2
Coordenação entre pequenos fundos de investimento em um mercado relativamente ilíquido: efeitos sobre volume e preços

2.1. Motivação

> This is a pervasive pattern: every "bubble" has coincided with a trading frenzy, and an obvious and asymmetric flow of information, whether about tulips or transistors. All current theories used to analyze these prices ignore volume. (…) Well, perhaps the volume is a coincidence. Or perhaps prices really are set exactly as they would be with no volume, and volume follows. But, with such a striking and pervasive correlation in front of us, perhaps there is some causality going the other way.
>
> J. Cochrane[1]

O presente trabalho busca apresentar os efeitos agregados sobre a variação de preços de ativos decorrentes da atuação de fundos de investimento de tamanho reduzido. O modelo aqui desenvolvido dá especial atenção a um mercado financeiro relativamente ilíquido. Pode-se medir a liquidez de um mercado pelo grau em que a quantidade transacionada de um ativo afeta seu preço – em um mercado totalmente líquido, quaisquer operações podem ser feitas sem que haja modificação no preço dos ativos; em um mercado ilíquido, ao contrário, há um efeito no preço decorrente dessas operações. Difere-se este trabalho, assim, da teoria clássica de finanças, que explica a modificação do preço de um ativo exclusivamente pelo advento de novas informações a respeito do valor descontado dos dividendos associados a ele.

Segundo Cochrane (2007), modificações no retorno esperado de um ativo não explicadas por novas informações costumam estar associadas a movimentos

[1] COCHRANE, J., *Efficient Markets Today*, p. 5.

comuns entre os agentes atuantes no mercado. Essa atuação conjunta é apresentada aqui como decorrente de um motivo de coordenação que permeia a atividade dos fundos de investimento. Como quantidades transacionadas e preços estão relacionados em um mercado relativamente ilíquido, em se avaliar o impacto da atividade dos fundos sobre os preços, deve-se tratar também dos efeitos de volume gerados pelo incentivo que os fundos têm à coordenação.

A relação entre quantidades e preços é introduzida no modelo através da figura dos provedores de liquidez, agentes avessos ao risco que, dada a relativa iliquidez do mercado, cobram um prêmio pela transação de ativos, cujo valor depende da quantidade comercializada. Como os preços são dependentes das quantidades, um fundo de investimento racional que esteja interessado em maximizar o valor esperado de sua carteira tem incentivo a prever as carteiras compostas por seus congêneres.

É justamente a entender as conseqüências que esses dois efeitos – quais sejam a coordenação entre os fundos de investimento e a relação causal entre volume e preços existente em um mercado de liquidez reduzida – têm sobre os preços que este capítulo se dedica. O interesse em lidar com mercados em que a liquidez não é perfeita decorre do fato de que pesquisas recentes têm mostrado que a liquidez dos principais mercados financeiros mundiais tem diminuído.

Pastor & Stambaugh (2003) analisam a modificação na volatilidade do mercado financeiro dos Estados Unidos durante a década de 1990. Os resultados alcançados apresentados pelos autores atestam o declínio da liquidez do mercado financeiro americano. Choi & Cook (2005) seguem a mesma metodologia aplicada a dados japoneses, e, similarmente, percebem a existência de uma grande e persistente queda na liquidez do mercado financeiro desse país no mesmo período.

Segundo Markus & Nagel (2003), fundos de investimento são os investidores que mais se assemelham à idéia abstrata de agentes racionais realizadores de arbitragem. Por sua vez, Abreu & Brunnermeier (2002) apontam motivos pelos quais a atuação de investidores racionais é balizada por uma vontade de coordenação entre seus investimentos que decorre da existência do que eles definem como “risco de sincronização”. Caso exista um ativo sobrevalorizado no mercado, o risco de sincronização – não saber quando os demais investidores tomarão a atitude que se deseja tomar –, previne que um investidor queira se posicionar contrariamente a essa valorização, uma vez que sua atuação isolada não é capaz de frear a tendência de alta no preço do ativo caso os outros investidores hajam de maneira contrária a sua. Dessa forma, os ganhos decorrentes da atividade de um fundo de investimento dependem do nível de sincronia com que suas operações têm com os demais fundos do mercado.

Os resultados atingidos dão conta de que o aumento do nível de coordenação entre os fundos de investimento tem dois efeitos sobre o volume transacionado de ativos/carteiras e, conseqüentemente, sobre seus preços. O primeiro efeito está relacionado ao próprio motivo pelo qual os recursos fluem da população em direção aos fundos de investimento. Com o aumento da coordenação, a expectativa populacional da rentabilidade das carteiras dos fundos aumenta e, logo, maior é a quantidade de recursos que os fundos administram. O resultado sobre preços é imediato, uma vez que o volume comercializado de cada carteira aumenta.

O segundo efeito da coordenação sobre o volume e preços é ambíguo. Isso porque, embora o volume total transacionado seja maior na presença de coordenação, há carteiras cuja quantidade transacionada diminui. Demonstra-se que as carteiras mais próximas à carteira média dentre todos os fundos terão um maior volume transacionado maior e, logo, sofrerão uma variação maior em seu preço. Por outro lado, há carteiras suficientemente distantes da carteira média que terão uma quantidade transacionada menor – em relação ao caso em que não há coordenação –, do que decorre que seus preços variarão menos.

Apesar de que os efeitos citados possam ter sentidos opostos sobre a quantidade transacionada de determinadas carteiras, pode-se dizer que a coordenação leva ao aumento na variação de preços, uma vez que a soma das quantidades transacionadas de todas as carteiras aumenta.

O modelo apresentado se assemelha ao de Gabaix et al. (2006), sendo a principal diferença entre eles o fato de que a volatilidade aqui não é gerada por grandes operações de uma única instituição, e sim pela atuação conjunta de fundos de tamanhos minúsculos ante a totalidade do mercado.

2.2.Modelo

Há dois tipos de agentes: fundos de investimento que administram recursos de terceiros e investem em ativos arriscados; e provedores de liquidez, com quem os fundos de investimento negociam suas carteiras.

2.2.1.Fundos de investimento

Como em Berk & Green (2004), há um contínuo de fundos de investimento $i \in [0,1]$. Seja q_{it} a quantidade de recursos administrada pelo fundo i no período t. O total pago pelo fundo de investimento a seus quotistas depende da rentabilidade da carteira escolhida pelo fundo, do custo de sua operação e da taxa de administração de recursos de terceiros cobrada, da seguinte forma

$$TP_{it} = q_{it}R_{it} - C(q_{it}) - q_{it}f_{it},$$

em que R_{it} é a rentabilidade bruta do fundo. O custo de operação do fundo é uma função crescente da quantidade administrada, dada por $C(q_{it})$. Supõe-se que $C''(q_{it}) > 0$, $C(0) = 0$ e $\lim_{q_t \to \infty} C'(q_t) = \infty$. A taxa de administração de recursos cobrada é denotada por f_{it}.

O fundo de investimento decide a respeito da carteira θ_{it} a ser composta em cada período. O motivo de coordenação é introduzido no modelo através da dependência da rentabilidade bruta da carteira composta pelo fundo não apenas da sua distância em relação a uma determinada carteira ótima *ex-ante* $\hat{\theta}_t$ – aquela que seria a mais rentável caso não houvesse relação entre volume e preços –, mas também em relação à carteira média dentre todos os fundos

$$R_{it} = k - (1-\omega)(\theta_{it} - \hat{\theta}_t)^2 - \omega(\theta_{it} - \bar{\theta}_t)^2$$

onde $\bar{\theta}_t = \int \theta_{it}\, di$. A constante k garante que a rentabilidade da carteira não é negativa em todos os casos. O processo gerador de $\hat{\theta}_t$ será caracterizado posteriormente. Supõe-se que o fluxo de recursos da população em direção aos fundos de investimento tem elasticidade infinita.

2.2.2.Provedores de liquidez

Há um número infinito de provedores de liquidez – indexados por $j \in \mathbb{R}-$, cujo negócio é vender as carteiras demandadas pelos fundos de investimento. Por simplicidade, supõe-se que cada provedor de liquidez possua quantidades idênticas de cada carteira $\theta \in \mathbb{R}$. Sendo θ_{jt} a quantidade da carteira θ possuída pelo provedor j, a quantidade total existente desta carteira é dada por $\int_j \theta_{jt}\, dj$.

De acordo com as demandas dos fundos de investimento, o provedor de liquidez j realizará a venda da quantidade $\Delta\theta_{jt}$ de cada carteira θ pela quantidade b_{jt} de dinheiro. Como em Rostek & Weretka (2008), supõe-se que a utilidade dos provedores de liquidez seja

$$U_{jt}\big((\theta_{jt}, \Delta\theta_{jt})_\theta, b_{jt}\big) = b_{jt} + \int_\theta (\theta_{jt} - \Delta\theta_{jt}) A_\theta\, d\theta - \frac{\alpha}{2}\int_\theta (\theta_{jt} - \Delta\theta_{jt})^2 V_\theta\, d\theta$$

onde A_θ e V_θ representam, respectivamente, a esperança e a variância do dividendo associado à carteira θ pelo provedor de liquidez.

Note que a utilidade dos provedores de liquidez é linear na quantidade de dinheiro ganha na venda das carteiras aos fundos de investimento e quadrática nas carteiras que permanecem em sua posse.

2.2.3.Preço das carteiras

O preço pago pelos fundos de investimento aos provedores de liquidez por uma determinada carteira depende tanto do preço observado – que pode ser entendido como uma medida descontada do fluxo futuro de dividendos associado a essa carteira – quanto das quantidades comercializadas entre os agentes.[2] Em um mercado totalmente líquido, quaisquer quantidades de cada carteira poderiam ser comercializadas entre provedores de liquidez e fundos de investimento sem que o preço destas carteiras fosse modificado. Como aqui os mercados são relativamente ilíquidos, o preço das carteiras também dependerá das quantidades vendidas pelos provedores de liquidez.

Seja $H_{\theta_{jt}}$ o impacto imediato no preço da carteira θ decorrente do aumento marginal na venda desta carteira pelo provedor j em resposta ao aumento marginal na demanda dos fundos de investimento por aquela carteira. O objetivo primordial deste trabalho é entender a forma como as quantidades comercializadas modificam o preço das carteiras. Dessa forma, o impacto da operação de um provedor de liquidez individual sobre o preço da carteira θ, $H_{\theta_{jt}}$, será determinado em equilíbrio nas seções posteriores.

Por sua vez, seja H_{θ_t} o impacto permanente no preço da carteira θ decorrente da atuação conjunta de todos os agentes. Como todos os provedores de liquidez são iguais, tem-se que o impacto total de preço decorrente da venda de uma unidade adicional de uma determinada carteira é na verdade a soma dos impactos decorrentes dessa operação dentre todos os provedores.

2.3.Estrutura informacional

O motivo pelo qual os recursos fluem da população em direção aos fundos de investimento é a percepção existente de que as rentabilidades das carteiras de

[2] Segundo Amihud, Mendelson & Pedersen (2005), em um mercado totalmente líquido, a hipótese de não-arbitragem equivale à existência de um fator de desconto estocástico único. Já em mercados relativamente ilíquidos, com os que se lida neste trabalho, a existência do fator estocástico de desconto não é garantida.

investimento dos fundos são intrinsecamente maiores do que um determinado benchmark de informação pública. Defina φ_{it} como a esperança da população quanto à rentabilidade da carteira θ_{it}

$$\varphi_{it} = E[R_{i,t}].$$

Essa expectativa depende da crença que a população tem a respeito da estratégia utilizada pelo fundo na composição de sua carteira, definida posteriormente.

Em t, cada carteira θ sofre um choque $\vartheta_{\theta t}$ no fluxo futuro de seus dividendos. Defina a carteira ótima *ex-ante* $\hat{\theta}_t$ como aquela cujo preço mais aumenta em decorrência exclusiva dos choques em seus dividendos futuros, isto é, desconsiderando as modificações de preço decorrente de efeitos de demanda associados à carteira.[3] Supõe-se que a carteira ótima se distribui normalmente ao redor da *prior* μ, com variância σ_θ^2, $\hat{\theta}_t \sim N(\mu, \sigma_\theta^2)$.

A respeito dessa carteira ótima *ex-ante,* há duas fontes de informação disponíveis ao fundo de investimento i. Um dos sinais recebidos é de domínio público, $y_t \sim N(\hat{\theta}_t, \sigma_y^2)$, e outro privado $x_{it} \sim N(\hat{\theta}_t, \sigma_x^2)$. O fundo i usa os sinais (y_t, x_{it}) para decidir a respeito de sua carteira θ_{it}. A expectativa condicional que o fundo i deriva a respeito da carteira ótima *ex-ante* é dada por

$$E[\hat{\theta}_t | x_{it}, y_t] = \delta z_t + (1 - \delta) x_{it},$$

onde $z_t = \frac{y_t \sigma_y^{-2} + \mu \sigma_\theta^{-2}}{\sigma_y^{-2} + \sigma_\theta^{-2}}$ é uma combinação entre o sinal público recebido e a *prior* que os fundos têm a respeito da carteira ótima ex-ante, e $\delta = \frac{\sigma_y^{-2} + \sigma_\theta^{-2}}{\sigma_x^{-2} + \sigma_y^{-2} + \sigma_\theta^{-2}}$.

[3] O termo *ex-ante* é utilizado aqui com um significado diferente do usual. A iliquidez do mercado financeiro em questão faz com que os preços das carteiras e, em conseqüência, a rentabilidade dos fundos de investimento, dependam das quantidades transacionadas. A carteira ótima *ex-ante* refere-se, então, à carteira que teria a maior rentabilidade caso a liquidez do mercado fosse perfeita.

2.4.Timing

A cada período, os fundos de investimento decidem a taxa f_{it} cobrada pela administração de recursos de terceiros. A seguir, a quantidade q_{it} de recurso flui para o fundo de investimento i de acordo com a expectativa de retorno de sua carteira, φ_{it}. Com base nos sinais (y_t, x_{it}) recebidos quanto à carteira ótima *ex-ante* $\hat{\theta}_t$, o fundo determina sua carteira θ_{it}. A compra da carteira escolhida pelo fundo de investimento é então realizada, sendo que o valor pago depende da quantidade transacionada através do impacto imediato no preço $H_{\theta_{jt}} q_{\theta it}$.

Posteriormente, o preço de cada carteira θ se modifica permanentemente, tanto pela realização dos choques $\vartheta_{\theta t}$ como pelos movimentos de demanda, *i.e.*, o impacto permanente total $H_{\theta_t} q_{\theta t}$, onde $q_{\theta t}$ é a quantidade total comercializada da carteira θ_t. Por fim, o retorno R_{it} de cada fundo é determinado.

Os próximos passos envolvem a determinação da estratégia que os fundos de investimento utilizam quando da composição de suas carteiras bem como dos efeitos que as compras dos fundos têm sobre os preços negociados com os provedores de liquidez.

2.5.Variação do preços das carteiras em equilíbrio

Esta seção busca determinar a maneira pela qual o preço das carteiras é afetado pelas quantidades compradas pelos fundos de investimento. Dado o preço da carteira θ observado no mercado, p_{θ_t}, a quantidade ótima vendida pelo provedor de liquidez j a este preço $\Delta\theta_{jt}^*$ e o impacto-preço $H_{\theta_{jt}}$, o preço pelo qual a venda se realiza depende da quantidade vendida de fato $\Delta\theta_{jt}$, e é dado por

$$p_{\theta_t}(\Delta\theta_{jt}) = p_{\theta_t} + H_{\theta_{jt}}(\Delta\theta_{jt} - \Delta\theta_{jt}^*)$$

O valor do impacto imediato nos preços, $H_{\theta_{jt}}$, é determinado em equilíbrio. A cada período, um equilíbrio é descrito pelo preço de cada carteira, $\left(p_{\theta_t}^*\right)_\theta$, pelas compras de cada fundo de investimento, $(\theta_{it}^*)_i$, pelas vendas de cada provedor de liquidez, $\left(\Delta\theta_{jt}^*\right)_j$ e pelos impactos sobre os preços de cada carteira da venda adicional de uma unidade marginal da carteira pelos provedores de liquidez, $\left(H_{\theta_{jt}}^*\right)_{\theta,j}$.

Definição 2.1. O vetor $\left\{\left(p_{\theta_t}^*\right)_\theta, (\theta_{it}^*)_i, \left(\Delta\theta_{jt}^*\right)_j, \left(H_{\theta_{jt}}^*\right)_{\theta,j}\right\}$ é um equilíbrio se

(i) A oferta de cada carteira se iguala à demanda:

$\int_j \Delta\theta_{jt}^* \, dj - \int_i \theta_{it}^* \, di = 0, \ \forall\theta.$

(ii) Fundos e provedores de liquidez se comportam otimamente: $\forall i, \theta_{it}^*$ maximiza a rentabilidade esperada do fundo de investimento i, $\forall j, \Delta\theta_{jt}^*$ é ótimo dada a função p_{θ_t}.[4]

Como definido anteriormente, a utilidade do provedor de liquidez j como função da operação $\left\{\left(\theta_{jt}, \Delta\theta_{jt}\right)_\theta, b_{jt}\right\}$ é dada por

$$U_{jt}\left\{\left(\theta_{jt}, \Delta\theta_{jt}\right)_\theta, b_{jt}\right\} = b_{jt} + \int_\theta \left(\theta_{jt} - \Delta\theta_{jt}\right)A_\theta \, d\theta - \frac{\alpha}{2}\int_\theta \left(\theta_{jt} - \Delta\theta_{jt}\right)^2 V_\theta \, d\theta$$

Em equilíbrio, a perda marginal de utilidade decorrente da venda de uma unidade adicional da carteira θ pelo provedor de liquidez j deve igualar-se ao ganho de utilidade – aumento da quantidade de dinheiro recebido pela venda – decorrente da operação. Assim, tem-se que:

$$\frac{\partial U_{jt}}{\partial \Delta\theta_{jt}} = -A_\theta + \alpha V_\theta\left(\theta_{jt}^* - \Delta\theta_{jt}^*\right) = p_{\theta_t} + H_{\theta_{jt}}\Delta\theta_{jt}^*$$

Por comodidade, se suporá que a medida dos provedores de liquidez seja J. Como $j \in \mathbb{R}$, tomar-se-á o limite $J \to \infty$ posteriormente Resolvendo a expressão anterior para a quantidade vendida pelo provedor de liquidez j, tem-se

[4] O comportamento dos fundos de investimento será estudado nas seções posteriores.

$$\Delta\theta_{jt}^{*} = \frac{\left(-A_{\theta} + \alpha V_{\theta}\theta_{jt}^{*} - p_{\theta_t}\right)}{\left(H_{\theta_{jt}} + \alpha V_{\theta}\right)}$$

Em equilíbrio, a quantidade comprada de cada carteira pelos fundos de investimento deve igualar-se a quantidade vendida pelos provedores de liquidez. Ao substituir as quantidades ótimas vendidas pelos fundos $l \neq j$ na condição de equilíbrio e resolver para o preço, chega-se ao seguinte resultado.[5]

Proposição 2.1. No equilíbrio simétrico entre os provedores de liquidez, o impacto imediato no preço da venda de uma unidade adicional da carteira θ pelo fundo de investimento j é dado por

$$H_{\theta_{lt}}^{*} = \frac{\alpha V_{\theta}}{(J-1)}$$

Como a medida dos provedores de liquidez é infinita, ao tomar-se o limite $J \to \infty$, tem-se que o preço das carteiras não se modifica em função da quantidade comercializada entre um determinado fundo de investimento e um provedor de liquidez. Este resultado possibilita que a escolha ótima de carteira pelos fundos de investimento nas seções a seguir seja feita sem levar em consideração o efeito-preço.

Ao computar, porém, a modificação do preço das carteiras de mercado decorrente da demanda total dos fundos de investimento, tem-se que a quantidade total comercializa desempenha função primordial na alteração dos preços das carteiras. Como todos os provedores de liquidez são iguais, por simetria tem-se que o impacto permanente nos preços é a soma dos impactos imediatos entre todos os provedores

$$H_{\theta_t}^{*} = \int_{l} \frac{\alpha V_{\theta}}{(J-1)} dl = \frac{J\alpha V_{\theta}}{(J-1)}$$

[5] As provas omitidas no texto encontram-se no apêndice ao final do trabalho.

Assim, o impacto-preço permanente da carteira θ no limite é dado por αV_θ, uma vez que $\frac{J}{(J-1)} \longrightarrow 1$. Seja $q_{\theta t}$ a quantidade total comprada pelos fundos de investimento da carteira θ. Segue que a modificação permanente no preço da carteira θ em função da quantidade vendida dos provedores de liquidez aos fundos de investimento é dada por $\alpha V_\theta q_{\theta t}$.

2.6.Estratégia dos fundos de investimento

Busca-se, agora, determinar a estratégia utilizada pelos fundos de investimento para a composição da carteira θ_{it}, bem como para determinação da taxa f_{it} cobrada pela administração de recursos de terceiros.

Sabe-se que os fundos não levam em consideração a variação dos preços das carteiras decorrente de suas transações, pois ela é desprezível. Seja r_{it} a taxa de retorno líquida paga pelo fundo i no período t, ou seja, a taxa bruta menos os custos envolvidos, tem-se

$$r_{it} = \frac{TP_{i,t+1}}{q_{it}} = R_{it} - \frac{C(q_{it})}{q_{it}} - f_{it}.$$

A cada período, os recursos fluem da população para os fundos de investimento até o ponto em que, devido às condições impostas sobre a função custo, o excesso de retorno esperado da carteira de cada fundo iguala-se a zero, $E[r_{i,t}] = 0$. Tomando a esperança da expressão e reordenando os termos, chega-se ao *payoff* instantâneo do fundo i no período t

$$q_{it} f_{it} = \varphi_{it} q_{it} - C(q_{it}).$$

A decisão do fundo de investimento i envolve a taxa f_{it} a ser cobrada bem como a carteira θ_{it} a ser composta. O problema do fundo pode ser expresso como

$$\max_{f_{it},\theta_{it}} E\left[\sum_{h=t}^{\infty} \lambda^h \big(\varphi_{ih} q_{ih} - C(q_{ih})\big) \,|x_{it}, y_t\right]$$

onde $\lambda < 1$ é a taxa de desconto intertemporal dos fundos de investimentos.

Como a taxa de administração e a quantidade de recursos administrada se relacionam univocamente, o problema acima equivale à escolha ótima da carteira de investimento e da quantidade administrada. O fundo resolve, a cada período, o problema a seguir:

$$\max_{q_{it},\theta_{it}} E\left[\sum_{h=t}^{\infty} \lambda^h\big(\varphi_{ih}q_{ih} - C(q_{ih})\big)|x_{it}, y_t\right]$$

Este programa de maximização pode ser resolvido em duas etapas. Tal separação é possível uma vez que o fundo toma a expectativa φ_{it} como dada quando da escolha da taxa f_{it}, *i.e.,* da quantidade de recursos que se deseja receber. A escolha da carteira θ_{it}, por sua vez, não interage com a decisão da quantidade q_{it} administrada no período.

2.6.1.Quantidade de recursos administrada

O fundo i escolhe sua taxa de administração de recursos de terceiros dada a esperança que a população tem da rentabilidade de sua carteira, $\varphi_{it} = E[R_{i,t}]$. Como essa decisão se repete a cada período, a escolha é feita de forma a maximizar o seu *payoff* instantâneo

$$\max_{q_{it}} \varphi_{it}q_{it} - C(q_{it})$$

$$CPO\colon\ \varphi_{it} - C'(q_{it}^*) = 0$$

Assim, dado φ_{it}, a taxa ótima cobrada pelo fundo é $f_{it}^* = \varphi_{it} - \frac{C(q_{it}^*)}{q_{it}^*}$, onde q_{it}^* é tal que $C'(q_{it}^*) = \varphi_{it}$. O resultado acima também determina a quantidade ótima de recursos administrada. A taxa cobrada e a quantidade administrada são funções da expectativa de rentabilidade da carteira a ser montada pelo fundo e do custo envolvido em sua operação. A maneira pela qual a quantidade de recursos ótima é afetada pela esperança φ_{it} é caracterizada pela proposição abaixo.

Proposição 2.2: a quantidade q_{it}^{*} de recursos administrada por um fundo é crescente na crença que a população tem da rentabilidade de sua carteira, φ_{it}.

A proposição acima garante que a quantidade de recursos administrada por um fundo de investimento específico depende da crença que a população tem a respeito da rentabilidade da carteira deste fundo.

2.6.2.Carteira escolhida

A segunda etapa do problema envolve a decisão do fundo i com respeito à carteira θ_{it}. Ao fazê-lo, o fundo toma como dados a expectativa de retorno de sua carteira e a quantidade de recursos disponíveis. Esta parte do problema pode ser descrita como escolher a carteira que maximiza o *payoff* esperado do fundo nos períodos posteriores a t, sendo que a quantidade de recursos administrada e a taxa cobrada são avaliadas no ótimo esperado com as informações do período t

$$\max_{\theta_{it}} E\left[\sum_{h=t+1}^{\infty} \lambda^{h}\left(\varphi_{ih} q_{ih}^{*} - C(q_{ih}^{*})\right) | x_{it}, y_{t}\right]$$

Essa maximização pode ser simplificada da forma a seguir. Já estando determinada a função $q_{ih}^{*}(\varphi_{ih})$, resta estabelecer como a função valor associada a esse problema responde a modificações na expectativa de retorno futuro da carteira do fundo, φ_{ih}. Uma aplicação do Teorema do Envelope leva ao resultado de que o *payoff* do fundo é tanto maior quanto maior for a expectativa da população do retorno que sua carteira paga.

Proposição 2.3: o *payoff* instantâneo do fundo a cada período, $\varphi_{ih}q^*_{ih} - C(q^*_{ih})$, é crescente na esperança de rentabilidade de sua carteira, φ_{it}.

Como a remuneração do fundo é uma taxa fixa cobrada por cada unidade monetária administrada, o fundo de investimento tem incentivo a maximizar a crença φ_{it} a respeito de sua rentabilidade. O resultado acima implica que a escolha da carteira θ_{it} do fundo é feita de forma a maximizar a esperança da população com relação a sua lucratividade nos períodos seguintes, $\varphi_{i,t+h}, \forall h \geq 1$. Como foi expresso anteriormente, a esperança $\varphi_{i,t} = E[k - (1 - \omega)\left(\theta_{it} - \hat{\theta}_t\right)^2 - \omega(\theta_{it} - \bar{\theta}_t)^2]$ depende da crença que a população tem a respeito da estratégia que os fundos utilizam para composição de suas carteiras.

Antes de caracterizar a crença da população a respeito das carteiras a serem compostas pelos fundos, faz-se útil determinar qual a estratégia utilizada por estes caso estejam interessados em maximizar a rentabilidade de suas carteiras a cada período. Mostrar-se-á, a seguir, que há um equilíbrio em que crença da população de que cada fundo de investimento utiliza a estratégia que maximiza a rentabilidade de sua carteira é confirmada.

2.6.2.1.Carteira que maximiza a rentabilidade

O problema dos fundos i em compor suas carteiras de forma a maximizar a rentabilidade de suas operações pode ser expresso como

$$\max_{\theta_{it}} E\left[k - (1 - \omega)\left(\theta_{it} - \hat{\theta}_t\right)^2 - \omega(\theta_{it} - \bar{\theta}_t)^2 | x_{it}, y_t\right]$$

$$\text{CPO: } \theta_{it}(x_{it}, y_t) = (1 - \omega)E\left[\hat{\theta}_t | x_{it}, y_t\right] + \omega E[\bar{\theta}_t | x_{it}, y_t]$$

Cada fundo de investimento i escolhe sua carteira de investimento θ_{it} como função dos sinais recebidos acerca da carteira ótima *ex-ante*, ponderando entre suas expectativas a respeito do estado $\hat{\theta}_t$ e da carteira média dentre todos os fundos, $\bar{\theta}_t$. Se se atém às estratégias lineares da classe $\theta_{it}(x_{it}, y_t) = \beta z_t + (1 - \beta) x_{it}$, chega-se ao equilíbrio proposto abaixo.

Proposição 2.4: o equilíbrio do jogo de maximização da rentabilidade das carteiras pelo fundo, linear nos sinais (x_{it}, y_t), é dado por $\theta_{it}^*\,(x_{it}, y_t) = \frac{\delta}{1-\omega(1-\delta)} z_t + \frac{(1-\omega)(1-\delta)}{1-\omega(1-\delta)} x_{it}$. Este equilíbrio linear é único.

Se os fundos de investimento estivessem interessados em maximizar a rentabilidade de suas carteiras, em equilíbrio todos iriam utilizar a estratégia θ_{it}^*. Sabe-se, porém, que a verdadeira motivação dos fundos é maximizar a esperança que a população tem a respeito de sua rentabilidade futura. Mostrar-se-á, a seguir, que o equilíbrio condizente com a verdadeira motivação dos fundos de investimento coincide com o equilíbrio de maximização da rentabilidade.

Defina $\beta_{it}^* \equiv \frac{\delta}{1-\omega(1-\delta)}$ como o peso dado pelos fundos à informação pública no equilíbrio do jogo de maximização do retorno de suas carteiras. Seja $\tilde{\beta}_{it}$ a crença da população a respeito do peso dado pelo fundo i à informação pública quando da composição de sua carteira. Por fim, β_{it} é o peso dado de fato a essa informação pelo fundo i.

Proposição 2.5: existe um equilíbrio em que $\tilde{\beta}_{it} = \beta_{it} = \beta_{it}^*, \forall i \in [0,1]$.

Assim sendo, a carteira escolhida pelos fundos de investimento é, de fato, aquela que maximiza a rentabilidade das carteiras a cada período $\theta_{it}^*\,(x_{it}, y_t) =$

$\frac{\delta}{1-\omega(1-\delta)}z_t + \frac{(1-\omega)(1-\delta)}{1-\omega(1-\delta)}x_{it}$. Sabe-se que, na ausência de desejo por coordenação, *i.e.*, $\omega = 0$, os fundos estariam interessados em acertar a carteira ótima *ex-ante*, logo escolheriam uma carteira que igualasse sua expectativa $E[\hat{\theta}_t|x_{it}, y_t] = \delta z_t + (1-\delta)x_{it}$.

Corolário 2.1: o motivo de coordenação na composição das carteiras dos fundos faz com que a estratégia utilizada dê mais peso ao sinal público do que daria caso quisessem acertar a carteira ótima *ex-ante*.

Vê-se, pelo resultado acima, que a importância relativa dada pelos fundos aos sinais público e privado se modifica. O incentivo apresentado pela presença do desejo por coordenação ao aumento do peso dado ao sinal público é o ponto-chave do modelo.

2.7.Resultados

Enquanto o tamanho reduzido dos fundos de investimento deste modelo impede que a atuação individual de um deles modifique a quantidade transacionada ou os preços das carteiras, sua atuação conjunta tem influência direta sobre esses agregados. Mais ainda, a quantidade transacionada de cada carteira e, conseqüentemente, seu preço, depende diretamente do nível de coordenação existente entre os fundos. Sendo assim, esta seção final do capítulo dedica-se a caracterizar como a distribuição das carteiras transacionadas se modifica pela coordenação entre os fundos.

Sabe-se que a variação de preços entre dois períodos depende de dois efeitos: a realização do choque no fluxo esperado de dividendos da carteira, $\vartheta_{\theta t}$, e dos movimentos de demanda. Mais especificamente:

$$p_{\theta,t}(d_\theta, Q_\theta, \vartheta_\theta) - p_{\theta,t-1}(d_\theta, q_{\theta it}) = \vartheta_{\theta t} + B\lambda\gamma \int q^*_{\theta it}\, di$$

Uma vez que o interesse desta seção é entender quais os efeitos que a coordenação existente entre os fundos de investimento têm sobre as quantidades e preços das carteiras, os parâmetros $(\vartheta_{\theta t}, B, \lambda, \gamma)$, independentes do comportamento de demanda por carteiras dos fundos, tornam-se desinteressantes. Para entender tais efeitos, faz-se necessário determinar a quantidade total transacionada $q^*_{\theta t} \equiv \int q^*_{\theta it}\, di$ de cada carteira, avaliada no equilíbrio da seção anterior.

Sabe-se que o fundo i comprará a quantidade q^*_{it} de sua carteira ótima θ^*_{it}. Condicional à carteira ótima *ex-ante* $\hat{\theta}_t$ e ao sinal público z_t, a carteira ótima do fundo, θ^*_{it}, depende da realização do sinal privado x_{it}. A distribuição dessa carteira é dada por $\theta^*_{it}|\hat{\theta}_t, z_t \sim N\left(\frac{\delta}{1-\omega(1-\delta)} z_t + \frac{(1-\omega)(1-\delta)}{1-\omega(1-\delta)} \hat{\theta}_t, \left[\frac{(1-\omega)(1-\delta)}{1-\omega(1-\delta)}\right]^2 \sigma_x^2\right)$. Seja $\phi(\theta_{it})$ a f.d.p. da normal acima. Defina $q^*_t \equiv \int q^*_{it}\, di$ como a quantidade total em posse dos fundos de investimento em t. O resultado a seguir mostra a quantidade comercializada de cada carteira.

Proposição 2.6: A quantidade $q^*_{\theta t}$ transacionada da carteira θ pela totalidade dos fundos é uma parcela $\phi(\theta)$ da quantidade total de recursos sob administração dos fundos no período t: $q^*_{\theta t} = \phi(\theta)\left(\frac{1-q^*_{0t}}{q^*_t}\delta\kappa + (1-\kappa)\frac{1-q^*_{0t}}{q^*_t} + \frac{q^*_{0t}}{q^*_t}\delta\kappa_0 + (1-\kappa_0)\frac{q^*_{0t}}{q^*_t}\right) z_t + (1-\delta)\left(\frac{1-q^*_{0t}}{q^*_t}\kappa + (1-\delta)\frac{q^*_{0t}}{q^*_t}\kappa_0\right) x_{it}$

.

Na ausência de coordenação, a distribuição esperada da carteira ótima do fundo i condicional a $(\hat{\theta}_t, z_t)$ é dada por $\theta^*_{it}|\hat{\theta}_t, z_t \sim N\big(\delta z_t + (1-\delta)\hat{\theta}_t, (1-\delta)^2\sigma_x^2\big)$. Para efeito de comparação, denote as variáveis no caso em que a coordenação está ausente pelo sobrescrito *sc*. Assim, $\phi^{sc}(\theta_{it})$ representa a f.d.p. da distribuição da carteira ótima quando $\omega = 0$. Defina a quantidade total comercializada da carteira θ de forma semelhante, $q^{*sc}_{\theta t} \equiv \phi^{sc}(\theta) q^{*sc}_t$. As proposições a seguir buscam comparar as quantidades transacionadas da carteira θ quando há coordenação $\phi(\theta)q_t^*$ em relação ao caso em que não há, $\phi^{sc}(\theta_{it})$.

Proposição 2.7: Existem carteiras $\underline{\theta}$ e $\overline{\theta}$ tais que:

i) $\phi(\theta) > \phi^{sc}(\theta_{it}),\ \forall\, \theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$;

ii) $\phi(\theta) < \phi^{sc}(\theta_{it}),\ \forall\, \theta \in (-\infty, \underline{\theta})U(\overline{\theta}, \infty)$;

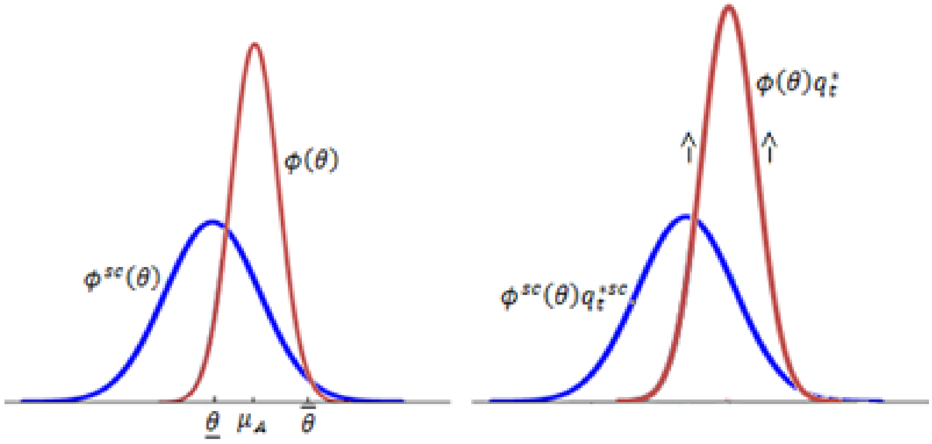
iii) $\phi(\theta) = \phi^{sc}(\theta_{it})$, se $\theta = \underline{\theta}$ ou $\theta = \overline{\theta}$.

Este efeito é ilustrado pela Figura 2.1.E abaixo. A coordenação faz com que as carteiras escolhidas pelos fundos sejam mais parecidas umas com as outras. Dessa forma, o primeiro efeito faz com que a distribuição $\phi(\theta)$ seja mais concentrada ao redor de sua média $\mu_A \equiv \frac{\delta}{1-\omega(1-\delta)} z_t + \frac{(1-\omega)(1-\delta)}{1-\omega(1-\delta)} \hat{\theta}_t$.

Como o preço das carteiras depende diretamente da quantidade comercializada, tem-se o seguinte corolário.

Corolário 2.2: Fixando-se $q_t^* = q_t^{*sc}$, a variação de preço decorrente de movimentos de demanda é maior na presença de coordenação para as carteiras $\theta \in (\underline{\theta}, \overline{\theta})$ e menor para as carteiras $\theta \in (-\infty, \underline{\theta})U(\overline{\theta}, \infty)$ em relação ao caso sem coordenação. O preço das carteiras $\underline{\theta}$ e $\overline{\theta}$ varia da mesma forma nos dois casos.

Figura 2.1: Distribuição das carteiras dos fundos de investimento



(E) **(D)**

A figura (E) ilustra a diferença entre as distribuições das carteiras compradas pelos fundos em decorrência da presença ou ausência do motivo de coordenação. A figura (D) ilustra o fato de que a quantidade administrada quando há coordenação aumenta.

Note que os resultados acima desconsideraram o fato de que a quantidade total de recursos à disposição dos fundos é diferente entre os dois casos em questão, $q_t^* \neq q_t^{*sc}$. Essa quantidade depende da expectativa que a população tem do retorno das carteiras dos fundos de investimento, que é modificada pelo grau de coordenação na atuação dos fundos de investimento, uma vez que o parâmetro ω entra diretamente no retorno dos fundos.

Proposição 2.8: a quantidade administrada por cada fundo é maior na presença de coordenação, $q_{it}^* > q_{it}^{*sc}$.

O efeito do aumento da quantidade transacionada por cada fundo de investimento é ilustrado pela Figura 2.1.D e equivale ao deslocamento para cima da distribuição $\phi(\theta)$ em relação a ϕ^{sc} quando cada uma é multiplicada pela quantidade em posse dos fundos em cada situação.

Corolário 2.3: Fixando-se $\phi(\theta) = \phi^{sc}(\theta)$, a quantidade transacionada de cada carteira é maior na presença de coordenação, $q_\theta^* > q_\theta^{*sc}$. Sob a mesma condição, a variação de preço de cada carteira θ é maior.

Como é verdade que tanto as quantidades q_t^* e q_t^{*sc} como as distribuições $\phi(\theta)$ e $\phi^{sc}(\theta)$ são distintas entre si, a quantidade total vendida de cada carteira θ, havendo ou não coordenação, é determinada pela interação dos dois efeitos identificados acima. Para todas as carteiras $\theta \in [\underline{\theta}, \overline{\theta}]$, tanto o primeiro quanto o segundo efeitos levam a um incremento da quantidade comercializada q_θ. Já nas carteiras $\theta \in (-\infty, \underline{\theta}) U (\overline{\theta}, \infty)$, os efeitos agem em direções opostas: enquanto o primeiro faz com que diminua a quantidade dessas carteiras compradas pelos fundos, o segundo leva a seu aumento.

Se se define a variação de preço total das carteiras decorrente de movimentos de demanda como a soma das variações de preço de cada carteira decorrentes desse motivo, chega-se ao seguinte resultado.

Proposição 2.9: a variação de preço total decorrente da demanda dos fundos de investimento é maior quando há coordenação.

Enquanto em boa parte das carteiras os dois efeitos têm as mesmas conseqüências – o aumento da variação de preços –, existem algumas carteiras tais que os efeitos agem em sentidos opostos. Apesar dessa aparente ambigüidade de resultados, a última proposição deste capítulo demonstra que o efeito médio do aumento da coordenação sobre a variabilidade das carteiras é positivo.