

3

Corpos articulados

As deformações produzidas pelo método de Harmônicos em Variedade, contudo, não necessariamente correspondem a movimentos naturais do modelo: por exemplo as animações não preservam volume. Neste capítulo, introduzimos conceitos básicos de corpos articulados, que serão usados em capítulos posteriores na construção de um método apto a produzir deformações compatíveis com os movimentos esperados dos modelos.

3.1

Corpos rígidos

Um *corpo rígido* consiste em uma coleção de partículas tais que a distância entre duas permanece constante independente de quaisquer movimento do corpo ou força externa exercida nele.

A análise da configuração espacial do corpo é feita a partir de um sistema de coordenadas S_b , referenciado ao centro de massa do corpo b . A este sistema de coordenadas chamamos *referencial do corpo*. Dado um sistema de coordenadas global, chamado de *referencial inercial* S_o , a posição do corpo é definida pelo vetor posição da origem do referencial inercial S_o à origem de S_b . De forma análoga, a orientação do corpo consiste na rotação relativa ao referencial inercial S_o . Esta configuração está ilustrada na Figura 3.1.

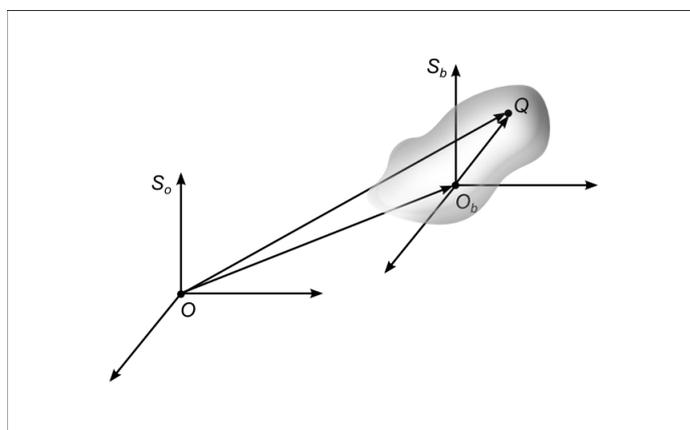


Figura 3.1: Referencial local S_b e referencial global S_o .

O movimento livre de um corpo rígido possui três componentes translacionais (x, y, z) e mais três componentes rotacionais $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$, que definem sua orientação. Para simplificar, usaremos uma única representação vetorial para definir ambas: posição e orientação do corpo rígido. Chamaremos esta representação de *posição generalizada do corpo rígido*, $\hat{\mathbf{p}}$.

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (3-1)$$

O corpo rígido possui uma massa m e uma matriz de *momentos de inércia* associada, \mathbf{J} . Faremos a seguir uma exposição sucinta das propriedades que usaremos do momento de inércia, mais pode ser encontrado nos livros de Beer (6) e Featherstone (9). Ambas, massa e momento de inércia, são grandezas aditivas. Usamos este fato para simplificar o cálculo do momento de inércia, sintetizando o corpo rígido a partir de uma coleção de subcorpos (mais simples) que o constituem. Dado um referencial e um eixo de rotação que passa pela origem deste referencial (e é arbitrário em qualquer outro aspecto), a matriz de momento de inércia do corpo rígido é definida como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{xy} & J_{zz} \end{bmatrix}, \quad (3-2)$$

onde (quando $N \rightarrow \infty$ as somas viram integrais):

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2), & J_{xy} &= - \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k, \\ J_{yy} &= \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + z_k^2), & J_{xz} &= - \sum_{k=1}^N m_k x_k z_k, \\ J_{zz} &= \sum_{k=1}^N m_k (x_k^2 + y_k^2), & J_{yz} &= - \sum_{k=1}^N m_k y_k z_k. \end{aligned} \quad (3-3)$$

A notação J_{ij} , $i, j \in \{x, y, z\}$ representa o momento de inércia sobre o eixo j , enquanto o corpo gira em torno do eixo i . Os escalares J_{ij} , $i \neq j$, são chamados de *produtos de inércia*. Como a matriz de momento de inércia é real e simétrica, então, fixado O_b como origem, pode-se determinar um sistema de coordenadas para qual a matriz momento de inércia será diagonal, isto é, os produtos de inércia são iguais a zero. Os eixos deste sistema de coordenadas são chamados de *eixos principais de inércia* e os elementos da diagonal são chamados de *momentos principais de inércia*.

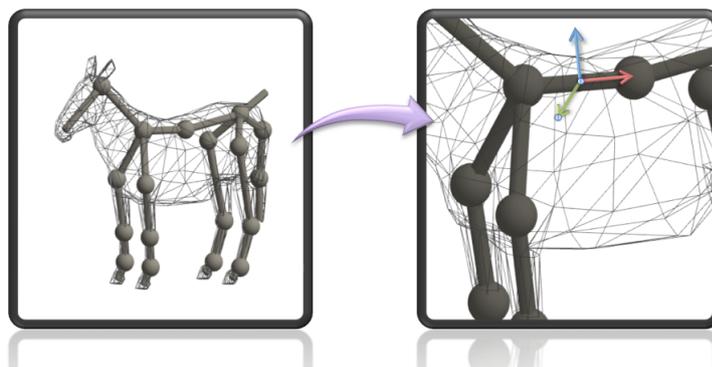


Figura 3.2: Sistemas de coordenadas alinhado aos eixos de simetria de uma barra cilíndrica.

Caso o objeto apresente alguma simetria, os eixos de inércia estão sempre alinhados com os eixos de simetria do objeto (6), (26). Portanto, para simplificar os cálculos e obter a matriz de inércia, usualmente os eixos do referencial do corpo são alinhados com os eixos principais de inércia.

Os corpos rígidos neste trabalho são modelados por barras cilíndricas, e desta forma, podemos tomar um eixo do sistema de coordenadas local como a geratriz do cilindro, veja a figura 3.2.

3.2

Juntas elásticas

Pares de corpos rígidos de um sistema multicorpos podem ser articulados por meio de elementos mecânicos que chamamos de *juntas*. Esses elementos definem o movimento relativo dos corpos, podendo eventualmente reduzir o grau de liberdade do movimento. A figura 3.3 exibe um exemplo de movimento permitido para um modelo de mão.

Por vezes, as juntas são modeladas como molas, formando um sistema massa-mola amortecido com restrições, possuindo uma constante de rigidez e uma constante de amortecimento. Neste trabalho adotamos este tipo de juntas e as denominamos de *juntas elásticas*.



Figura 3.3: Movimento dos corpos de um modelo de mão.

3.2.1

Referencial da junta

Assim como aos corpos rígidos, atribuímos um sistema de coordenadas locais ao centroide das juntas virtuais. Fixamos nossa atenção em juntas que conectam pares de corpos rígidos cilíndricos. Definimos a posição do centroide de uma junta que conecta um par de corpos cilíndricos como o ponto de intersecção das geratrizes de cada corpo. Ainda, definimos um sistema de coordenadas sobre a tal junta escolhendo: primeiro, um vetor unitário sobre uma das duas geratrizes (esta escolha é arbitrária); segundo, o vetor unitário que resulta do produto vetorial das duas geratrizes e, por fim, tomando o produto vetorial dos dois vetores unitários obtidos anteriormente. Um exemplo desta construção está ilustrado na figura 3.4.

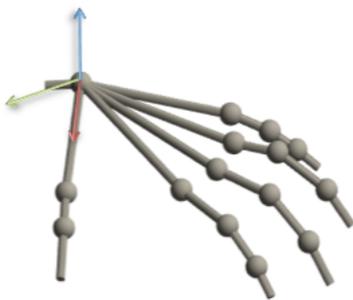


Figura 3.4: Exemplo de sistema de coordenadas numa junta.

3.2.2

Restrição de movimentos

As juntas restringem os movimentos admissíveis dos corpos a elas conectados. O tipo de movimento permitido pela restrição depende do tipo da junta.

Relatamos abaixo algumas das principais juntas da literatura, citamos o livro do Shabana (26) para mais informações. Para elas adote as seguintes notações: \vec{h}_i é um vetor desenhado no corpo b_i ao longo do eixo da junta, analogamente para \vec{h}_j ; \vec{s}_{ij} corresponde o vetor definido pelos pontos P_i e P_j nos corpos b_i e b_j , respectivamente; \vec{n}_i e \vec{n}_j são dois vetores perpendiculares entre si saindo dos corpos b_i e b_j , respectivamente; finalmente, \vec{r}_i e \vec{r}_j são vetores tridimensionais que representam as posições dos pontos P_i e P_j nos respectivos referenciais dos corpos.

- **Junta de Revolução:** É uma junta de um grau de liberdade. Ela restringe as três componentes translacionais, e duas rotacionais, permitindo que os corpos rotacionem apenas em torno da normal do plano que os contém. Está ilustrada na figura 3.5.

As restrições que a caracteriza são

$$\begin{aligned} \vec{h}_i \times \vec{h}_j &= 0, \\ \vec{h}_i \times \vec{s}_{ij} &= 0, \\ \vec{s}_{ij}^T \cdot \vec{s}_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

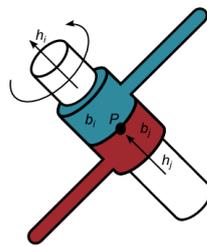


Figura 3.5: Junta de Revolução: corpo b_i em verde, corpo b_j em bordô, e a junta em branco.

- **Junta Prismática:** Também é uma junta com um único grau de liberdade. Porém, neste caso o único movimento permitido é a translação ao longo do eixo da junta, veja na figura 3.6. As restrições cinemáticas impostas são:

$$\begin{aligned} \vec{h}_i \times \vec{h}_j &= 0, \\ \vec{h}_i \times \vec{s}_{ij} &= 0, \\ \vec{n}_i^T \cdot \vec{n}_j &= 0. \end{aligned}$$

Esta última restrição impõe que \vec{n}_i e \vec{n}_j permaneçam perpendiculares durante o movimento.

- **Junta Cilíndrica:**

A junta cilíndrica possui dois graus de liberdade. Ela permite uma translação e uma rotação relativa entre os corpos sempre ao longo do eixo da junta, restringindo dois graus de liberdade de translação e dois de rotação. Está ilustrada na figura 3.7.

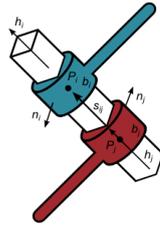


Figura 3.6: Junta Prismática: corpo b_i em verde, corpo b_j em bordô, e a junta em branco.

Podemos descrevê-la a partir das equações cinemáticas:

$$\begin{aligned} \vec{h}_i \times \vec{h}_j &= 0, \\ \vec{h}_i \times \vec{s}_{ij} &= 0. \end{aligned}$$

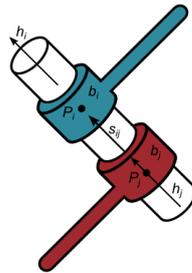


Figura 3.7: Junta Cilíndrica: corpo b_i em verde, corpo b_j em bordô, e a junta em branco.

- **Junta Esférica:**

Como o nome já dá a entender, a junta deixa livre as rotações nas três direções e restringe todas as translações relativas. Desta forma, a junta esférica tem três graus de liberdade, veja a figura 3.8. As restrições cinemáticas desta junta podem ser estabelecidas como:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_j.$$

3.2.3 Matrizes de restrição

Podemos reescrever matricialmente as equações de restrição impostas pelas juntas, e para isto, usamos matrizes que chamaremos de *matrizes de restrição de movimento* das juntas, Γ^m . Estas matrizes de restrição são

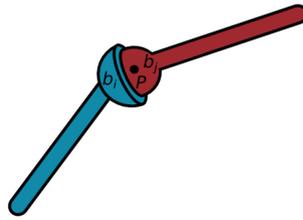


Figura 3.8: Junta Esférica: corpo b_i em verde, corpo b_j em bordô, e a junta consiste em uma esfera na interseção dos dois corpos.

aplicadas às posições generalizadas dos corpos para se obter as coordenadas restritas (ou seja, aquelas direções que não são permitidas pelas restrições) de cada corpo nestas juntas, anulando as direções livres. Este comportamento está ilustrado na figura 3.9: note que o ponto P é comum aos dois corpos.

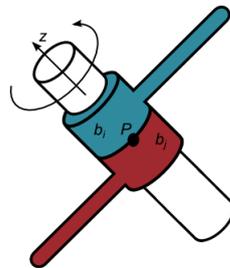


Figura 3.9: Junta de revolução permitindo rotação apenas no eixo \bar{z} .

Para exemplificar o uso de tais matrizes considere na ilustração 3.9 uma junta de revolução entre dois corpos b_i e b_j . Observe que o único movimento permitido é a rotação em torno do eixo z , e as demais são tais que a posição do ponto P de ambos os corpos sejam iguais nas coordenadas do referencial inercial. Isto é, se denotamos P_i^o como o ponto P do corpo b_i em coordenadas do referencial S_o , e analogamente para P_j^o , temos:

$$P_i^o = P_j^o.$$

Então, sejam P_i e P_j as coordenadas de P nos referenciais do corpo b_i e b_j respectivamente. E seja $\chi_{b_i}^o : S_i \rightarrow S_o$ uma transformação que vai do referencial de b_i para o referencial inercial S_o , então:

$$\begin{aligned} \chi_i^o(P_i) &= \chi_j^o(P_j) \\ P_i^o &= P_j^o. \end{aligned} \tag{3-4}$$

Além disso, como o único movimento permitido é rotacionar ao redor do eixo z , o movimento se restringe ao plano xy , deixando claro que os ângulos de rotação em torno do eixo x e do eixo y também devem ser iguais.

$$\theta_{x_i} = \theta_{x_j}, \theta_{y_i} = \theta_{y_j}. \quad (3-5)$$

Isto é, se $\hat{p}_k(P)$, $k \in i, j$ corresponde as coordenadas generalizadas da posição do ponto P no referencial do osso b_k , pedimos que:

$$\Gamma^m \hat{p}_i(P) = \Gamma^m \hat{p}_j(P)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \\ x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x_j} \\ \theta_{y_j} \\ \theta_{z_j} \\ x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ 0 \\ x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{x_j} \\ \theta_{y_j} \\ 0 \\ x_j \\ y_j \\ z_j \end{bmatrix}.$$

A tabela 3.1 descreve exemplos destas matrizes de restrição Γ^m . Nela, usamos a notação nr para denotar o número de restrições (impostas por cada junta).

Um dos passos básicos da dinâmica e da análise cinemática de sistemas mecânicos consiste em determinar o número de graus de liberdade, ou coordenadas independentes, necessários para descrever o sistema. Lembrando que o movimento livre de um corpo possui 6 graus de liberdade, e se temos n_b corpos, o número total de grau de liberdade do sistema n_t é dado por:

$$n_t = 6 * n_b - \sum_i^{n_j} nr_i \quad (3-7)$$

onde nr_i é o número de restrições impostas pela junta i , $i = 1..n_j$, e n_j corresponde ao número de juntas do sistema.

Junta	Matriz	Junta	Matriz
Revolução ($nr = 5$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Prismática ($nr = 5$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
Esférica ($nr = 3$)	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Cilíndrica ($nr = 4$)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Tabela 3.1: Exemplos de matrizes de restrição. As linhas nulas correspondem as componentes sem restrição.

3.3 Forças

Dado um ponto arbitrário O , a força mais geral que pode agir em um corpo rígido consiste de uma força linear \mathbf{f} e um torque τ sobre O , veja ilustração na figura 3.10. Conhecido estes fatos, é possível determinar o torque sobre qualquer outro ponto P no espaço através da seguinte equação:

$$\tau_P = \tau_O + \mathbf{f} \times \overrightarrow{OP}. \tag{3-8}$$

3.3.1 Momento Linear e Angular

O *momento linear* \mathbf{p} de um corpo rígido, é definido pela soma do produto entre a massa m_i e a velocidade \vec{v}_i de cada partícula i do corpo, isto é:

$$\mathbf{p} = \sum_i^n m_i \vec{v}_i \tag{3-9}$$

$$= m\vec{v}. \tag{3-10}$$

Considere agora um corpo rígido com massa m , velocidade angular ω e com o centro de massa em C . Sejam P um ponto arbitrário e \vec{r}_P o vetor posição do ponto P até um i -ésimo ponto do corpo com massa m_i e velocidade \vec{v}_i , como na figura 3.11. O *momento angular*, \mathbf{L} , em relação ao ponto arbitrário P é definido por:

$$(\mathbf{L}_P)_i = \vec{r}_P \times m_i \vec{v}_i. \tag{3-11}$$

Podemos relacionar a velocidade do i -ésimo corpo com a velocidade no ponto P , usando a velocidade angular ω (3-12):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_P + \omega \times \vec{r}_P \tag{3-12}$$

e daí:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_P)_i &= \vec{r}_P \times (m_i(\vec{v}_P + \omega \times \vec{r}_P)) \\ &= \vec{r}_P \times (m_i \vec{v}_P) + \vec{r}_P \times (m_i(\omega \times \vec{r}_P)). \end{aligned}$$

Integrando no sólido todo, teremos

$$\mathbf{L}_P = \left(\int_m \vec{r}_P dm \right) \times \vec{v}_P + \int_m \vec{r}_P \times (\omega \times \vec{r}_P) dm. \tag{3-13}$$

Ora, se o momento é calculado nos seguintes pontos:

Ponto Fixo O. A velocidade em O é nula, $\vec{v}_O = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \left(\int_m \vec{r}_O dm \right) \times \vec{v}_O + \int_m \vec{r}_O \times (\omega \times \vec{r}_O) dm \\ &= \int_m \vec{r}_O \times (\omega \times \vec{r}_O) dm. \end{aligned}$$

Centro de Massa C. O termo $\left(\int_m \vec{r}_C dm \right)$ se anula.

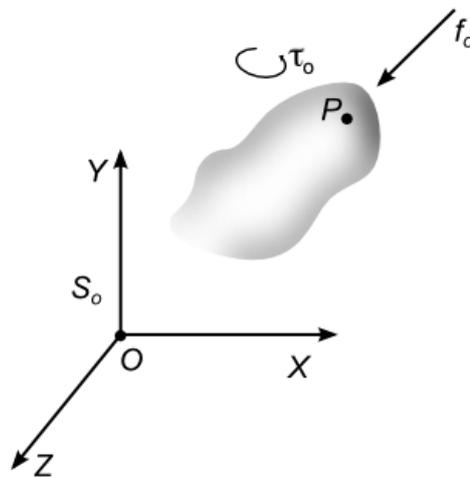


Figura 3.10: Torque e força aplicados em um ponto P de um corpo.

$$\mathbf{L}_C = \int_m \vec{r}_C \times (\omega \times \vec{r}_C) dm. \quad (3-14)$$

Em pontos arbitrários temos a equação (3-13) que pode ser simplificada da seguinte forma:

$$\mathbf{L}_P = \vec{r}_P^C \times (m\vec{v}_C) + \mathbf{L}_C. \quad (3-15)$$

Esta equação nos diz que o momento angular sobre um ponto arbitrário P consiste na soma da quantidade de movimento $m\vec{v}_C$ em relação ao ponto P com o momento angular sobre o centro de massa C , \mathbf{L}_C .

Para um corpo de massa m rotacionando sobre um eixo de simetria, o momento angular pode ser relacionado com a matriz de inércia \mathbf{J} e a velocidade angular ω do corpo:

$$\mathbf{L}_P = \mathbf{J}\omega. \quad (3-16)$$

3.3.2 Força e Torque

Pela lei de Newton,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \\ &= \sum_i m_i \vec{a}_i = m\vec{a}. \end{aligned} \quad (3-17)$$

O torque τ é definido pelo produto vetorial entre a força resultante \mathbf{f} em uma partícula e o vetor posição \vec{r} da mesma em relação ao eixo de rotação. O

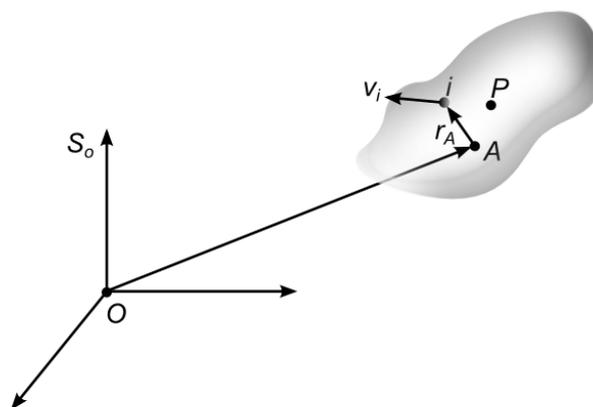


Figura 3.11: O vetor posição do ponto P até um i -ésimo ponto do corpo com massa m_i e velocidade \vec{v}_i .

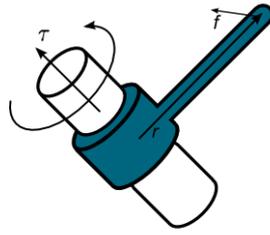


Figura 3.12: Torque τ produzido por uma junta de revolução.

torque exercido por um corpo sobre uma junta de revolução está ilustrado na figura 3.12.

$$\tau = \vec{r} \times \mathbf{f}. \tag{3-18}$$

Podemos definir o torque também como a variação do momento angular sobre um eixo de rotação. Para verificar a equivalência entre as duas definições basta calcular:

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times (m\vec{v}))}{dt} \tag{3-19}$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \tag{3-20}$$

$$= \vec{r} \times \left(m \frac{d(\vec{v})}{dt} \right) = \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \mathbf{f}. \tag{3-21}$$

Análogo a posição generalizada (3-1), podemos definir um único vetor para representar a *força generalizada de um corpo rígido*, $\hat{\mathbf{f}}$, contendo ambos componentes, linear \mathbf{f} e angular τ .

$$\hat{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \\ f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}, \tag{3-22}$$

Usando o mesmo procedimento acima para a equação do momento angular em um ponto arbitrário, confira a equação (3-15), conseguimos a equação (3-8) definida no início desta seção.

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}_A}{dt} = \frac{d(\vec{r}_A^C \times (m\vec{v}_C) + \mathbf{L}_C)}{dt} \quad (3-23)$$

$$= \frac{d\vec{r}_A^C}{dt} \times (m\vec{v}_C) + \vec{r}_A^C \times \left(m \frac{d\vec{v}_C}{dt} \right) + \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} \quad (3-24)$$

$$= \vec{r}_A^C \times \left(m \frac{d\vec{v}_C}{dt} \right) + \frac{d\mathbf{L}_C}{dt} \quad (3-25)$$

$$= \vec{r}_A^C \times \mathbf{f}_C + \dot{\mathbf{L}}_C \quad (3-26)$$

$$= \vec{r}_A^C \times \mathbf{f}_C + \tau_C. \quad (3-27)$$

3.4

Movimentos do corpo rígido

Dado um objeto descrito por um subconjunto $O \subset \mathbb{R}^3$, um *movimento rígido* é definido pela família de funções $(\tilde{\chi}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, $\tilde{\chi}_t : O \rightarrow \mathbb{R}^3$, que descreve como os pontos pertencentes ao objeto se movem como uma função do tempo t . Cada função deve satisfazer as propriedades de transformação de corpo rígido.

Definição 1 (Transformação de Corpo Rígido) Uma função $\chi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação de corpo rígido se satisfaz as seguintes propriedades:

- Comprimento preservado:

$$\|\chi(P) - \chi(Q)\| = \|P - Q\|, \forall P, Q \in \mathbb{R}^3.$$

- Produto vetorial preservado:

$$\chi_*(\vec{v} \times \vec{w}) = \chi_*(\vec{v}) \times \chi_*(\vec{w}), \forall \text{ vetores } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3.$$

onde χ_* é tal que se $\vec{v} = B - A$, com pontos $A, B \in \mathbb{R}^3$, então $\chi_*(\vec{v}) = \chi(B) - \chi(A)$.

No espaço, uma transformação de corpo rígido pode ser decomposta em uma rotação e uma translação, veja para maiores detalhes o livro de Featherstone(9). Tal transformação pode ser caracterizada também como uma mudança de um referencial.

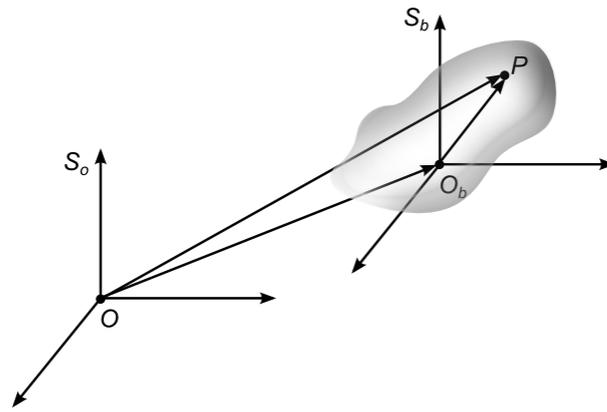


Figura 3.13: Relação de um ponto Q no referencial S_b ao referencial S_o .

3.4.1 Transformação de pontos

Sejam S_o o referencial inercial e S_b o referencial do corpo. Dado um ponto Q pertencente ao corpo rígido, iremos denotar por Q_o suas coordenadas relativas ao referencial inercial, e Q_b suas coordenadas relativas ao referencial do corpo, como na figura 3.13.

Podemos relacionar Q_o a Q_b , através da transformação de coordenadas $\chi : S_o \leftrightarrow S_b$:

$$Q_o = \chi(Q_b) = O_b + \Omega_b^o(Q_b), \tag{3-28}$$

onde O_b é o vetor posição da origem do referencial do corpo relativo ao referencial S_o , e Ω_b^o é o operador linear (matriz de rotação) que leva o referencial S_b no referencial S_o .

A transformação dada pela equação (3-28) é uma transformação linear no espaço afim, então, podemos reescrevê-la usando notação matricial em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} Q_o \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_b^o & O_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_b \\ 1 \end{bmatrix} = \chi(Q_b). \tag{3-29}$$

3.4.2 Transformações de velocidades

Dado o mesmo corpo rígido, com os mesmos referenciais da seção 3.4.1, vimos que a posição de um ponto Q relativa ao referencial inercial S_o pode ser dada por:

$$Q_o = O_b + \Omega_b^o(Q_b). \tag{3-30}$$

Podemos obter a velocidade do corpo rígido no mesmo ponto Q , simplesmente derivando esta equação em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_o}{dt} &= \frac{dO_b}{dt} + \frac{d(\Omega_b^o(Q_b))}{dt} \\ &= \frac{dO_b}{dt} + \frac{d\Omega_b^o}{dt}(Q_b) + \Omega_b^o\left(\frac{dQ_b}{dt}\right) \\ &= \frac{dO_b}{dt} + \frac{d\Omega_b^o}{dt}(Q_b), \end{aligned} \tag{3-31}$$

note que Ω_b^o opera sobre Q_b como um produto matriz-vetor.

Por Q_b pertencer a um corpo rígido, temos que sua posição é constante em S_b , e portanto $\frac{dQ_b}{dt} = 0$. O lema a seguir esclarece como se comporta a derivada de Ω em relação ao tempo.

Lema 1 Dada $\Omega(t) \in SO(3)$, as matrizes $\dot{\Omega}\Omega^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ e $\Omega^T\dot{\Omega} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ são anti-simétricas. Daí, $\exists \omega \in \mathbb{R}^3$ tal que $\dot{\Omega}\Omega^T(v) = \omega \times v, \forall v \in \mathbb{R}^3$.

Prova. Ora, como Ω é uma matriz de rotação, e portanto ortogonal, temos que:

$$\Omega^T\Omega = \mathbf{I}_{3 \times 3}.$$

Diferenciando a igualdade acima em relação a t , temos

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}^T\Omega + \Omega^T\dot{\Omega} &= 0 \\ \dot{\Omega}^T\Omega &= -\Omega^T\dot{\Omega} = -(\dot{\Omega}^T\Omega)^T. \end{aligned} \tag{3-32}$$

Similarmente, com $\Omega\Omega^T = \mathbf{I}_{3 \times 3}$ obtemos $(\Omega^T\dot{\Omega}) = -(\dot{\Omega}^T\Omega)^T$. Como o conjunto dos operadores anti-simétricos do \mathbb{R}^3 tem dimensão 3, o lema 1 permite associar a matriz $\dot{\Omega}\Omega^T$ um vetor $\omega \in \mathbb{R}^3$ que nos será chamado de *tensor velocidade angular*. Este tensor atua como o operador $\omega \times$:

$$\dot{\Omega}\Omega^T = \omega \times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{3-33}$$

de tal forma que:

$$\dot{\Omega}\Omega^T(Q_o) = \omega \times Q_o. \tag{3-34}$$

■

Defina o operador \vee como:

$$\begin{aligned} \vee : \mathbb{R}^{3 \times 3} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \omega \times &\longrightarrow \omega. \end{aligned} \tag{3-35}$$

Logo,

$$\left(\dot{\Omega}\Omega^T\right)^\vee = \omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T. \tag{3-36}$$

Assim, concluindo a equação (3-31), temos a velocidade no ponto Q relativa ao referencial inercial é dada em função da velocidade :

$$\dot{Q}_o = \dot{O}_b + \omega_b^o \times Q_o. \tag{3-37}$$

3.4.3 Velocidade generalizada

Definimos então a *velocidade generalizada espacial* de um corpo b relativo ao referencial inercial S_o como o vetor \hat{v}_b^o

$$\hat{v}_b^o = \begin{bmatrix} \omega_b^o \\ \dot{O}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_b^o \\ v_b^o \end{bmatrix}. \tag{3-38}$$

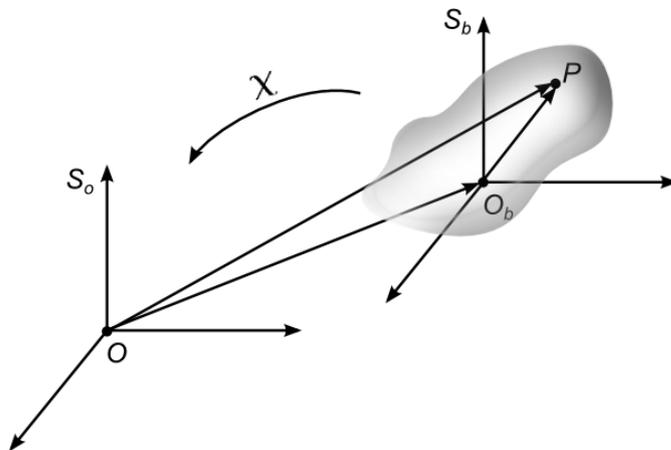


Figura 3.14: O movimento realizado pelo referencial do corpo S_b relativo ao referencial inercial S_o .

Sejam S_o um referencial inercial, e S_b o referencial de um corpo rígido, veja a figura 3.14. Assuma que $\chi_b^o : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ seja o movimento realizado pelo referencial do corpo relativo ao referencial inercial. Então, como foi visto na seção 3.4.1 a posição do ponto Q em relação ao referencial inercial pode ser dada por:

$$\begin{bmatrix} Q_o \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_b^o & O_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_b \\ 1 \end{bmatrix} = \chi_b^o(Q_b). \quad (3-39)$$

$$Q_o = \chi_b^o(Q_b).$$

Podemos obter a expressão matricial da velocidade no ponto Q , diferenciando a relação acima:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_o}{dt} &= \frac{d\chi_b^o}{dt}(Q_b) \\ &= \dot{\chi}_b^o(\chi_b^{o-1}(Q_o)) \\ &= \dot{\chi}_b^o(\chi_b^o)^{-1}(Q_o). \end{aligned} \quad (3-40)$$

onde $(\chi_b^o)^{-1} = \chi_b^b$, porém, preferimos manter a notação com o expoente do corpo em movimento sempre que for possível.

A inversa de χ é dada por:

$$(\chi_b^o)^{-1} = \begin{bmatrix} (\Omega_b^o)^T & -(\Omega_b^o)^T O_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3-41)$$

e a derivada $\dot{\chi}$ por:

$$\dot{\chi}_b^o = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_b^o & \dot{O}_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3-42)$$

Então:

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_b^o(\chi_b^o)^{-1} &= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_b^o & \dot{O}_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Omega_b^o)^T & -(\Omega_b^o)^T O_b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_b^o(\Omega_b^o)^T & -\dot{\Omega}_b^o(\Omega_b^o)^T O_b + \dot{O}_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3-43)$$

Usando o lema 1, conseguimos obter a equação da velocidade v_{Q_o} em Q_o em relação ao referencial inercial,

$$\begin{aligned} v_{Q_o} &= \dot{\chi}_b^o(\chi_b^o)^{-1}Q_o \\ &= \omega_b^o \times Q_o + \dot{O}_b. \end{aligned} \quad (3-44)$$

A velocidade generalizada $\hat{\mathbf{v}}_b^o = [\omega_b^o, v_b^o]^T$, então pode ser dada como

$$\hat{\mathbf{v}}_b^o = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_b^o(\Omega_b^o)^T \\ -\dot{\Omega}_b^o(\Omega_b^o)^T O_b + \dot{O}_b \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

que consiste na linha não-nula da matriz:

$$\tilde{\mathbf{v}}_b^o = \begin{bmatrix} \dot{\Omega}_b^o(\Omega_b^o)^T & -\dot{\Omega}_b^o(\Omega_b^o)^T O_b + \dot{O}_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

3.4.4 Aceleração

Diferenciando em relação ao tempo a equação da velocidade (3-31), e novamente lembrando que $\dot{Q}_b = 0$, temos:

$$\begin{aligned}\ddot{Q}_o &= \ddot{O}_b + \dot{\Omega}_b^o(\dot{Q}_b) + \ddot{\Omega}_b(Q_b) \\ &= \ddot{O}_b + \ddot{\Omega}_b^o(Q_b).\end{aligned}\tag{3-47}$$

Iremos usar $\Omega_b^o = \Omega$ exclusivamente nesta subseção por clareza de notação. Como consequência do lema 1 se tem que

$$\dot{\Omega}\Omega^T = \omega_b^o \times,\tag{3-48}$$

e como Ω é ortogonal, podemos escrever

$$\dot{\Omega} = \omega_b^o \times \Omega.\tag{3-49}$$

Derivando a relação acima em relação ao tempo, obtemos:

$$\begin{aligned}\ddot{\Omega} &= \dot{\omega}_b^o \times \Omega + \omega_b^o \times \dot{\Omega} \\ &= \dot{\omega}_b^o \times \Omega + \omega_b^o \times (\omega_b^o \times \Omega).\end{aligned}\tag{3-50}$$

Denotando a matriz anti-simétrica da *aceleração angular* por $\dot{\omega}_b^o \times = \alpha_b^o \times$, conseguimos a equação matricial para a aceleração no referencial inercial S_o .

$$\ddot{Q}_o = \ddot{O}_b + \alpha_b^o \times \Omega Q_b + \omega_b^o \times (\omega_b^o \times \Omega(Q_b)).\tag{3-51}$$

A equação acima ainda pode ser escrita na notação de produto vetorial como:

$$\ddot{Q}_o = \ddot{O}_b + \alpha_b^o \times Q_b^o + \omega_b^o \times (\omega_b^o \times Q_b^o).\tag{3-52}$$

Chamamos a parcela $\alpha_b^o \times Q_b^o$ de *componente tangencial* e a parcela $\omega_b^o \times (\omega_b^o \times Q_b^o)$ de *componente normal* da aceleração.

3.5 Formulação matricial com matrizes adjuntas

Analogamente à seção 3.4.3, definimos a *velocidade generalizada do corpo* b em seu próprio referencial $\hat{\mathbf{v}}_b^b = [\omega_b^b, v_b^b]^T$ como:

$$\hat{\mathbf{v}}_b^b = \begin{bmatrix} (\Omega_b^o)^T \dot{\Omega}_b^o \\ ((\Omega_b^o)^T \dot{O}_b)^\vee \end{bmatrix}\tag{3-53}$$

que novamente corresponde a linha não-nula da matriz,

$$\bar{\mathbf{v}}_b^o = \begin{bmatrix} (\Omega_b^o)^T \dot{\Omega}_b^o & (\Omega_b^o)^T \dot{O}_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3-54)$$

Podemos relacionar as velocidades generalizadas $\hat{\mathbf{v}}_b^o = [\omega_b^o, v_b^o]^T$ e $\hat{\mathbf{v}}_b^b = [\omega_b^b, v_b^b]^T$ por uma simples transformação. Note que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_b^o &= \dot{\chi}_b^o (\chi_b^o)^{-1} \\ &= (\chi_b^o (\chi_b^o)^{-1}) \dot{\chi}_b^o (\chi_b^o)^{-1} \\ &= \chi_b^o \bar{\mathbf{v}}_b^b (\chi_b^o)^{-1}. \end{aligned} \quad (3-55)$$

Então, da equação (3-45) e do fato que $\dot{\Omega}_b^o (\Omega_b^o)^T = \omega_b^o \times$ podemos reescrever

$$\omega_b^o = \Omega_b^o \omega_b^b \quad (3-56)$$

$$v_b^o = -\omega_b^o \times O_b + \dot{O}_b = O_b \times \Omega_b^o \omega_b^b + \Omega_b^o v_b^b. \quad (3-57)$$

Ou com a notação matricial,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_b^o &= \begin{bmatrix} \Omega_b^o & 0 \\ O_b \times \Omega_b^o & \Omega_b^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_b^b \\ v_b^b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Omega_b^o & 0 \\ O_b \times \Omega_b^o & \Omega_b^o \end{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_b^b. \end{aligned} \quad (3-58)$$

A esta matriz 6×6 que transforma as velocidades de um referencial a outro denominamos de *transformação adjunta* associada a χ , \mathbf{Ad}_χ .

Definição 2 (Transformação Adjunta) Dada a mudança de coordenadas χ ,

$$\chi = \begin{bmatrix} \Omega & O \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3-59)$$

a transformação adjunta associada a χ é dada por

$$\mathbf{Ad}_\chi = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ O \times \Omega & \Omega \end{bmatrix}. \quad (3-60)$$

Esta transformação é invertível, e sua inversa é dada por:

$$\mathbf{Ad}_\chi^{-1} = \begin{bmatrix} \Omega^T & 0 \\ -\Omega^T O \times & \Omega^T \end{bmatrix}. \quad (3-61)$$

Portanto, a velocidade espacial no referencial inercial é obtida da velocidade espacial no referencial do corpo pela equação.

$$\hat{\mathbf{v}}_o = \mathbf{Ad}_{\chi} \hat{\mathbf{v}}_b. \quad (3-62)$$

3.5.1

Transformações matriciais de velocidades

Considere três referenciais em movimento: S_a , S_b e S_c . Através de composições de transformações, é possível determinar a velocidade do referencial S_c relativo ao referencial S_a , dada as velocidades relativas de S_c a S_b e de S_b a S_a . Iremos usar a notação $\hat{\mathbf{v}}_{ab}^c$ para indicar a velocidade de S_b relativa ao referencial S_a em coordenadas do referencial S_c . (Figura 3.15).

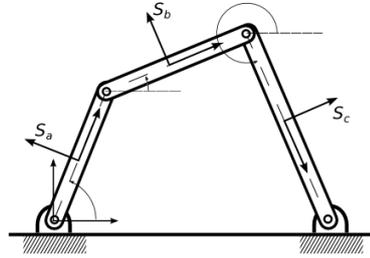


Figura 3.15: Modelo com três corpos conectados e seus referenciais.

Proposição 1 (Transformação de Velocidades Espaciais) *Considere o movimento de três referenciais, S_a , S_b e S_c . Suas velocidades relativas satisfazem a seguinte relação:*

$$\hat{\mathbf{v}}_{ac}^a = \hat{\mathbf{v}}_{ab}^a + \mathbf{Ad}_{\chi_b^a} \hat{\mathbf{v}}_{bc}^a. \quad (3-63)$$

Prova. Podemos definir χ_c^a como a composição das transformações $\chi_c^a = \chi_b^a \chi_c^b$. E por definição, a velocidade relativa do referencial S_c relativa ao S_a descrita no próprio referencial S_a é dada por:

$$\hat{\mathbf{v}}_{ac}^a = \dot{\chi}_c^a (\chi_c^a)^{-1}.$$

Assim, detalhando a equação acima, temos:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_{ac}^a &= (\dot{\chi}_b^a \chi_c^b + \chi_b^a \dot{\chi}_c^b) (\chi_c^b)^{-1} (\chi_b^a)^{-1} \\ &= \dot{\chi}_b^a (\chi_b^a)^{-1} + \chi_b^a \dot{\chi}_c^b (\chi_c^b)^{-1} (\chi_b^a)^{-1} \\ &= \bar{\mathbf{v}}_{ab}^a + \chi_b^a \bar{\mathbf{v}}_{bc}^a (\chi_b^a)^{-1} \\ \hat{\mathbf{v}}_{ac}^a &= \hat{\mathbf{v}}_{ab}^a + \mathbf{Ad}_{\chi_b^a} \hat{\mathbf{v}}_{bc}^a. \end{aligned} \quad (3-64)$$

Proposição 2 (Transformação de Velocidades do Corpo) *Considere o movimento dos três referenciais, S_a , S_b e S_c . Suas velocidades relativas satisfazem a seguinte relação:*

$$\hat{\mathbf{v}}_{ac}^b = \hat{\mathbf{v}}_{ab}^b + \mathbf{Ad}_{(\chi_c^b)^{-1}} \hat{\mathbf{v}}_{bc}^b. \tag{3-65}$$

A prova desta é análoga a da Proposição 1.

Lema 2 (Identidade de Velocidades de Corpos Rígidos) *Para as notações usadas acima, as seguintes relações são válidas:*

- $\hat{\mathbf{v}}_{ab}^b = -\hat{\mathbf{v}}_{ba}^a$;
- $\hat{\mathbf{v}}_{ab}^b = -\mathbf{Ad}_{\chi_b^a} \hat{\mathbf{v}}_{ba}^a$.

3.5.2 Transformações matriciais de forças

Nesta seção descrevemos como é feita a mudança de referencial para vetores de força. Para isso precisamos relembrar alguns conceitos da física clássica como o trabalho gerado por um corpo em movimento. Sejam S_o o referencial inercial, com origem em O , e o vetor $\hat{\mathbf{f}} = [\tau, \mathbf{f}]^T$ em \mathbb{R}^6 , representando a força generalizada aplicada em um corpo rígido. (Figura 3.16).

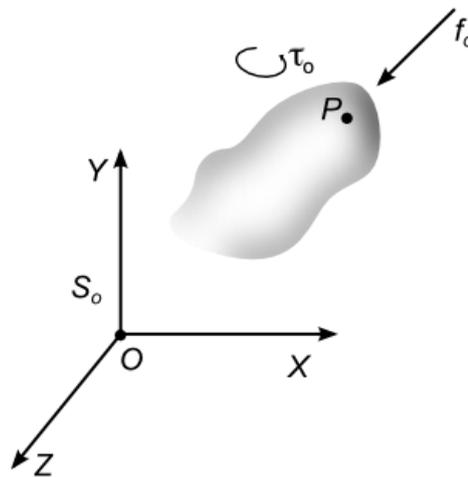


Figura 3.16: Força generalizada $\hat{\mathbf{f}}$ sobre o corpo.

O torque total (3-27) sobre o ponto P no corpo rígido é determinado usando a fórmula abaixo:

$$\tau_P = \tau_O + \mathbf{f} \times \vec{OP}. \tag{3-66}$$

Considere um referencial inercial S_o , e fixe um referencial S_b ao corpo. Suponha que o corpo rígido realize um movimento dado por χ_b^o com uma velocidade linear v e angular ω . Se a força $\hat{\mathbf{f}} = [\tau, \mathbf{f}]^T$ é aplicada à origem de S_b , o trabalho realizado pelo corpo rígido é dado por:

$$\delta W = v \cdot \mathbf{f} + \omega \cdot \tau.$$

Usando as notações de velocidade e força generalizada, podemos reescrever o trabalho como:

$$\delta W = \hat{\mathbf{v}}_{ob}^b \cdot \hat{\mathbf{f}}_b.$$

É válido lembrar que $\hat{\mathbf{v}}_{ob}^b$ consiste na velocidade do corpo relativo ao referencial S_o , em coordenadas do referencial do corpo.

Podemos representar uma dada força $\hat{\mathbf{f}}_b$ em termos de uma força aplicada em outro ponto usando a definição de *forças equivalentes*. Duas forças são ditas equivalentes se elas geram o mesmo trabalho para todo movimento possível do corpo rígido. Elas devem ter a mesma intensidade, a mesma direção e o mesmo sentido, podendo ser aplicadas em outro ponto.

Para obter a força equivalente a uma dada força $\hat{\mathbf{f}}_b$, podemos usar o trabalho obtido pela força enquanto o corpo rígido move-se arbitrariamente.

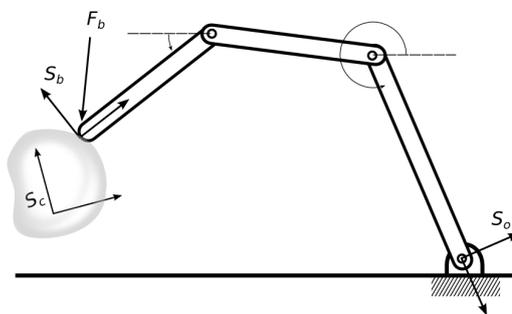


Figura 3.17: Braço mecânico e um corpo: referenciais S_o , S_b pertencentes ao braço e referencial S_c do corpo.

Assuma que S_c seja o referencial do corpo. Faça $\hat{\mathbf{v}}_{oc}^b$ ser a velocidade do corpo relativo a um referencial S_b (figura 3.17). Para determinar a força aplicada na origem do referencial S_c equivalente a força $\hat{\mathbf{f}}_b$, igualamos os trabalhos gerados por ambas

$$\hat{\mathbf{v}}_{oc}^b \cdot \hat{\mathbf{f}}_c = \hat{\mathbf{v}}_{ob}^b \cdot \hat{\mathbf{f}}_b.$$

e daí:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_{oc}^b \cdot \hat{\mathbf{f}}_c &= \hat{\mathbf{v}}_{ob}^b \cdot \hat{\mathbf{f}}_b = (\text{Ad}_{\chi_c^b} \hat{\mathbf{v}}_{oc}^b)^T \hat{\mathbf{f}}_b \\ &= \hat{\mathbf{v}}_{oc}^b \text{Ad}_{\chi_c^b}^T \hat{\mathbf{f}}_b. \end{aligned} \tag{3-67}$$

Como o movimento é arbitrário, esta equação é válida para qualquer $\hat{\mathbf{v}}_{oc}^b$, e assim

$$\hat{\mathbf{f}}_c = \text{Ad}_{\chi_c^b}^T \hat{\mathbf{f}}_b. \tag{3-68}$$

Expandindo a equação (3-68):

$$\begin{bmatrix} \tau_c \\ \mathbf{f}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_{bc}^T & -\Omega_{bc}^T O_{bc} \times \\ 0 & \Omega_{bc}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_b \\ \mathbf{f}_b \end{bmatrix}. \tag{3-69}$$

Interpretando a adjunta $\text{Ad}_{\chi_c^b}^T$ vemos que ela rotaciona os vetores de força e torque do referencial S_b à orientação do referencial S_c , e adiciona um torque dado por $-O_c^b \times \mathbf{f}_b$ que corresponde ao torque gerado ao aplicar uma força \mathbf{f}_b à uma distância $-O_c^b$. Veja a figura 3.18.

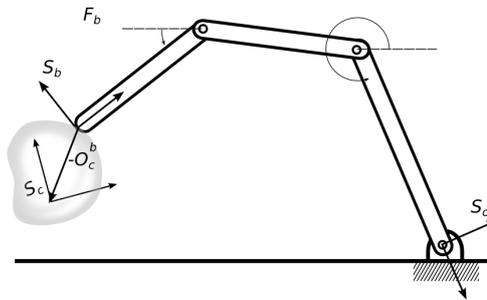


Figura 3.18: Distância das origens do referencial S_c ao referencial S_b , $-O_c^b$.

Denotando por $\hat{\mathbf{f}}_b$ as coordenadas da força relativa ao referencial S_b , a força $\hat{\mathbf{f}}_o$ equivalente a $\hat{\mathbf{f}}$ no referencial S_o , pode ser obtida pela transformação:

$$\hat{\mathbf{f}}_o = \text{Ad}_{\chi_o^b}^T \hat{\mathbf{f}}_b. \tag{3-70}$$

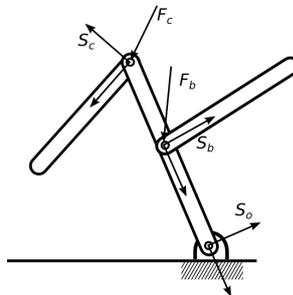


Figura 3.19: Força resultante $\hat{\mathbf{f}}_o$ equivalente ao somatório das forças $\hat{\mathbf{f}}_i$ de cada corpo b_i .

Suponha agora que várias forças sejam aplicadas a um corpo rígido, (figura 3.19). A força resultante será dada pela soma de cada vetor de força no corpo. Porém, para que esta soma tenha sentido, todos os vetores de força precisam estar representados em um único sistema de coordenadas. Portanto, para obter a força resultante no corpo rígido, primeiro deve-se obter a força equivalente para cada força aplicada ao corpo rígido relativa a um único referencial.

$$\hat{\mathbf{f}}_o = \sum_i \mathbf{Ad}_{(\chi_i^o)^{-1}}^T \hat{\mathbf{f}}_i, \quad (3-71)$$

$i \in a, b, c$. Por exemplo, na equação (3-71), a força resultante corresponde a soma das forças equivalentes a $\hat{\mathbf{f}}_a$, $\hat{\mathbf{f}}_b$, e $\hat{\mathbf{f}}_c$ no referencial inercial S_o .

3.5.3

Tabela de transformações

Abaixo resumimos as transformações adjuntas relativas as mudanças de coordenadas como citadas, supondo $\chi : S_b \rightarrow S_a$, onde O e Ω corresponde a posição e orientação do S_b relativo a S_a , respectivamente.

Adjunta para velocidade: do referencial S_b para o S_a .

$$\mathbf{Ad}_\chi = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ O \times \Omega & \Omega \end{bmatrix}. \quad (3-72)$$

Adjunta para velocidade: do referencial S_a para o S_b .

$$\mathbf{Ad}_\chi^{-1} = \begin{bmatrix} \Omega^T & 0 \\ -\Omega^T O \times & \Omega^T \end{bmatrix}. \quad (3-73)$$

Adjunta para força: do referencial S_b para o S_a .

$$\mathbf{Ad}_\chi = \begin{bmatrix} \Omega & O \times \Omega \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}. \quad (3-74)$$

Adjunta para força: do referencial S_a para o S_b .

$$\mathbf{Ad}_\chi^{-1} = \begin{bmatrix} \Omega^T & -\Omega^T O \times \\ 0 & \Omega^T \end{bmatrix}. \quad (3-75)$$

3.6

Análise da dualidade entre velocidades e forças

Nas seções 3.4.3 e 3.3.2, denotamos a velocidade do corpo como o par $\hat{\mathbf{v}} = [\omega, v]^T$ e a força por $\hat{\mathbf{f}} = [\tau, \mathbf{f}]^T$. Ambos os vetores tem 6 dimensões. O conjunto de vetores que geram todas as combinações de \vec{v} e ω é um

espaço vetorial que iremos chamar de *espaço de movimento espacial* M^6 , e analogamente, para a força teremos um *espaço vetorial de força espacial* F^6 , cujos vetores são combinação linear de \mathbf{f} e τ .

Existe uma dualidade expressa diretamente entre os espaços de movimento e de força espacial. Portanto existe um produto interno entre os elementos de cada espaço cujo resultado é o escalar $\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{f}}$, com $\hat{\mathbf{v}} \in M^6$, $\hat{\mathbf{f}} \in F^6$. Este escalar corresponde a *potência* exercida pela força no corpo rígido durante o movimento instantâneo e é denotada por p ,

$$p = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{f}}.$$

Observe que

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{f}} = 0$$

significa que os vetores $\hat{\mathbf{v}}$ e $\hat{\mathbf{f}}$ são ortogonais. Uma interpretação física deste fato é que se uma força aplicada a um corpo rígido é perpendicular ao deslocamento do mesmo, então o trabalho gerado por esta força é nulo, e por sua vez, a potência também será nula.

Como o espaço de movimento é dual ao espaço de forças, ao fazer uma mudança de coordenadas entre espaços de velocidades a dualidade implica em uma transformação de coordenadas também entre espaços de forças. Isto é se X é a matriz de transformação que realiza a mudança de coordenadas entre espaços de velocidade então a matriz de transformação entre os espaços de força X' é dada por:

$$X' = X^{-T}.$$

A esta matriz damos o nome de matriz adjunta, que apresentamos nas seções anteriores. De fato, isso se verifica comparando as equações (3-69) e (3-58).