calculado na iteração anterior é avaliado. Com base nesse estado, as partículas são reorganizadas pelas células da subdivisão em função de suas posições.

Se a nova célula onde a partícula deve ser inserida for uma célula de fronteira, um módulo de detecção e tratamento de colisão é executado. O esquema na Figura 4.2, a seguir, exemplifica o algoritmo.

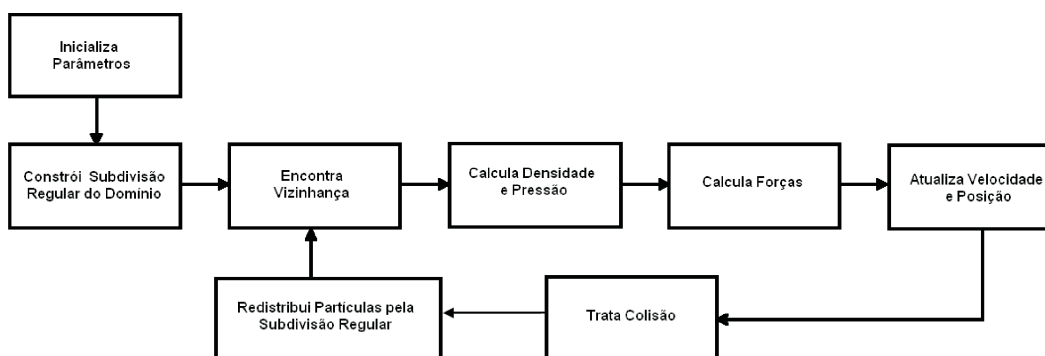


Figura 4.2: Visão geral do processo.

#### 4.4.1 Visualização

Uma estratégia simples foi adotada para visualização neste trabalho. Uma malha virtual fixa é estabelecida no domínio do problema. À medida que as partículas de fluido evoluem sobre o terreno, calculamos a altura que os vértices da malha devem assumir para representar a superfície do fluido. Com SPH, valores definidos apenas nas posições das partículas podem ser avaliados em qualquer posição do espaço via interpolação. Sendo assim, para estabelecer a altura dos vértices da malha, procedemos aplicando SPH na posição de cada vértice. Uma busca por partículas vizinhas ao vértice é efetuada e a Equação (3-6) (Seção 3.2) é aplicada para calcular a massa específica naquele ponto. Com a relação entre massa específica e altura da coluna de fluido, estabelecida pela Equação 4-3 (Seção 4.1), obtém-se a altura do fluido na posição do vértice.