2.
Equações de movimento da barra

"Controlar os movimentos, tratando de produzir acertos e não erros, é semear o bem futuro, bem que será tanto para si como para o semelhante."

Carlos Bernardo González Pecotche.

2.1.
Aspectos gerais

As estruturas altamente flexíveis, tais como torres autoportantes, colunas e mastros, tubos, chaminés, mastros das torres estaiadas, *risers* usados em estruturas *off-shore*, antenas de satélites, micro e nano vigas, elementos estruturais de estações espaciais e braços robóticos, dentre outros, podem, quando excitados e em virtude do acoplamento flexão-flexão-torção, apresentar vibrações de grande amplitude, inclusive, fora do plano do carregamento, levando a diversos tipos de bifurcações, coexistência de diversas soluções e saltos dinâmicos, o que gera mudanças bruscas no estado de tensões e deformações da estrutura. Para descrever corretamente as características dinâmicas de uma barra nestas condições, as não linearidades inerciais e geométricas decorrentes deste comportamento devem ser consideradas. Para tanto, apresenta-se neste capítulo um conjunto de equações integro-diferenciais, matematicamente consistentes, que governam o movimento dinâmico tridimensional não linear de barras inextensíveis e altamente flexíveis. Este conjunto de equações é obtido aplicando-se o princípio de Hamilton estendido e inclui todos os termos não lineares até terceira ordem, suficientes para contemplar as não linearidades devidas à mudança de curvatura e à inércia da barra, bem como, os acoplamentos entre os movimentos de flexão em duas direções ortogonais e de torção.

2.2.
O sistema dinâmico

Considere-se um elemento unidimensional (barra), inicialmente reto, de seção transversal constante, material elástico-linear e isótropo, de comprimento L

e massa por unidade de comprimento m. Um segmento deformado da barra de comprimento s é mostrado na Figura 2.1.a. Para a dedução das equações de movimento, consideram-se as hipóteses clássicas da teoria de vigas de Euler-Bernouille.

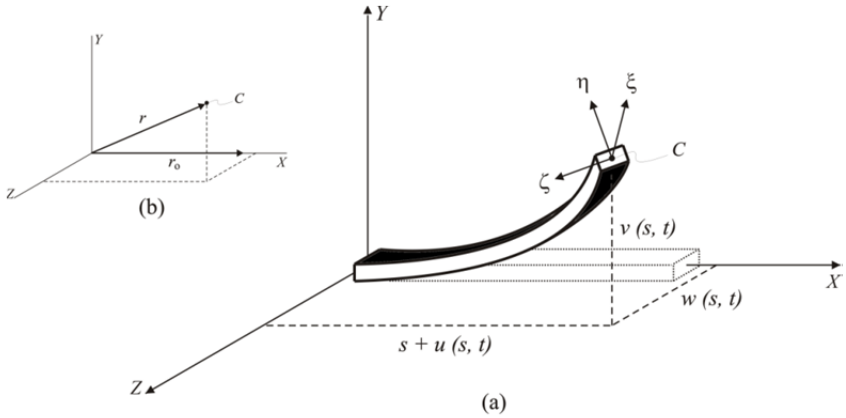


Figura 2.1 – Sistema dinâmico: (a) Referencial adotado; (b) Vetor posição.

Na Figura 2.1, os eixos (X, Y, Z) formam o sistema de referência global, enquanto os eixos (ξ, η, ζ) são os eixos principais da seção transversal arbitrária s. Estando a barra na configuração de equilíbrio indeformada, os eixos ξ e X são coincidentes e os eixos η e ζ são, respectivamente, paralelos aos eixos Y e Z.

Cada seção transversal da barra pode sofrer um deslocamento medido no seu centroide C, bem como uma rotação em torno de C. Em qualquer instante de tempo t, as componentes do vetor de deslocamentos ao longo dos eixos globais X, Y e Z, medido no centroide de uma seção transversal arbitrária, são denominadas, respectivamente, conforme se mostra na Figura 2.1, $u(s,t)$, $v(s,t)$ e $w(s,t)$. A orientação dos eixos principais (ξ, η, ζ) da seção, com relação os eixos materiais (X,Y,Z) é descrita por três ângulos: $\psi(s,t)$, $\theta(s,t)$ e $\phi(s,t)$, os quais são conhecidos por ângulos de Euler.

2.3. Os ângulos de Euler

Os ângulos de Euler são três quantidades independentes entre si, que descrevem no espaço tridimensional, mediante um processo sequencial de três rotações, a mudança do referencial (X,Y,Z) até o referencial (ξ,η,ζ). Partindo da configuração de equilíbrio indeformada, considera-se que os eixos materiais $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ giram em torno do eixo material $\hat{Z}$ de um ângulo $\psi(s,t)$ de forma a atingir a nova posição $(\hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{\zeta}_1)$, tal como se mostra na Figura 2.2.

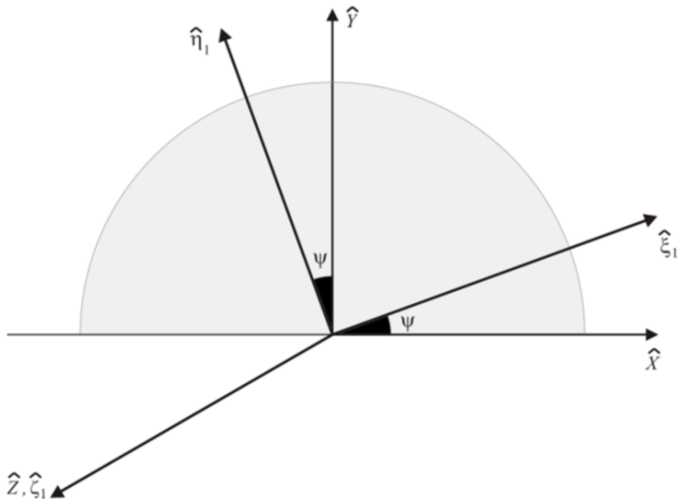


Figura 2.2 – Rotação em torno do eixo $\hat{Z}$ de um ângulo ψ.

Na Figura 2.2, bem como no restante do trabalho, os índices com o sobrescrito $\wedge$ (acento circunflexo) fazem alusão a vetores unitários. Para simplificar a notação, considera-se $\psi(s,t)=\psi$. A relação entre os dois sistemas de eixos é dada, em notação matricial, por

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\eta}_1 \\ \hat{\zeta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Agora, girando-se os eixos $\hat{\xi}_1$ e $\hat{\zeta}_1$ em torno do eixo $\hat{\eta}_1$ de um ângulo $\theta(s,t)$, chegando-se à nova posição $(\hat{\xi}_2, \hat{\eta}_2, \hat{\zeta}_2)$ indicada na Figura 2.3, onde $\theta(s,t)=\theta$. A relação entre os dois sistemas de eixos é dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi}_2 \\ \hat{\eta}_2 \\ \hat{\zeta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\eta}_1 \\ \hat{\zeta}_1 \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Finalmente, tem-se que os eixos $\hat{\eta}_2$ e $\hat{\zeta}_2$ giram em torno do eixo $\hat{\xi}_2$ de um ângulo $\phi(s,t)=\phi$ de forma a se chegar à posição final da seção $(\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{\zeta})$, como se mostra na Figura 2.4. Para esta última rotação a relação entre os dois sistemas de eixos é dada por

$$\begin{bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \\ \hat{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_2 \\ \hat{\eta}_2 \\ \hat{\zeta}_2 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

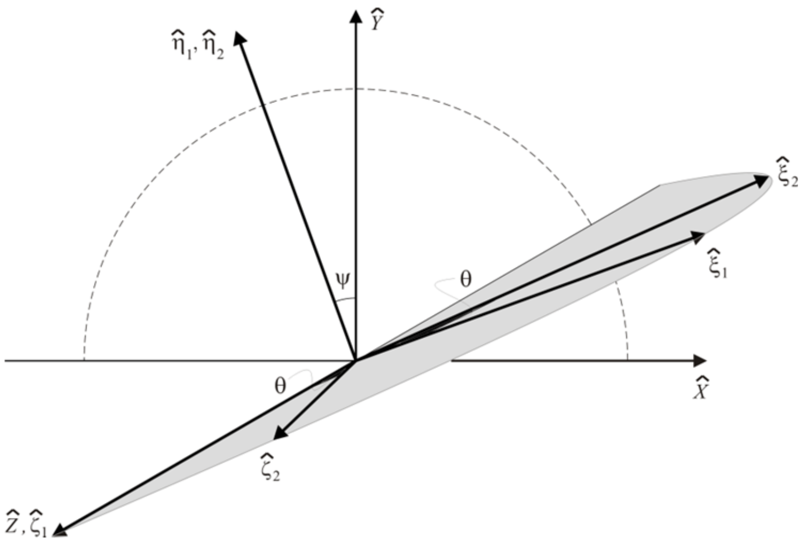


Figura 2.3 – Rotação em torno do eixo $\hat{\eta}_1$ de um ângulo θ.

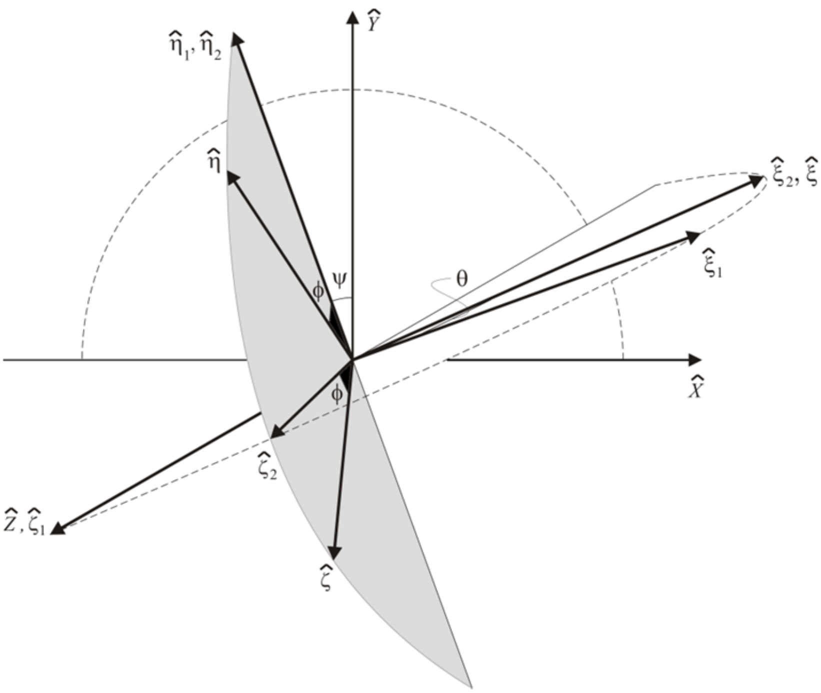


Figura 2.4 – Rotação em torno do eixo $\hat{\xi}_2$ de um ângulo ϕ.

Tem-se, pois, que a posição final é obtida após três rotações, cada uma associada a um dos ângulos de Euler, surgindo desse processo sequencial dois conjuntos de eixos auxiliares: $\left(\hat{\xi}_1, \hat{\eta}_1, \hat{\zeta}_1\right)$ e $\left(\hat{\xi}_2, \hat{\eta}_2, \hat{\zeta}_2\right)$, além dos eixos $\left(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}\right)$ e $\left(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\right)$, sendo que alguns desses eixos coincidem entre si, ou seja, $\hat{Z} - \hat{\zeta}_1$, $\hat{\eta}_1 - \hat{\eta}_2$ e $\hat{\xi}_2 - \hat{\xi}$.

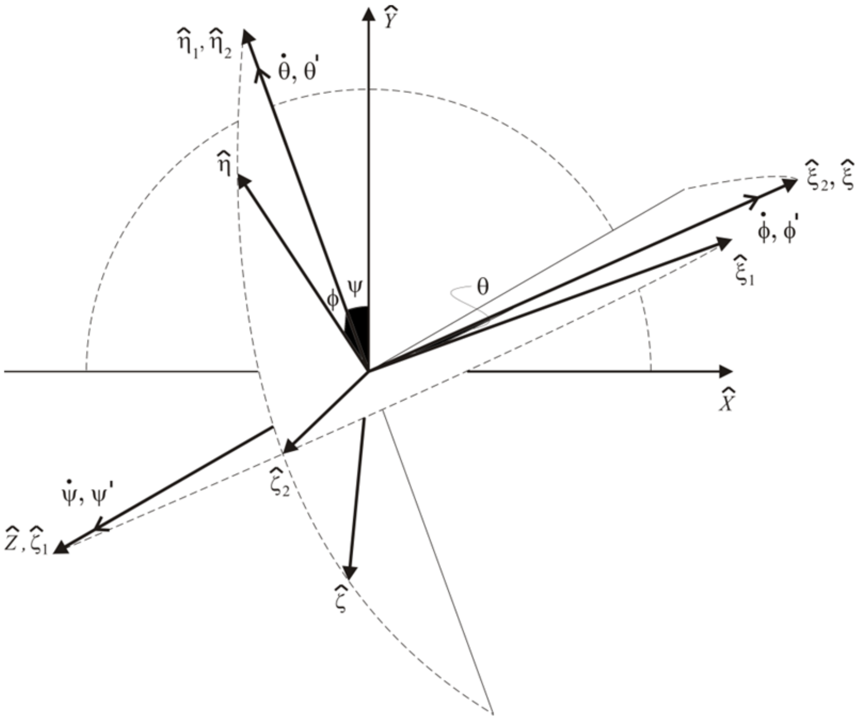


Figura 2.5 – Derivadas parciais com respeito ao tempo t e posição s.

Outras transformações são possíveis combinando as Equações (2.1), (2.2) e (2.3). Porém, é importante salientar que a posição final depende da sequência de rotações adotadas, isto é, a ordem das rotações afeta o resultado final e, portanto, o processo sequencial de rotações não é comutativo.

No presente trabalho, qualquer orientação de $\left(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta}\right)$ com relação à $\left(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\right)$ é descrita pelas rotações em torno de $\hat{Z}$ por meio do ângulo de rotação ψ, em torno de $\hat{\eta}_1$ por meio do ângulo de rotação θ e em torno do eixo $\hat{\xi}_2 \equiv \hat{\xi}$ por meio do ângulo de rotação ϕ, nesta sequência.

Estabelecida a relação entre os referenciais pode-se, diretamente da Figura 2.5, determinar o vetor velocidade angular $\omega(s,t)$ do sistema principal (ξ, η, ζ) com relação ao sistema material (X, Y, Z), que é dado por

$$\omega\,(s,t) = \dot{\psi}\,\hat{Z} + \dot{\theta}\,\hat{\eta}_1 + \dot{\phi}\,\hat{\xi}, \tag{2.4}$$

onde o sobrescrito $\bullet$ (ponto) simboliza derivada parcial com relação ao tempo t.

Na Equação (2.4) nota-se que a velocidade angular $\omega(s,t)$ está escrita em termos do eixo global $\hat{Z}$ e auxiliar $\hat{\eta}_1$. Para escrevê-la apenas em termos dos eixos $(\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{\zeta})$ é preciso substituir na Equação (2.3) a Equação (2.2), de onde se chega à expressão para o vetor unitário $\hat{\eta}_1$ e combinar, como se segue, as Equações (2.1), (2.2) e (2.3), a fim de determinar o vetor unitário $\hat{Z}$.

$$\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\\ \hat{\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi)\\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\xi}_1\\ \hat{\eta}_1\\ \hat{\zeta}_1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\\ \hat{\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta)\\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) & \sin(\phi)\cos(\theta)\\ \cos(\phi)\sin(\theta) & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\xi}_1\\ \hat{\eta}_1\\ \hat{\zeta}_1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\\ \hat{\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi)\sin(\theta)\\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi)\\ -\sin(\theta) & \sin(\phi)\cos(\theta) & \cos(\phi)\cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\xi}_1\\ \hat{\eta}_1\\ \hat{\zeta}_1\end{bmatrix},$$

$$\hat{\eta}_1=\cos(\phi)\hat{\eta}-\sin(\phi)\hat{\zeta}. \tag{2.5}$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\\ \hat{\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\phi & s\phi\\ 0 & -s\phi & c\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\theta & 0 & -s\theta\\ 0 & 1 & 0\\ s\theta & 0 & c\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\psi & s\psi & 0\\ -s\psi & c\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{X}\\ \hat{Y}\\ \hat{Z}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\\ \hat{\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\phi c\psi & c\theta s\psi & -s\theta\\ s\phi s\theta c\psi-c\phi s\psi & s\phi s\theta s\psi+c\phi c\psi & s\phi c\theta\\ c\phi s\theta c\psi+s\phi s\psi & c\phi s\theta s\psi-s\phi c\psi & c\phi c\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{X}\\ \hat{Y}\\ \hat{Z}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\hat{\xi}\\ \hat{\eta}\\ \hat{\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\phi c\psi & s\phi s\theta c\psi-c\phi s\psi & c\phi s\theta c\psi+s\phi s\psi\\ c\theta s\psi & s\phi s\theta s\psi+c\phi c\psi & c\phi s\theta s\psi-s\phi c\psi\\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{X}\\ \hat{Y}\\ \hat{Z}\end{bmatrix},$$

$c\alpha=\cos(\alpha),\ s\alpha=\sin(\alpha),$ para $\alpha=\phi,\theta,\psi$,

$$\hat{Z}=-\sin(\theta)\hat{\xi}+\cos(\theta)\sin(\phi)\hat{\eta}+\cos(\theta)\cos(\phi)\hat{\zeta}. \tag{2.6}$$

Assim, substituindo as Equações (2.5) e (2.6) na Equação (2.4), encontra-se a seguinte expressão para a velocidade angular,

$$\omega(s,t) = \dot{\psi}\left[-\sin(\theta)\hat{\xi} + \cos(\theta)\sin(\phi)\hat{\eta} + \cos(\theta)\cos(\phi)\hat{\zeta}\right]$$
$$+\dot{\theta}\left[\cos(\phi)\hat{\eta} - \sin(\phi)\hat{\zeta}\right] + \dot{\phi}\,\hat{\xi} \quad ,$$

$$\omega(s,t) = \left[\dot{\phi} - \dot{\psi}\sin(\theta)\right]\hat{\xi} + \left[\dot{\psi}\cos(\theta)\sin(\phi) + \dot{\theta}\cos(\phi)\right]\hat{\eta}$$
$$+\left[\dot{\psi}\cos(\theta)\cos(\phi) - \dot{\theta}\sin(\phi)\right]\hat{\zeta} \quad ,$$

$$\omega(s,t) = \omega_\xi\,\hat{\xi} + \omega_\eta\,\hat{\eta} + \omega_\zeta\,\hat{\zeta}\,, \tag{2.7}$$

onde, ω_ξ, ω_η e ω_ζ são as velocidades angulares em torno dos eixos principais $(\hat{\xi},\hat{\eta},\hat{\zeta})$.

Fazendo uso da analogia cinemática de Kirchhoff (Love, 1944; Crespo da Silva e Glynn, 1978.a e 1978.b), as componentes ρ_ξ, ρ_η e ρ_ζ do vetor curvatura $\rho(s,t)$ podem ser obtidas diretamente da Equação (2.7), sendo as derivadas no tempo substituídas por derivadas espaciais e $\omega(s,t)$ substituído por $\rho(s,t)$. Dessa forma tem-se

$$\rho(s,t) = [\phi' - \psi'\sin(\theta)]\hat{\xi} + [\psi'\cos(\theta)\sin(\phi) + \theta'\cos(\phi)]\hat{\eta}$$
$$+[\psi'\cos(\theta)\cos(\phi) - \theta'\sin(\phi)]\hat{\zeta} \quad ,$$

$$\rho(s,t) = \rho_\xi\,\hat{\xi} + \rho_\eta\,\hat{\eta} + \rho_\zeta\,\hat{\zeta}\,, \tag{2.8}$$

onde, ρ_η e ρ_ζ representam a mudança de curvatura por flexão da barra na posição s e ρ_ξ a mudança de curvatura por torção.

Nota-se que, além das três componentes do vetor de deslocamentos elásticos $u(s,t)$, $v(s,t)$ e $w(s,t)$ medido ao longo dos eixos $\hat{X}$, $\hat{Y}$ e $\hat{Z}$, três novas variáveis (ψ, θ e ϕ) foram introduzidas. Contudo, o problema pode ser simplificado considerando aqui as hipóstese clássicas da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Uma clara exceção a estas restrições ocorre, por exemplo, nas barras com apoios fixos, onde o seu alongamento torna-se importante. Porém estas hipóteses simplificadoras são válidas para o estudo de barras esbeltas, flexíveis e com uma de suas extremidades livre na direção axial.

2.4.
Barra inextensível

Na Figura 2.1.b observa-se que, antes da deformação, a posição de um ponto ao longo do eixo da barra é dada por $\mathbf{r}_0 = s\,\hat{X}$ e, após a deformação, sua posição é dada por $\mathbf{r} = [s + u(s,t)]\hat{\xi} + v(s,t)\,\hat{\eta} + w(s,t)\,\hat{\zeta}$. A deformação ao longo do eixo de um elemento diferencial é, portanto, definida como

$$e = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right)^{1/2} - \left(\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial s}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial s} \right)^{1/2},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \left[(1+u') \quad v' \quad w' \right]^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial s} = \left[1 \quad 0 \quad 0 \right]^{\mathrm{T}},$$

$$e = \sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1. \tag{2.9}$$

Na Equação (2.9) e no restante deste trabalho, o sobrescrito $'$ (aspa simples) simboliza derivada parcial em relação ao comprimento de arco s, assim como, para simplificar a notação, $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$ e $w = w(s,t)$.

Para barras inextensíveis, a deformação axial e é nula, resultando na seguinte restrição;

$$\sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2} - 1 = 0,$$

$$(1+u')^2 + v'^2 + w'^2 = 1. \tag{2.10}$$

Também, por meio da Figura 2.6, os ângulos ψ e θ podem ser relacionados com as derivadas espaciais u', v' e w' resultando nas seguintes expressões:

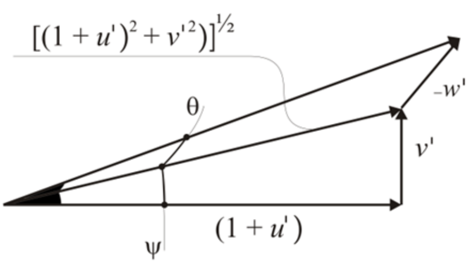


Figura 2.6 – Relação dos ângulos ψ e θ com as derivadas espaciais.

$$\tan(\psi) = \frac{v'}{(1+u')}, \tag{2.11}$$

$$\tan(\theta) = \frac{-w'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}}, \tag{2.12}$$

onde $w' < 0$ porque, aqui, o deslocamento w ocorre na direção negativa de Z.

As relações (2.10), (2.11) e (2.12) indicam que, das seis variáveis mencionadas (u, v, w, ψ, θ e ϕ), apenas três são independentes (v, w e ϕ), as quais aparecem nas equações de movimento derivadas a seguir.

2.5. Equação de Lagrange

Seguindo Crespo da Silva e Glynn (1978.a e 1978.b), para obter as equações integro-diferenciais de movimento em termos dos deslocamentos v e w e do ângulo ϕ, levando em conta todas as equações de restrição, define-se inicialmente o funcional de Lagrange

$$\mathrm{L}(t) = T(t) - U(t) = \int_0^L \ell(s,t)\,ds\,. \tag{2.13}$$

onde, $U(t)$ é a energia interna de deformação, $T(t)$ a energia cinética e $\ell(s,t)$ a densidade do Lagrangiano associada ao movimento de uma barra de comprimento L.

A energia cinética possui duas componentes, uma devida à translação e outra devida à rotação, dadas respectivamente por:

$$T_T(t) = \frac{1}{2}\int_0^L m\left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2\right)ds\,. \tag{2.14}$$

$$T_R(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \begin{bmatrix}\omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta\end{bmatrix} \mathbf{J} \begin{bmatrix}\omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta\end{bmatrix}^T ds\,. \tag{2.15}$$

onde $\mathbf{J}$ é a matriz de inércia.

Sendo o sistema de coordenadas principal coincidente com os eixos principais de inércia, tal como neste trabalho, os produtos de inércia são nulos, resultando em uma matriz de inércia $\mathbf{J}$ diagonal, dada por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_\xi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

onde, J_ξ, J_η e J_ζ são os momentos de inércia por unidade de comprimento da barra. Como a área da seção transversal é constante, os momentos de inércia barra também o são, sendo definidos por:

$$J_\xi = \int\int_A p\left(\eta^2 + \zeta^2\right) d\eta\, d\zeta\ , \tag{2.17}$$

$$J_\eta = \int\int_A p\ \zeta^2\, d\eta\, d\zeta\ , \tag{2.18}$$

$$J_\zeta = \int\int_A p\ \eta^2\, d\eta\, d\zeta\ , \tag{2.19}$$

onde p é a massa específica da barra e A refere-se a área da seção transversal.

Substituindo a Equação (2.16) na Equação (2.15) e somando esta à Equação (2.14), chega-se à expressão para energia cinética, a saber,

$$T(t) = \frac{1}{2}\int_0^L m\left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) ds + \frac{1}{2}\int_0^L \left(J_\xi\, \omega_\xi^{\ 2} + J_\eta\, \omega_\eta^{\ 2} + J_\zeta\, \omega_\zeta^{\ 2}\right) ds\,. \tag{2.20}$$

Por sua vez, a energia interna de deformação $U(t)$, considerando-se o material elástico linear, é dada por

$$U(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(D_\xi\, \rho_\xi^{\ 2} + D_\eta\, \rho_\eta^{\ 2} + D_\zeta\, \rho_\zeta^{\ 2}\right) ds\,, \tag{2.21}$$

onde, D_ξ é a rigidez à torção e D_η e D_ζ as parcelas de rigidez à flexão da barra, definidas como,

$$D_\xi = \int\int_A G\left(\eta^2 + \zeta^2\right) d\eta\, d\zeta\,. \tag{2.22}$$

$$D_\eta = \int\int_A E\ \zeta^2\, d\eta\, d\zeta\,. \tag{2.23}$$

$$D_{\zeta} = \int\int_A E\,\eta^2\,d\eta\,d\zeta\,. \tag{2.24}$$

sendo E e G o módulo de Young e de cisalhamento, respectivamente.

Substituindo as Equações (2.20) e (2.21) na Equação (2.13), tem-se

$$\begin{aligned}\ell(s,t) = \Bigg[\frac{1}{2} m\left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) + \frac{1}{2}\left(J_{\xi}\,\omega_{\xi}^{\ 2} + J_{\eta}\,\omega_{\eta}^{\ 2} + J_{\zeta}\,\omega_{\zeta}^{\ 2}\right) \\ - \frac{1}{2}\left(D_{\xi}\,\rho_{\xi}^{\ 2} + D_{\eta}\,\rho_{\eta}^{\ 2} + D_{\zeta}\,\rho_{\zeta}^{\ 2}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{2.25}$$

Para se considerar a restrição de inextensionaidade, acrescenta-se ao Lagrangiano $\mathsf{L}(t)$ a restrição (2.10) multiplicada pelo multiplicador de Lagrange $\lambda(s,t)$, resultando em,

$$\mathsf{L}(t) = \int_0^L \left\{\ell(s,t) + \frac{1}{2}\lambda(s,t)\left[1 - (1+u')^2 - v'^2 - w'^2\right]\right\} ds\,. \tag{2.26}$$

Da Equação (2.26) e mediante aplicação do princípio de Hamilton, são obtidas cinco equações diferenciais de movimento. Este procedimento é descrito a seguir. Contudo, antes disso, faz-se conveniente escrever as variações $\delta\psi(s,t)$ e $\delta\theta(s,t)$. A variação $\delta\psi(s,t)$ é obtida da Equação (2.11) da seguinte forma:

$$\tan(\psi) = v'(1+u')^{-1}\,,$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{v'}{(1+u')}\right). \tag{2.27}$$

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial\psi}{\partial v'}\delta v'\,. \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u'} = -\frac{v'}{(1+u')^2\left(1 + \dfrac{v'^2}{(1+u')^2}\right)}\,,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial u'} = -\frac{v'}{(1+u')^2\left(\dfrac{(1+u')^2 + v'^2}{(1+u')^2}\right)}\,,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u'} = -\frac{v'}{(1+u')^2 + v'^2}. \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v'} = \frac{1}{(1+u')^2 \left(1 + \frac{v'^2}{(1+u')^2} \right)},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v'} = \frac{1}{\left(\frac{(1+u')^2 + v'^2}{(1+u')} \right)},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v'} = \frac{(1+u')}{(1+u')^2 + v'^2}. \tag{2.30}$$

$$\delta\psi = \left(-\frac{v'}{(1+u')^2 + v'^2} \right) \delta u' + \left(\frac{(1+u')}{(1+u')^2 + v'^2} \right) \delta v',$$

$$\delta\psi = -\frac{v'}{(1+u')^2 + v'^2} \delta u' + \frac{(1+u')}{(1+u')^2 + v'^2} \delta v'. \tag{2.31}$$

Seguindo o mesmo procedimento, a variação $\delta\theta(s,t)$ é obtida da Equação (2.12) a partir da seguinte sequência de transformações:

$$\tan(\theta) = -\frac{w'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}},$$

$$\theta = -\arctan\left(\frac{w'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \right). \tag{2.32}$$

$$\delta\theta = \frac{\partial \theta}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial \theta}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial \theta}{\partial w'} \delta w'. \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial u'} = \frac{w'}{\left[(1+u')^2 + v'^2\right] \sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \left(1 + \frac{w'^2}{(1+u')^2 + v'^2} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial u'}=\frac{w'}{\left[(1+u')^2+v'^2\right]\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}\left(\frac{(1+u')^2+v'^2+w'^2}{(1+u')^2+v'^2}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial u'}=\frac{(1+u')w'}{\left[(1+u')^2+v'^2+w'^2\right]\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}. \tag{2.34}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial v'}=\frac{w'v'}{\left[(1+u')^2+v'^2\right]\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}\left(1+\frac{w'^2}{(1+u')^2+v'^2}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial v'}=\frac{v'w'}{\left[(1+u')^2+v'^2+w'^2\right]\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}. \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial w'}=\frac{1}{\left(1+\frac{w'^2}{(1+u')^2+v'^2}\right)\sqrt{(1+u')^2+v'^2}},$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial w'}=\frac{(1+u')^2+v'^2}{\left[(1+u')^2+v'^2+w'^2\right]\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}. \tag{2.36}$$

$$\delta\theta=\frac{1}{\left[(1+u')^2+v'^2+w'^2\right]\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}$$
$$\left\{\left[(1+u')w'\right]\delta u'+(v'w')\delta v'-\left[(1+u')^2+v'^2\right]\delta w'\right\},$$

$$\delta\theta=\frac{1}{\left[(1+u')^2+v'^2+w'^2\right]\sqrt{(1+u'^2)^2+v'^2}}$$
$$\left\{\left[(1+u')\delta u'+v'\delta v'\right]w'-\left[(1+u')^2+v'^2\right]\delta w'\right\}. \tag{2.37}$$

Da Equação (2.10) sabe-se que $(1+u')^2+v'^2+w'^2=1$, logo,

$$\delta\theta=\frac{(1+u')\delta u'+v'\delta v'}{\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}w'-\frac{(1+u')^2+v'^2}{\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}\delta w'. \tag{2.38}$$

2.6.
O princípio de Hamilton

O princípio variacional de Hamilton (Meirovitch, 1967) diz que, dentre os infinitos caminhos ou trajetórias existentes entre dois pontos fixos t_1 e t_2, o sistema assumirá aquele que torna estacionário o seguinte funcional,

$$I = \int_{t_2}^{t_1} \mathrm{L}(t)\, dt. \tag{2.39}$$

A inclusão do trabalho W_{NC} realizado pelas forças não conservativas na Equação (2.39) define o princípio de Hamilton na sua forma estendida. Usando a primeira variação do funcional I, tem-se

$$\delta I = \int_{t_2}^{t_1} \left[\delta \mathrm{L}(t) + \delta W_{NC}(t)\right] dt = 0\ . \tag{2.40}$$

Considera-se nesta pesquisa que a barra é solicitada por cargas concentradas aplicadas nas suas extremidades e por cargas distribuídas aplicadas ao longo de seu comprimento. Ambas as cargas, sejam estáticas ou dinâmicas, levam à deformação da estrutura e, somadas às forças de amortecimento, são consideradas nas seguintes parcelas,

$$\begin{aligned}\delta W_{NC} = \int_0^L \Big\{ \left[Q_u(t) - c_u\, \dot{u} \right] \delta u + \left[Q_v(t) - c_v\, \dot{v} \right] \delta v \\ + \left[Q_w(t) - c_w\, \dot{w} \right] \delta w + \left[Q_\phi(t) - c_\phi\, \dot{\phi} \right] \delta \phi \Big\} ds.\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\delta W_{NC} = \int_0^L \left(Q_u^*\, \delta u + Q_v^*\, \delta v + Q_w^*\, \delta w + Q_\phi^*\, \delta \phi \right) ds. \tag{2.42}$$

onde Q_α^* $(\alpha = u, v, w, \phi)$ representam as forças generalizadas associadas com os deslocamentos virtuais δ_α $(\alpha = u, v, w, \phi)$ e as quantidades c_α $(\alpha = u, v, w, \phi)$ representam os coeficientes de amortecimento viscoso nas suas respectivas direções. Expandindo a Equação (2.40) mediante o uso das Equações (2.26) e (2.42), obtém-se:

$$\delta I=\int_{t1}^{t2}\int_{0}^{L}\delta\left(\ell(s,t)+\frac{1}{2}\lambda(s,t)\left[1-(1+u')^{2}-v'^{2}-w'^{2}\right]\right)ds\,dt$$
$$+\int_{t1}^{t2}\int_{0}^{L}\delta\left(Q_u^*\delta u+Q_v^*\delta v+Q_w^*\delta w+Q_\phi^*\delta\phi\right)ds\,dt=0. \qquad (2.43)$$

$$\delta I=\int_{t1}^{t2}\int_{0}^{L}\delta\Re\,ds\,dt=0. \qquad (2.44)$$

sendo,

$$\Re=\left(\ell(s,t)+\frac{1}{2}\lambda(s,t)\left[1-(1+u')^{2}-v'^{2}-w'^{2}\right]\right)$$
$$+\left(\int_{0}^{L}\left(Q_u^*\delta u+Q_v^*\delta v+Q_w^*\delta w+Q_\phi^*\delta\phi\right)\right). \qquad (2.45)$$

Tem-se, pois, que $\Re$ é função de 16 variáveis, a saber, $\alpha=\left(\psi,\theta,\phi,\psi',\theta',\phi',\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\phi},u',v',w',\dot{u},\dot{v},\dot{w},\lambda\right)$. Precisa-se, assim, calcular as seguintes derivadas parciais,

$$\delta\Re=\sum_{i=1}^{16}\frac{\partial\Re}{\partial\alpha_i}\alpha_i\ , \qquad (2.46)$$

Expandindo a Equação (2.44) por meio das várias derivadas parciais requeridas na Equação (2.46), encontra-se que:

$$\delta I=\int_{t1}^{t2}\left\{\int_{0}^{L}\left(G_u'-m\ddot{u}+Q_u^*\right)\delta u\,ds+\int_{0}^{L}\left(G_v'-m\ddot{v}+Q_v^*\right)\delta v\,ds\right.$$
$$+\int_{0}^{L}\left(G_w'-m\ddot{w}+Q_w^*\right)\delta w\,ds+\int_{0}^{L}\left(Q_\phi^*-A_\phi\right)\delta\phi\,ds$$
$$+\left[\frac{\partial\ell}{\partial\phi'}\delta\phi-G_u\delta u-G_v\delta v-G_w\delta w+\left(H_v-\frac{H_u}{(1+u')}v'\right)\delta v'\right. \qquad (2.47)$$
$$\left.\left.+\left(H_w-\frac{H_u}{(1+u')}w'\right)\delta w'\right]_{s=0}^{s=L}\right\}dt=0.$$

Como a Equação (2.47) é valida para qualquer δu, δv, δw e $\delta\phi$, os integrandos contidos nas integrais são iguais à zero (Török, 2000). Assim, as seguintes equações diferenciais e condições de contorno são obtidas:

$$G_u'=\left[A_\psi\frac{\partial\psi}{\partial u'}+A_\theta\frac{\partial\theta}{\partial u'}+\lambda\left(1+u'\right)\right]'=m\ddot{u}-Q_u^*, \qquad (2.48)$$

$$G_v' = \left[A_\psi \frac{\partial \psi}{\partial v'} + A_\theta \frac{\partial \theta}{\partial v'} + \lambda\, v' \right]' = m\,\ddot{v} - Q_v^*, \tag{2.49}$$

$$G_w' = \left[A_\theta \frac{\partial \theta}{\partial w'} + \lambda\, w' \right]' = m\,\ddot{w} - Q_w^*, \tag{2.50}$$

$$A_\phi = Q_\phi^*, \tag{2.51}$$

$$\left\{ \frac{\partial \ell}{\partial \phi'} \delta\phi - G_u \delta u - G_v \delta v - G_w \delta w + \delta W_B + \left[H_v - \frac{H_u}{(1+u')} v' \right] \delta v' \right.$$
$$\left. + \left[H_w - \frac{H_u}{(1+u')} w' \right] \delta w' \right\} \Bigg|_{s=0}^{s=L} = 0, \tag{2.52}$$

onde, $\partial\psi/\partial u'$, $\partial\psi/\partial v'$, $\partial\theta/\partial u'$, $\partial\theta/\partial v'$ e $\partial\theta/\partial w'$ são determinados, respectivamente, pelas Equações (2.29), (2.30), (2.34), (2.35) e (2.36). O multiplicador de Lagrange $\lambda = \lambda(s,t)$ presente nas Equações (2.48) à (2.50) é, por sua vez, interpretado como uma força tangente ao eixo neutro da barra, necessária para manter a condição de inextensibilidade dada pela Equação (2.10). Além disso, A_α $(\alpha = \psi, \theta, \phi)$ e H_α $(\alpha = u, v, w)$ são funções dadas por:

$$A_\alpha = \frac{\partial \ell^2}{\partial t \partial \dot{\alpha}} + \frac{\partial \ell^2}{\partial s \partial \alpha'} + \frac{\partial \ell}{\partial \alpha}, \qquad (\alpha = \psi, \theta, \phi), \tag{2.53}$$

$$H_\alpha = \frac{\partial \ell}{\partial \psi'} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \ell}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha'}, \qquad (\alpha = u, v, w). \tag{2.54}$$

Informações importantes concernentes ao movimento da barra, tais como os efeitos ressonantes, podem ser obtidas a partir deste conjunto de equações. Contudo, devido à natureza transcendental da maioria de seus termos, elas são de difícil resolução, mesmo através de métodos aproximados. Uma aproximação matematicamente consistente é possível expandindo-se os termos não polinomiais em séries de Taylor e retendo nestas todos os termos até a ordem desejada. Uma aproximação por polinômios de terceira ordem é adotada neste trabalho, suficiente, entretanto, para uma análise considerando grandes deslocamentos e rotações.

2.7. Equação de movimento com não linearidades cúbicas

Para examinar o comportamento não linear da barra com não linearidades cúbicas, todos os termos transcendentais presentes nas equações são expandidos em séries de Taylor. Assim, a expansão das Equações (2.11) e (2.12) resulta em:

$$\psi = \arctan\left(\frac{v'}{(1+u')}\right) = \arctan\left(\frac{v'}{\sqrt{1-v'^2-w'^2}}\right),$$

$$\psi \approx v' + \frac{1}{6}v'^3 + \frac{1}{2}v'w'^2 + \frac{1}{40}v'^5 + O\left(\varepsilon^6\right),$$

$$\psi \approx v'\left(1+\frac{1}{6}v'^2+\frac{1}{2}w'^2\right). \tag{2.55}$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{w'}{\sqrt{(1+u')^2+v'^2}}\right) = \arctan\left(-\frac{w'}{\sqrt{1-w'^2}}\right),$$

$$\theta \approx -w' - \frac{1}{6}w'^3 - \frac{3}{40}w'^5 + O\left(\varepsilon^6\right),$$

$$\theta \approx -w'\left(1+\frac{1}{6}w'^2\right). \tag{2.56}$$

Com as expansões anteriores, os ângulos ψ e θ são eliminados das equações finais de movimento.

Da mesma forma, tem-se:

$$\sin(\alpha) \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{120}\alpha^5 + O\left(\varepsilon^6\right) \approx \alpha, \qquad (\alpha = \psi, \theta, \phi). \tag{2.57}$$

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 + O\left(\varepsilon^6\right) \approx 1, \qquad (\alpha = \psi, \theta, \phi). \tag{2.58}$$

Fazendo uso destas expansões, da Equação (2.10) e das definições dos termos A_ψ, A_θ e A_ϕ nas Equações (2.48) à (2.52), têm-se as equações finais que descrevem o movimento acoplado de flexão-flexão-torção de uma barra:

$$G_u' = \Big\{ D_\xi \,\phi'(w''v' - v''w') - v'\big[(D_\eta - D_\zeta)\phi\, w''\big]' - w'\big[(D_\eta - D_\zeta)\phi\, v''\big]'$$
$$+ v'\big(D_\zeta\, v''\big)' + w'\big(D_\zeta\, w''\big)' - J_\xi\, \dot{\phi}(\dot{w}'v' - \dot{v}'w') + (J_\eta - J_\zeta)\big[(\dot{w}'\phi)^\bullet v' \qquad (2.59)$$
$$+ (\dot{v}'\phi)^\bullet w'\big] - J_\zeta \ddot{v}'v' - J_\eta \ddot{w}'w' + \lambda(1+u') - v'w'Q_\phi^* \Big\}' = m\ddot{u} - Q_u^* \ ,$$

$$G_v' = \Big\{ - D_\xi\, (\phi' + v''w')w'' - \big[(D_\eta - D_\zeta)(\phi^2 v'' - \phi\, w'' - v'w'w'') + D_\zeta v''\big]'$$
$$- v'\big(D_\zeta v''^2 + D_\eta w''^2\big) + J_\xi\, (\dot{\phi} + \dot{v}'w')\dot{w}' + \big[(J_\eta - J_\zeta)(\phi^2 \dot{v}' - \phi\, \dot{w}' \qquad (2.60)$$
$$- v'w'\dot{w}') + J_\zeta \dot{v}'\big]^\bullet + v'\big(J_\zeta \dot{v}'^2 + J_\eta \dot{w}'^2\big) + \lambda\, v' + w'Q_\phi^* \Big\}' = m\,\ddot{v} - Q_v^* \ ,$$

$$G_w' = \Big\{ D_\xi\, (\phi' + v''w')v'' + \big[(D_\eta - D_\zeta)(\phi v'' + \phi^2 w'') - D_\eta w''\big]'$$
$$- w'\big(D_\eta w''^2 + D_\zeta v''^2\big) - J_\xi\, (\dot{\phi} + \dot{v}'w')\dot{v}' - \big[(J_\eta - J_\zeta)(\phi \dot{v}' + \phi^2 \dot{w}') - J_\eta \dot{w}'\big]^\bullet \qquad (2.61)$$
$$+ w'\big(J_\eta \dot{w}'^2 + J_\zeta \dot{v}'^2\big) + \lambda\, w' \Big\}' = m\,\ddot{w} - Q_w^* \ ,$$

$$- \big[D_\xi\, (\phi' + v''w')\big]' + (D_\eta - D_\zeta)\big[(v''^2 - w''^2)\phi - v''w''\big]$$
$$+ J_\xi\, (\dot{\phi} + \dot{v}'w')^\bullet - (J_\eta - J_\zeta)\big[(\dot{v}'^2 - \dot{w}'^2)\phi - \dot{v}'\dot{w}'\big] = Q_\phi^* \ , \qquad (2.62)$$

$$u' = -(1/2)\big(v'^2 + w'^2\big)\,, \qquad (2.63)$$

As expansões dos termos referentes às condições de contorno resultam em:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi'} = -D_\xi\, (\phi' + v''w')\,, \qquad (2.64)$$

$$\left[H_v - \frac{H_u}{(1+u')} v' \right] \approx -D_\xi\, (\phi' + v''w') - (D_\eta - D_\zeta)(v''\phi^2 - w''\phi)$$
$$- D_\zeta\, \big[v'' + v'(v'v'' + w'w'')\big]\,, \qquad (2.65)$$

$$\left[H_w - \frac{H_u}{(1+u')} w' \right] \approx (D_\eta - D_\zeta)(w''\phi^2 + v''\phi) - D_\eta w''$$
$$- w'\big(D_\zeta v'v'' + D_\eta w'w''\big) \ . \qquad (2.66)$$

As condições de contorno para uma barra engastada-livre, obtidas a partir das Equações (2.64) à (2.66), são dadas por,

$$u(0,t) = v(0,t) = v'(0,t) = w(0,t) = w'(0,t) = \gamma(0,t) = 0 \ , \qquad (2.67)$$

$$v''(L,t) = v'''(L,t) = w''(L,t) = w'''(L,t) = \gamma'(L,t) = 0 \ , \tag{2.68}$$

$$G_u(L,t) = G_v(L,t) = G_w(L,t) = 0 \ , \tag{2.69}$$

onde $\gamma = \gamma(s,t)$ é o ângulo de torção da barra dado por:

$$\gamma = \phi + \int_0^s (v''w')ds = \phi + v'w' - \int_0^s (v'w'')ds \ , \tag{2.70}$$

com suas derivadas no espaço e no tempo dadas, respectivamente, por:

$$\gamma' = \phi' + v''w' \ . \tag{2.71}$$

$$\gamma'' = \phi'' + v'''w' + v''w'' \ . \tag{2.72}$$

$$\dot{\gamma} = \dot{\phi} + \int_0^s (v''w')^{\bullet} \, ds = \dot{\phi} + (v'w')^{\bullet} - \int_0^s (v'w'')^{\bullet} \, ds \ . \tag{2.73}$$

$$\ddot{\gamma} = \ddot{\phi} + \int_0^s (v''w')^{\bullet\bullet} \, ds = \ddot{\phi} + (v'w')^{\bullet\bullet} - \int_0^s (v'w'')^{\bullet\bullet} \, ds \ . \tag{2.74}$$

As Equações (2.59) e (2.63) de movimento, assim como as condições de contorno $u(0,t) = \gamma(0,t) = \gamma'(0,t) = 0$ e $G_u(L,t) = 0$ podem ser usadas para se obter γ, u e λ, ou seja,

$$\gamma = -\frac{1}{D_\xi} \int_0^s \int_L^s \left[Q_\phi + \left(D_\eta - D_\zeta \right) v''w'' \right] ds \, ds \ , \tag{2.75}$$

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^s \left(v'^2 + w'^2 \right) ds \ , \tag{2.76}$$

$$\begin{aligned} \lambda = {} & J_\eta (w'\ddot{w}') + J_\zeta (v'\ddot{v}') - D_\eta (w'w''') - D_\zeta (v'v''') \\ & -\frac{1}{2} \int_L^s m \left[\int_0^s \left(v'^2 + w'^2 \right) ds \right]^{\bullet\bullet} ds - \int_L^s \left(Q_u^* \right) ds, \end{aligned} \tag{2.77}$$

Dependendo das particularidades de cada problema, as variáveis u, v, w, γ e λ podem ser convenientemente reordenadas, simplificando assim, as equações de movimento.

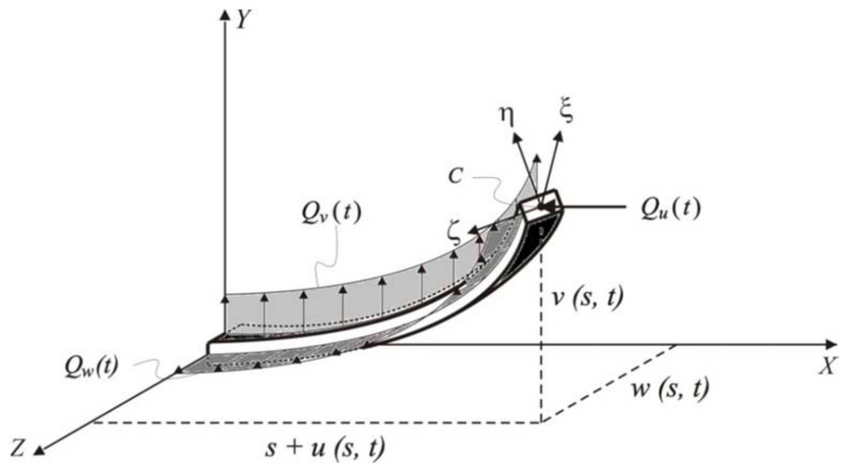


Figura 2.7 – Barra engastada-livre com excitação harmônica distribuída nas direções Y e Z.

2.8. Expansão das equações de movimento

Considerando para a expansão das equações de movimento, como mostra a Figura 2.7, as cargas uniformemente distribuídas ao longo do comprimento da barra, $Q_v(t)$ e $Q_w(t)$, bem como, uma carga concentrada $Q_u(t)$, aplicada na sua extremidade, as seguintes solicitações são obtidas:

$$Q_\phi^* = M_\phi - c_\phi \dot{\phi} \approx M_\phi - J_\xi c_\gamma \dot{\phi} \approx M_\gamma - J_\xi c_\gamma \dot{\gamma} = -J_\xi c_\gamma \dot{\gamma} \, , \tag{2.78}$$

$$Q_u^* = mg + Q_u(t) = mg + (1 + 2u')[P_S + q_u \cos(\Omega_u t)] \, , \tag{2.79}$$

$$Q_v^* = Q_v(s,t) - c_v \dot{v} = q_v \cos(\Omega_v t) - c_v \dot{v} \, , \tag{2.80}$$

$$Q_w^* = Q_w(s,t) - c_w \dot{w} = q_w \cos(\Omega_w t) - c_w \dot{w} \, , \tag{2.81}$$

onde, as quantidades g , c_γ e $M_\gamma = 0$ representam, respectivamente, a aceleração da gravidade, o coeficiente de amortecimento viscoso introduzido para amortecer o modo de torção da barra e o momento fletor distribuído aplicado ao longo do comprimento da L barra. Nas equações, Ω_u , Ω_v e Ω_w são as frequências de vibração das solicitações, q_u, q_v e q_w são as amplitudes das excitações dinâmicas e P_S é a parcela estática contida no carregamento axial. Para este conjunto de solicitações, as Equações (2.60) à (2.62) de movimento, considerando o multiplicador de Lagrange λ, determinado na Equação (2.77), o ângulo de torção γ da barra e suas derivadas no espaço e no tempo, dados nas Equações (2.70) à (2.74), chega-se às três equações não lineares de movimento em função apenas dos deslocamentos transversais v e w e do ângulo γ de torção. Elas são:

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{v}+c_v\dot{v}+\left(D_\zeta v''\right)''+\left[P_S+q_u\cos(\Omega t)\right]v''=\Big\{-D_\xi\,\gamma'\,w''+\left(D_\eta-D_\zeta\right)\\
&\left[\left(w''\gamma\right)'-\left(\gamma^2v''\right)'+w'''\int_0^s\left(v'w''\right)ds\right]-v'\left(D_\zeta v''^2+D_\zeta w''^2\right)+v'\left(J_\zeta\dot{v}'^2+J_\eta\dot{w}'^2\right)\\
&+v'\left[-D_\zeta v'v'''-D_\eta w'w'''+J_\zeta\ddot{v}'v'+J_\eta\ddot{w}'w'-\frac{1}{2}\int_L^s\left(m\left[\int_0^s\left(v'^2+w'^2\right)^{\bullet\bullet}ds\right]\right)ds\right]\\
&+J_\xi\dot{w}'\left[\dot{\gamma}+\int_0^s\left(v'w''\right)^{\bullet}ds-\dot{w}'v'\right]\\
&+\left[\left(J_\eta-J_\zeta\right)\left(\dot{v}'\gamma^2-\dot{w}'\gamma-\dot{w}'\int_0^s\left(v'w''\right)ds\right)+J_\zeta\dot{v}'\right]^{\bullet}-\left(J_\xi c_\gamma\dot{\gamma}\right)w'\Big\}'\\
&+q_v(s)\cos(\Omega t)\\
&-mg\left[v''(s-L)+v'\right]-\left[P_S+q_u\cos(\Omega t)\right]\left[v'\left(v'^2+w'^2\right)\right]',
\end{aligned}
\tag{2.82}
$$

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{w}+c_w\dot{w}+\left(D_\eta w''\right)''+\left[P_S+q_u\cos(\Omega t)\right]w''=\Big\{D_\xi\gamma'\,v''+\left(D_\eta-D_\zeta\right)\\
&\left[\left(v''\gamma\right)'+\left(\gamma^2w''\right)'-v'''\int_0^s\left(v''w'\right)ds\right]-w'\left(D_\eta v''^2+D_\eta w''^2\right)+w'\left(J_\zeta\dot{v}'^2+J_\eta\dot{w}'^2\right)\\
&+w'\left[-D_\zeta v'v'''-D_\eta w'w'''+J_\zeta\ddot{v}'v'+J_\eta\ddot{w}'w'-\frac{1}{2}\int_L^s\left(m\left[\int_0^s\left(v'^2+w'^2\right)^{\bullet\bullet}ds\right]\right)ds\right]\\
&-J_\xi\left[\dot{\gamma}+\int_0^s\left(v'w''\right)^{\bullet}ds-\dot{w}'v'\right]\dot{v}'-\left[\left(J_\eta-J_\zeta\right)\left(\dot{w}'\gamma^2+\dot{v}'\gamma-\dot{v}'\int_0^s\left(v''w'\right)ds\right)\right.\\
&\left.-J_\eta\dot{w}'\right]^{\bullet}\Big\}'+q_w(s)\cos(\Omega t)\\
&-mg\left[w''(s-L)+w'\right]-\left[P_S+q_u\cos(\Omega t)\right]\left[w'\left(v'^2+w'^2\right)\right]',
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

$$
\begin{aligned}
& J_\xi\ddot{\gamma}+J_\xi c_\gamma\dot{\gamma}-D_\xi\gamma''=-\left(D_\eta-D_\zeta\right)\left[\left(v''^2-w''^2\right)\gamma-v''w''\right]\\
&-J_\xi\left[\int_0^s\left(v'w''\right)^{\bullet}ds-v'\dot{w}'\right]^{\bullet}+\left(J_\eta-J_\zeta\right)\left[\left(\dot{v}'^2-\dot{w}'^2\right)\gamma-\dot{v}'\dot{w}'\right].
\end{aligned}
\tag{2.84}
$$

Por conveniência, as Equações (2.82) à (2.84) de movimento podem ser adimensionalizadas adotando-se os seguintes parâmetros:

$$s^* = (s/L)\,, \tag{2.85}$$

$$v^* = (v/L)\,, \tag{2.86}$$

$$w^* = (w/L)\,, \tag{2.87}$$

$$t^* = t\sqrt{D_\eta / m\,L^4}\,, \tag{2.88}$$

$$\Omega^* = \Omega L^2 \sqrt{m/D_\eta}\,, \tag{2.89}$$

$$J_\xi^* = J_\eta^* + J_\zeta^*\,, \tag{2.90}$$

$$J_\eta^* = \left[J_\eta / \left(m L^2\right)\right], \tag{2.91}$$

$$J_\zeta^* = \left[J_\zeta / \left(m L^2\right)\right], \tag{2.92}$$

$$c_v^* = c_v\, L^2 \sqrt{m/D_\eta}\,, \tag{2.93}$$

$$c_w^* = c_w\, L^2 \sqrt{m/D_\eta}\,, \tag{2.94}$$

$$c_\gamma^* = c_\gamma\, L^2 \sqrt{m/D_\eta}\,, \tag{2.95}$$

resultando nas equações:

$$\begin{aligned}
&\ddot{v} + c_v\dot{v} + \left(\beta_y v''\right)'' + \left[P_S + q_u\cos(\Omega t)\right]v'' = \Big\{-\beta_\gamma\,\gamma'\,w'' + \left(1-\beta_y\right) \\
&\left[\left(w''\gamma\right)' - \left(\gamma^2 v''\right)' + w'''\int_0^s \left(v'w''\right)ds\right] - v'\left(\beta_y v''^2 + \beta_y w''^2\right) + v'\left(J_\zeta \dot{v}'^2 + J_\eta \dot{w}'^2\right) \\
&+ v'\left[-\beta_y v'v''' - w'w''' + J_\zeta \ddot{v}'v' + J_\eta \ddot{w}'w' - \frac{1}{2}\int_L^s \left(m\left[\int_0^s \left(v'^2 + w'^2\right)^{\bullet\bullet} ds\right]\right)ds\right] \\
&+ J_\xi\left[\dot{\gamma} + \int_0^s \left(v'w''\right)^{\bullet} ds - \dot{w}'v'\right]\dot{w}' + \left[\left(J_\eta - J_\zeta\right)\left(\dot{v}'\gamma^2 - \dot{w}'\gamma - \dot{w}'\int_0^s \left(v'w''\right)ds\right)\right. \\
&\left.\left. + J_\zeta \dot{v}'\right]^{\bullet} - \left(J_\xi c_\gamma \dot{\gamma}\right)w'\right\}' + q_v(s)\cos(\Omega t) \\
&- mg\left[v''(s-L) + v'\right] - \left[P_S + \mathrm{q}_u\cos(\Omega t)\right]\left[v'\left(v'^2 + w'^2\right)\right]',
\end{aligned} \tag{2.96}$$

$$
\begin{aligned}
&\ddot{w} + c_w \dot{w} + (w'')'' + [P_s + q_u \cos(\Omega t)]w'' = \Big\{ \beta_\gamma \gamma' v'' + (1-\beta_y) \\
&\left[(v''\gamma)' + (\gamma^2 w'')' - v''' \int_0^s (v''w')ds \right] - w'(v''^2 + w''^2) + w'\left(J_\zeta \dot{v}'^2 + J_\eta \dot{w}'^2\right) \\
&+ w'\left[-\beta_y v'v''' - w'w''' + J_\zeta \ddot{v}'v' + J_\eta \ddot{w}'w' - \frac{1}{2}\int_L^s \left(m \left[\int_0^s \left(v'^2 + w'^2\right)^{\bullet\bullet} ds \right] \right) ds \right] \\
&- J_\xi \left[\dot{\gamma} + \int_0^s (v'w'')^\bullet \, ds - \dot{w}'v' \right] \dot{v}' - \left[(J_\eta - J_\zeta) \left(\dot{w}'\gamma^2 + \dot{v}'\gamma - \dot{v}' \int_0^s (v''w')ds \right) \right. \\
&\left. \left. - J_\eta \dot{w}' \right]^\bullet \right\}' + q_w(s)\cos(\Omega t) \\
&- mg\,[w''(s-L) + w'] - [P_S + q_u \cos(\Omega t)]\left[w'\left(v'^2 + w'^2\right)\right]' \ ,
\end{aligned}
\tag{2.97}
$$

$$
\begin{aligned}
&J_\xi \ddot{\gamma} + J_\xi c_\gamma \dot{\gamma} - \beta_\gamma \gamma'' = -(1-\beta_y)\left[\left(v''^2 - w''^2\right)\gamma - v''w''\right] \\
&- J_\xi \left[\int_0^s (v'w'')^\bullet ds - v'\dot{w}' \right]^\bullet + (J_\eta - J_\zeta)\left[\left(\dot{v}'^2 - \dot{w}'^2\right)\gamma - \dot{v}'\dot{w}'\right].
\end{aligned}
\tag{2.98}
$$

onde, para simplificar a notação, $\beta_y = D_\zeta / D_\eta$, $\beta_\gamma = D_\xi / D_\eta$ e o sobrescrito * é omitido.

2.9.
Redução do modelo a duas variáveis

Para problemas onde a torção não é importante, Crespo da Silva e Glynn (1978.a, 1978.b) consideraram que os momentos de inércia da barra J_ξ, J_η e J_ζ não exercem significativa influência no movimento não linear e desconsideraram a Equação (2.98) de movimento, hipótese válida quando os deslocamentos devidos à torção são desprezíveis. Para isto, substituíram a Equação (2.75) nas Equações (2.96) e (2.97), chegando a um sistema de equações em função apenas dos deslocamentos v e w. Elas são:

$$\ddot{v}+c_v\dot{v}+\beta_y\left(v''\right)'' = \left\{\left(1-\beta_y\right)\left[w''\int_1^s v''w''ds - w'''\int_0^s v''w'ds\right.\right.$$
$$\left.\left. -\left[\left(1-\beta_y\right)^2/\beta_y\right]\left(w''\int_0^s\int_1^s v''w''ds\,ds\right)'\right]\right\}' - \left\{\beta_y v'\left(v'v''+w'w''\right)'\right\}' \tag{2.99}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{v'\int_1^s\left[\int_0^s\left(v'^2+w'^2\right)ds\right]^{\bullet\bullet}ds\right\}' + q_v\ \cos\left(\Omega t\right),$$

$$\ddot{w}+c_w\dot{w}+\beta_y\left(w''\right)'' = \left\{\left(1-\beta_y\right)\left[v''\int_1^s v''w''ds - v'''\int_0^s w''v'ds\right.\right.$$
$$\left.\left. +\left[\left(1-\beta_y\right)^2/\beta_y\right]\left(v''\int_0^s\int_1^s v''w''ds\,ds\right)'\right]\right\}' - \left\{w'\left(v'v''+w'w''\right)'\right\}' \tag{2.100}$$
$$-\frac{1}{2}\left\{w'\int_1^s\left[\int_0^s\left(v'^2+w'^2\right)ds\right]^{\bullet\bullet}ds\right\}' + q_w\ \cos\left(\Omega t\right)\ .$$

A partir do trabalho de Crespo da Silva e Glynn (1978.a, 1978.b), seguiram-se outros adotando as equações de movimento simplificadas (2.99) e (2.100). Entre eles, os já citados trabalhos de Crespo da Silva e Glynn (1979.a, 1979.b), Nayfeh e Pai (1989), Pai e Nayfeh (1990.a), Zaretzky e Crespo da Silva (1994), Arafat, Nayfeh e Chin (1998) e Lee, Lee e Pak (2008).

2.10.
Imperfeição geométrica

As imperfeições geométricas iniciais têm, em geral, significativa influência nas oscilações não lineares e estabilidade de elementos estruturais esbeltos. Assim, nesta seção, são deduzidas as equações para uma barra imperfeita. Para isto, considera-se que a geometria inicial é descrita com relação à sua configuração perfeita pelas funções $v_0(s)=v_0$, $w_0(s)=w_0$ e $\phi_0(s)=\phi_0$.

Análogo ao apresentado no Item 2.2, em qualquer instante de tempo *t*, as componentes do vetor de deslocamentos ao longo dos eixos (X,Y,Z), medido no centroide C_o da seção transversal, são expressas por $u(s,t)=u$, $\bar{v}(s,t)=\bar{v}$ e $\bar{w}(s,t)=\bar{w}$, onde o sobrescrito – (barra) faz alusão ao sistema na posição de equilíbrio deformada da estrutura imperfeita, sendo $\bar{v} = v + v_0$ e $\bar{w} = w + w_0$ e u, v e w os deslocamentos gerados pelo carregamento.

A orientação dos eixos principais $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ da seção, com relação aos eixos (X, Y, Z), é descrita pelos seguintes ângulos de Euler: $\bar{\psi}(s,t) = \bar{\psi}$, $\bar{\theta}(s,t) = \bar{\theta}$ e $\bar{\phi}(s,t) = \bar{\phi}$. Estabelecendo a mesma relação entre os referenciais utilizada no Item 2.2, chega-se ao vetor velocidade angular do sistema imperfeito $\bar{\omega}(s,t)$, a saber,

$$\bar{\omega}\,(s,t) = \dot{\bar{\psi}}\,\hat{Z} + \dot{\bar{\theta}}\,\hat{\eta}_1 + \dot{\bar{\phi}}\,\hat{\xi}\,,$$

$$\bar{\omega}(s,t) = \left[\dot{\bar{\phi}} - \dot{\bar{\psi}}\sin(\bar{\theta})\right]\hat{\xi} + \left[\dot{\bar{\psi}}\cos(\bar{\theta})\sin(\bar{\phi}) + \dot{\bar{\theta}}\cos(\bar{\phi})\right]\hat{\eta}$$
$$+\left[\dot{\bar{\psi}}\cos(\bar{\theta})\cos(\bar{\phi}) - \dot{\bar{\theta}}\sin(\bar{\phi})\right]\hat{\zeta},$$

$$\bar{\omega}\,(s,t) = \bar{\omega}_\xi\,\hat{\xi} + \bar{\omega}_\eta\,\hat{\eta} + \bar{\omega}_\zeta\,\zeta. \tag{2.101}$$

Fazendo uso da analogia cinemática de Kirchhoff (Love, 1944), obtém-se diretamente da Equação (2.101) o vetor curvatura $\bar{\rho}(s,t)$:

$$\bar{\rho}\,(s,t) = \bar{\psi}'\,\hat{Z} + \bar{\theta}'\,\hat{\eta}_1 + \bar{\phi}'\,\hat{\xi}\,,$$

$$\bar{\rho}(s,t) = \left[\bar{\phi}' - \bar{\psi}'\sin(\bar{\theta})\right]\hat{\xi} + \left[\bar{\psi}'\cos(\bar{\theta})\sin(\bar{\phi}) + \bar{\theta}'\cos(\bar{\phi})\right]\hat{\eta}$$
$$+\left[\bar{\psi}'\cos(\bar{\theta})\cos(\bar{\phi}) - \bar{\theta}'\sin(\bar{\phi})\right]\hat{\zeta}\,,$$

$$\bar{\rho}(s,t) = \bar{\rho}_\xi\,\hat{\xi} + \bar{\rho}_\eta\,\hat{\eta} + \bar{\rho}_\zeta\,\hat{\zeta}\,. \tag{2.102}$$

Os ângulos $\bar{\psi}$ e $\bar{\theta}$ podem ser relacionados com as derivadas espaciais u', $\bar{v}'$ e $\bar{w}'$, resultando nas seguintes expressões:

$$\tan(\bar{\psi}) = \frac{\bar{v}'}{(1+u')}\,, \tag{2.103}$$

$$\tan(\bar{\theta}) = \frac{-\bar{w}'}{\sqrt{(1+u')^2 + \bar{v}'^2}}\,, \tag{2.104}$$

onde, $\bar{w}' < 0$ porque o deslocamento $\bar{w}$ ocorre na direção negativa de Z.

Além das relações anteriores, o problema pode ser simplificado, considerando também a inextensionalidade da barra, ou seja,

$$\sqrt{(1+u')^2+\bar{v}'^2+\bar{w}'^2}-1=0,$$

$$(1+u')^2+\bar{v}'^2+\bar{w}'^2=1. \tag{2.105}$$

Tal como no Item 2.2, das seis variáveis mencionadas (u, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{\psi}$, $\bar{\theta}$ e $\bar{\phi}$), apenas três são independentes: $\bar{v}=v+v_0$, $\bar{w}=w+w_0$ e $\bar{\phi}=\phi+\phi_0$.

Seguindo o exposto no Item 2.5, para obter as equações integro-diferenciais de movimento em termos dos deslocamentos $\bar{v}$ e $\bar{w}$ e do ângulo $\bar{\phi}$, faz-se necessário definir, inicialmente, a equação de Lagrange

$$\mathrm{L}(t)=T(t)-U(t)=\int_0^L \ell(s,t)ds. \tag{2.106}$$

A energia cinética consiste de uma componente devido à translação e outra devido à rotação, $T(t)=T_T(t)+T_R(t)$, dadas respectivamente por:

$$T_T(t)=\frac{1}{2}\int_0^L m\left(\dot{u}^2+\dot{\bar{v}}^2+\dot{\bar{w}}^2\right)ds. \tag{2.107}$$

$$T_R(t)=\frac{1}{2}\int_0^L \left(J_\xi\,\bar{\omega}_\xi^{\,2}+J_\eta\,\bar{\omega}_\eta^{\,2}+J_\zeta\,\bar{\omega}_\zeta^{\,2}\right)ds. \tag{2.108}$$

Por sua vez, a energia a energia interna de deformação $U(t)$ é dada por

$$U(t)=\frac{1}{2}\int_0^L \left(D_\xi\,\bar{\rho}_\xi^{\,2}+D_\eta\,\bar{\rho}_\eta^{\,2}+D_\zeta\,\bar{\rho}_\zeta^{\,2}\right)ds, \tag{2.109}$$

O Lagrangiano $\mathrm{L}(t)$, aumentado pelo multiplicador de Lagrange $\lambda(s,t)$, que leva em consideração a restrição de inextensionalidade, resulta em

$$\mathrm{L}(t)=T(t)-V(t)+\frac{1}{2}\int_0^L \lambda(s,t)\left(u'^2+2u'+v'^2+w'^2+2v_0'v'+2w_0'w'\right)ds. \tag{2.110}$$

A aplicação do princípio de Hamilton estendido à Equação (2.110) dá origem às cinco equações diferenciais de movimento. Este procedimento é descrito no Item 2.6, culminando aqui nas equações finais que descrevem o movimento acoplado de flexão-flexão-torção de uma barra com imperfeição geométrica inicial. Elas são:

$$\begin{aligned}
G_u' = \Big\{ & \lambda\left(1+u'\right) - J_\zeta \ddot{v}' v' - J_\eta \ddot{w}' w' \\
& - D_\zeta \left\{\left(v'' + v_0''\right)\left[v'' + \phi\left(w'' + w_0''\right) + \phi_0 w''\right]\right\} \\
& + D_\eta \left\{\left(w'' + w_0''\right)\left[-w'' + \phi\left(v'' + v_0''\right) + \phi_0 v''\right]\right\} \\
& + D_\zeta \left\{\left(v' + v_0'\right)\left[v'' + \phi\left(w'' + w_0''\right) + \phi_0 w''\right]\right\}' \\
& - D_\eta \left\{\left(w' + w_0'\right)\left[-w'' + \phi\left(v'' + v_0''\right) + \phi_0 v''\right]\right\}' \Big\}' \\
& = m\left[1 + \left(1/2\right)\left(v_0'^2 + w_0'^2\right)\right]\ddot{u} - Q_u^* \ ,
\end{aligned} \tag{2.111}$$

$$\begin{aligned}
G_v' = \Big\{ & -D_\xi\left(\phi' + v''w'\right)w'' - \left[\left(D_\eta - D_\zeta\right)\left(\phi^2 v'' - \phi w'' - v'w'w''\right) + D_\zeta v''\right]' \\
& - v'\left(D_\zeta v''^2 + D_\eta w''^2\right) + J_\xi\left(\dot{\phi} + \dot{v}'w'\right)\dot{w}' + \left[\left(J_\eta - J_\zeta\right)\left(\phi^2 \dot{v}' - \phi \dot{w}'\right.\right. \\
& \left.\left. - v'w'\dot{w}'\right) + J_\zeta \dot{v}'\right]^\bullet + v'\left(J_\zeta \dot{v}'^2 + J_\eta \dot{w}'^2\right) + \lambda\left(v' + v_0'\right) + w'Q_\phi^* \\
& - D_\xi\left[w''v_0''w' + w''w_0'v'' + w_0''\left(\phi' + w'v'' + v_0''w' + w_0'v''\right)\right] \\
& - \left[\left(D_\eta - D_\zeta\right)\left(2\phi\phi_0 v'' + \phi^2 v'' - \phi_0 w'' + \phi\phi_0 v_0''\right)\right]' \\
& + D_\zeta\Big[\left(1/2\right)v'''\left(-v_0'^2 + w_0'^2\right) - v''\left(-v_0'v_0'' + w_0'w_0''\right) + \left(w_0''\phi\right)' - \left(v_0'v''^2\right) \\
& - 2\left(v_0'v''\right)'v' - v_0'\left(w'w''\right)' - \left(v' + v_0'\right)\left(w_0'''w' + 2w_0''w'' + w_0'w'''\right) - v_0''w'w'' \\
& - \left(w_0''v_0''w' + w_0'v_0''w''\right) - \left(1/2\right)\left(v_0'''v'^2\right)\Big] - \left[D_\eta - \left(1/2\right)D_\zeta\right]\left(v_0''\phi^2\right)' \\
& + J_\xi\left(\dot{v}'\dot{w}'w_0'\right) - v_0'\left(D_\eta w'w'' + D_\zeta v'v''\right) - \left(v' + v_0'\right)\left(D_\eta w_0'w''' + D_\zeta v_0'v'''\right) \\
& + v_0'\left(J_\zeta v'\ddot{v}' + J_\eta w'\ddot{w}'\right)\Big\}' = m\left[1 + \left(1/2\right)\left(v_0'^2 + w_0'^2\right)\right]\ddot{v} - Q_v^* \ ,
\end{aligned} \tag{2.112}$$

$$\begin{aligned}
G_w' = \Big\{ & D_\xi\left(\phi' + v''w'\right)v'' + \left[\left(D_\eta - D_\zeta\right)\left(\phi v'' + \phi^2 w''\right) - D_\eta w''\right]' \\
& - w'\left(D_\eta w''^2 + D_\zeta v''^2\right) - J_\xi\left(\dot{\phi} + \dot{v}'w'\right)\dot{v}' - \left[\left(J_\eta - J_\zeta\right)\left(\phi \dot{v}' + \phi^2 \dot{w}'\right) - J_\eta \dot{w}'\right]^\bullet \\
& + w'\left(J_\eta \dot{w}'^2 + J_\zeta \dot{v}'^2\right) + \lambda\left(w' + w_0'\right) \\
& + D_\xi\left[v''v_0''w' + v''^2 w_0' + v_0''\left(\phi' + w'v'' + v_0''w' + w_0'v''\right)\right] \\
& + \left[\left(D_\eta - D_\zeta\right)\left(2\phi\phi_0 w'' + \phi^2 w'' + \phi_0 v'' + \phi\phi_0 w_0''\right)\right]' \\
& + D_\eta\Big[\left(1/2\right)w'''\left(v_0'^2 + w_0'^2\right) - w''\left(w_0'w_0'' + w_0'w'\right) + \left(v_0''\phi\right)'
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(v_0''^2 w' + v_0' v_0''' w' + v_0' v_0'' w''\right) - \left(1/2\right) w_0''' w'^2 - w''\left(w_0' w'\right)' \Big] \\
&- D_\zeta \left(w_0' v''^2 + w' v_0' v'' + w_0' v_0' v''\right) + \left[\left(1/2\right) D_\eta - D_\zeta\right]\left(w_0'' \phi^2\right)' \\
&- J_\xi \left(\dot{v}'^2 w_0'\right) + w_0' \left(J_\zeta \dot{v}'^2 + J_\eta \dot{w}'^2\right)\Big\}' = m\left[1 + \left(1/2\right)\left(v_0'^2 + w_0'^2\right)\right]\ddot{w} - Q_w^* \ ,
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\left[D_\xi \left(\phi' + v'' w'\right)\right]' + \left(D_\eta - D_\zeta\right)\left[\left(v''^2 - w''^2\right)\phi - v'' w''\right] \\
&+ J_\xi \left(\dot{\phi} + \dot{v}' w'\right)^\bullet - \left(J_\eta - J_\zeta\right)\left[\left(\dot{v}'^2 - \dot{w}'^2\right)\phi - \dot{v}' \dot{w}'\right] \\
&- D_\xi \left[v_0'' w' + w_0' v'' + \left(1/2\right)\left(v_0'^2 + w_0'^2\right)\phi'\right]' + v_0'' \left\{D_\eta \left[\phi\left(v'' + v_0''\right)\right] - w''\right\} \\
&+ w_0'' \left\{D_\zeta \left[\phi\left(w'' + w_0''\right) + v''\right]\right\} + \left(D_\eta - D_\zeta\right)\Big[\phi\left(v'' v_0'' - w'' w_0''\right) + \phi_0 \left(v''^2 - w''^2\right) \\
&+ \phi_0 \left(v'' v_0'' - w'' w_0''\right) + J_\xi \left[\ddot{v}' w_0' + \left(1/2\right)\left(v_0'^2 + w_0'^2\right)\ddot{\phi}\right] = Q_\phi^* \ ,
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

$$
u' = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(v'^2 + w'^2 + 2 v_0' v' + 2 w_0' w'\right). \tag{2.115}
$$

O ângulo de torção $\gamma = \gamma(s,t)$ da barra é, neste caso, dado por

$$
\begin{aligned}
\gamma &= \phi + \int_0^s \left(v'' w' + v_0'' w' + w_0' v''\right) ds \\
&= \phi + \left(v' w' + v_0' w' + v' w_0'\right) - \int_0^s \left(v' w'' + v_0' w'' + w_0'' v'\right) ds \ ,
\end{aligned}
\tag{2.116}
$$

com suas derivadas no espaço e no tempo dadas respectivamente por:

$$
\gamma' = \phi' + v'' w' + v_0'' w' + w_0' v'' , \tag{2.117}
$$

$$
\gamma'' = \phi'' + v''' w' + v'' w'' + v_0''' w' + v_0'' w'' + v''' w_0' + v'' w_0'' \ , \tag{2.118}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma} &= \dot{\phi} + \int_0^s \left(v'' w' + v_0'' w' + w_0' v''\right)^\bullet ds \\
&= \dot{\phi} + \left(v' w' + v_0' w' + v' w_0'\right)^\bullet - \int_0^s \left(v' w'' + v_0' w'' + w_0'' v'\right)^\bullet ds \ ,
\end{aligned}
\tag{2.119}
$$

$$\ddot{\gamma} = \ddot{\phi} + \int_0^s \left(v''w' + v_0''w' + w_0'v''\right)^{\bullet\bullet} ds$$
$$= \ddot{\phi} + \left(v'w' + v_0'w' + v'w_0'\right)^{\bullet\bullet} - \int_0^s \left(v'w'' + v_0'w'' + w_0''v'\right)^{\bullet\bullet} ds \ , \qquad (2.120)$$

sendo o ângulo de torção inicial $\gamma_0 = \phi_0$.

As Equações (2.111) e (2.115) de movimento, assim como as condições de contorno $u(0,t) = \gamma(0,t) = \gamma'(0,t) = 0$ e $G_u(L,t) = 0$ podem ser usadas para se obter γ, u e $\lambda(s,t) = \lambda$, ou seja,

$$\gamma = -\frac{1}{D_\xi} \int_0^s \int_L^s \left[Q_\phi + \left(D_\eta - D_\zeta\right) v''w'' + D_\eta\left(v_0''w''\right) - D_\zeta\left(w_0''v''\right)\right] ds\, ds \ , \qquad (2.121)$$

$$u = -\frac{1}{2}\int_0^s \left(v'^2 + w'^2 + 2v_0'v' + 2w_0'w'\right) ds \ , \qquad (2.122)$$

$$\lambda = J_\eta\left(w'\ddot{w}'\right) + J_\zeta\left(v'\ddot{v}'\right) - D_\eta\left(w'w''' + w_0'w'''\right) - D_\zeta\left(v'v''' + v_0'v'''\right)$$
$$-\frac{1}{2}\int_L^s m\left[\int_0^s \left(v'^2 + w'^2 + 2v_0'v' + 2w_0'w'\right)^{\bullet\bullet} ds\right] ds - \int_L^s Q_u^* \ ds, \qquad (2.123)$$

Aghababaei, Nahvi e Ziaei-Rad (2009) foram os que, com base nos trabalhos de Crespo da Silva e colaboradores, escreveram pela primeira vez as equações de movimento da barra com imperfeições geométricas iniciais. Tal como Crespo da Silva e Glynn (1978.a, 1978.b), os autores assumiram que os momentos de inércia da barra J_ξ, J_η e J_ζ não exercem significativa influência no movimento não linear. Partindo desta premissa e sob a hipótese que o ângulo de torção é desprezível, eles desconsideraram a Equação (2.114) de movimento e substituíram a Equação (2.121) nas Equações (2.112) e (2.113), chegando a um sistema de duas equações função apenas dos deslocamentos transversais v e w da barra.

Na expansão das equações de movimento apresentada a seguir, a mencionada simplificação não é feita, razão pela qual este trabalho difere daqueles que o antecede. Assim, para efeito da expansão das equações de movimento, assumem-se as seguintes forças generalizadas:

$$Q_{\phi}^{*} = M_{\phi} - c_{\phi}\dot{\phi} \approx M_{\phi} - J_{\xi} c_{\gamma} \dot{\phi}$$
$$Q_{\phi}^{*} \approx M_{\gamma}\left[1+(1/2)\left(v_{0}'^{2}+w_{0}'^{2}\right)\right] - J_{\xi} c_{\gamma}\dot{\gamma} = -J_{\xi} c_{\gamma}\dot{\gamma} \ , \tag{2.124}$$

$$Q_{u}^{*} = mg + Q_{u}(t) = mg + \left[P_{S} + q_{u}\cos(\Omega_{u}\, t)\right]\left[1+(1/2)\left(v_{0}'^{2}+w_{0}'^{2}\right)\right], \tag{2.125}$$

$$Q_{v}^{*} = Q_{v}(s,t) - c_{v}\dot{v} = q_{v}\cos(\Omega t)\left[1+(1/2)\left(v_{0}'^{2}+w_{0}'^{2}\right)\right] - c_{v}\dot{v}, \tag{2.126}$$

$$Q_{w}^{*} = Q_{w}(s,t) - c_{w}\dot{w} = q_{w}\cos(\Omega t)\left[1+(1/2)\left(v_{0}'^{2}+w_{0}'^{2}\right)\right] - c_{w}\dot{w} \ , \tag{2.127}$$

Considerando este conjunto de solicitações, bem como, o multiplicador de Lagrange λ, determinado na Equação (2.123), e substituindo nas Equações (2.111) a (2.115), o ângulo de torção γ da barra e suas derivadas no espaço e no tempo, dados nas Equações (2.116) à (2.120), chega-se às três equações não lineares de movimento em função dos deslocamentos transversais v e w e do ângulo γ de torção. Elas são:

$$
\begin{aligned}
& m\left[1+(1/2)\left(v_{0}'^{2}+w_{0}'^{2}\right)\right]\ddot{v} + c_{v}\dot{v} + \left(D_{\zeta} v''\right)'' + 2\left[P_{s} + q_{u}\cos(\Omega_{u}\, t)\right]v'' \\
&= \Bigg\{ -D_{\xi}\,\gamma'\left(w''+w_{0}''\right) + \left(D_{\eta}-D_{\zeta}\right)\Bigg[\left(w''\gamma\right)' - \left(v''\gamma^{2}\right)' + w'''\int_{0}^{s}\left(v'w''\right)ds \\
&\quad + w'''\int_{0}^{s}\left(v_{0}'w'' + v'w_{0}''\right)ds - w''\left(w'v_{0}'' + w_{0}'v''\right)\Bigg] - v'\left(D_{\zeta}v''^{2} + D_{\zeta}w''^{2}\right) \\
&\quad + v'\left(J_{\zeta}\dot{v}'^{2} + J_{\eta}\dot{w}'^{2}\right) + v'\Bigg[-D_{\zeta}v'v''' - D_{\eta}w'w''' + J_{\zeta}\ddot{v}'v' + J_{\eta}\ddot{w}'w' \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{L}^{s}\left(m\int_{0}^{s}\left(v'^{2}+w'^{2}\right)^{\bullet\bullet}ds\right)ds\Bigg] + J_{\xi}\left[\dot{\gamma} + \int_{0}^{s}\left(v'w''\right)^{\bullet}ds - v'\left(\dot{w}'+\dot{w}_{0}'\right)\right]\dot{w}' \\
&\quad - J_{\xi}\left[\left(v_{0}'w'\right)^{\bullet} - \int_{0}^{s}\left(v_{0}'w'' + v'w_{0}''\right)^{\bullet}ds\right]\dot{w}' \\
&\quad + \Bigg[\left(J_{\eta}-J_{\zeta}\right)\left(\dot{v}'\gamma^{2} - \dot{w}'\gamma - \dot{w}'\int_{0}^{s}\left(v'w''\right)ds - \dot{w}'\int_{0}^{s}\left(v_{0}'w'' + v'w_{0}''\right)ds\right) \\
&\quad + J_{\zeta}\dot{v}'\Bigg]^{\bullet} - \left(J_{\xi}c_{\gamma}\dot{\gamma}\right)w' + \left(J_{\eta}-J_{\zeta}\right)\left(\dot{v}_{0}w'\dot{w}' + v_{0}'\dot{w}'^{2} + v_{0}'w'\ddot{w}'\right) \\
&\quad + \left(J_{\eta}-J_{\zeta}\right)\left(\dot{v}'w_{0}'\dot{w}' + v'\dot{w}_{0}'^{2} + v'w_{0}'\ddot{w}'\right)
\end{aligned}
$$

$$+D_\zeta\Big[(1/2)v'''\left(-v_0'^2+w_0'^2\right)-v_0''\left(w_0'w'\right)'-\left(v_0'v''^2\right)$$

$$-(1/2)\left(v_0'''v'^2\right)-2\left(v_0'v''\right)'v'-\left(v_0'w'w''\right)'-\left(v'+v_0'\right)\left(w_0'w'\right)''\Big]$$

$$-D_\zeta\left[v''\left(-v_0'v_0''+w_0'w_0''\right)\right]-\left(D_\eta-D_\zeta\right)\left(v''\gamma_0^2-\gamma_0 w''\right)'$$

$$+D_\zeta\left(w_0'''\gamma+w_0''\gamma'\right)-D_\zeta\left[w_0'''\int_0^s\left(w'v''\right)ds+w_0''\left(w'v''\right)\right]$$

$$-D_\zeta\left[w_0'''\int_0^s\left(v_0''w'+v''w_0'\right)ds+w_0''\left(v_0''w'+v''w_0'\right)\right]+\left[(1/2)D_\zeta-D_\eta\right]\left(v_0''\gamma^2\right)'$$

$$-\left(D_\eta-D_\zeta\right)v''\left(3\gamma_0\gamma\right)'-\left(\frac{1}{2}\right)v'\int_L^s m\left[\int_0^s\left(2v_0'v'+2w_0'w'\right)^{\bullet\bullet}ds\right]ds$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)v_0'\int_L^s m\left[\int_0^s\left(v'^2+w'^2+2v_0'v'+2w_0'w'\right)^{\bullet\bullet}ds\right]ds\Bigg\}' \qquad (2.128)$$

$$+q_v\cos\left(\Omega_v t\right)\left[1+(1/2)\left(v_0'^2+w_0'^2\right)\right]$$

$$-mg\left[v''\left(s-L\right)+v'\right]-mg\left[v_0''\left(s-L\right)+v_0'\right]$$

$$-\left[P_S+q_u\cos\left(\Omega_u t\right)\right]\left[v'\left(v'^2+w'^2\right)\right]$$

$$-\left[P_S+q_u\cos\left(\Omega_u t\right)\right]\Big[2v_0''+v''w_0'^2+2v'w_0'w_0''+6v'v_0'v''+3v'^2v_0''$$

$$+3v''v_0'^2+6v'v_0'v_0''+3v_0'^2v_0''+2v_0''w'w_0'+2v_0'w''w_0'+2v_0'w'w_0''$$

$$+v_0''w_0'^2+2v_0'w_0'w_0''+v_0''w'^2+2v_0'w'w''+2v''w'w_0'+2v'w''w_0'$$

$$+2v'w'w_0''\Big],$$

$$m\left[1+(1/2)\left(v_0'^2+w_0'^2\right)\right]\ddot{w}+c_w\dot{w}+\left(D_\eta w''\right)''+2\left[P_s+q_u\cos\left(\Omega_u t\right)\right]w''$$

$$=\Big\{D_\xi\gamma'\left(v''+v_0''\right)+\left(D_\eta-D_\zeta\right)\Big[\left(v''\gamma\right)'+\left(w''\gamma^2\right)'-v'''\int_0^s\left(v''w'\right)ds$$

$$-v'''\int_0^s\left(v_0''w'+w_0'v''\right)ds-v''\left(v_0''w'+w_0'v''\right)\Big]-w'\left(D_\eta v''^2+D_\eta w''^2\right)$$

$$+w'\left(J_\zeta\dot{v}'^2+J_\eta\dot{w}'^2\right)+w'\Big[-D_\zeta v'v'''-D_\eta w'w'''+J_\zeta\ddot{v}'v'+J_\eta\ddot{w}'w'$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_L^s\left(m\left[\int_0^s\left(v'^2+w'^2\right)^{\bullet\bullet}ds\right]\right)ds\Bigg]-J_\xi\left[\dot{\gamma}+\int_0^s\left(v'w''\right)^{\bullet}ds-v'\left(\dot{w}'+\dot{w}_0'\right)\right]\dot{v}'\\
&+J_\xi\left[\left(v_0'w'\right)^{\bullet}-\int_0^s\left(v_0'w''+v'w_0''\right)^{\bullet}ds\right]\dot{v}'\\
&-\Bigg[\left(J_\eta-J_\zeta\right)\left(\dot{w}'\gamma^2+\dot{v}'\gamma-\dot{v}'\int_0^s\left(v''w'\right)ds-\dot{v}'\int_0^s\left(v_0''w'+w_0'v''\right)ds\right)\\
&-J_\eta\dot{w}'\Bigg]^{\bullet}+D_\eta\Big[\left(1/2\right)w'''\left(v_0'^2+w_0'^2\right)-w_0'w_0''w''+v_0''^2w'+v_0'\left(v''w'\right)'\\
&-w_0'^2w'''-w_0''w''w'-\left(1/2\right)w_0'''w'^2-w''\left(w_0'w'\right)'-2\,w_0'w'w'''\Big]\\
&-D_\zeta\left[w_0'\left(v''v_0'\right)'+w_0'\left(v''v'\right)'+w'\left(v''v_0'\right)'\right]+\left(D_\eta-D_\zeta\right)\left(w''\gamma_0^2+v''\gamma_0\right)'\\
&+D_\eta\left(v_0'''\gamma+v_0''\gamma'\right)-D_\eta\left[v_0'''\int_0^s\left(v''w'\right)ds+v_0''\left(v''w'\right)\right]\\
&-D_\eta\left[v_0'''\int_0^s\left(v_0''w'+v''w_0'\right)ds+v_0''\left(v_0''w'+v''w_0'\right)\right]\\
&+\left[\left(1/2\right)D_\eta-D_\zeta\right]\left(w_0''\gamma^2\right)'+\left(D_\eta-D_\zeta\right)w''\left(3\gamma_0\,\gamma\right)' \qquad (2.129)\\
&-\left(\frac{1}{2}\right)w'\int_L^s m\left[\int_0^s\left(2\,v_0'v'+2\,w_0'w'\right)^{\bullet\bullet}ds\right]ds\\
&-\left(\frac{1}{2}\right)w_0'\int_L^s m\left[\int_0^s\left(v'^2+w'^2+2\,v_0'v'+2\,w_0'w'\right)^{\bullet\bullet}ds\right]ds\Bigg\}'\\
&+q_w\cos\left(\Omega_w\,t\right)\left[1+\left(1/2\right)\left(v_0'^2+w_0'^2\right)\right]\\
&-mg\left[w''\left(s-L\right)+w'\right]-mg\left[w_0''\left(s-L\right)+w_0'\right]\\
&-\left[P_S+q_u\cos\left(\Omega_u\,t\right)\right]\left[w'\left(v'^2+w'^2\right)\right]\\
&-\left[P_S+q_u\cos\left(\Omega_u\,t\right)\right]\Big[2w_0''+w''v_0'^2+2\,w'\,v_0'\,v_0''+6\,w'w_0'w''+3\,w'^2\,w_0''\\
&+3\,w''\,w_0'^2+6\,w'w_0'w_0''+3\,w_0'^2\,w_0''+2\,w_0''\,v'\,v_0'+2\,w_0'\,v''\,v_0'+2\,w_0'\,v'\,v_0''\\
&+w_0''v_0'^2+2\,w_0'\,v_0'\,v_0''+w_0''v'^2+2\,w_0'\,v'\,v''+2\,w''\,v'\,v_0'+2\,w'\,v''\,v_0'\\
&+2\,w'v'v_0''\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{\xi}\left[1+(1/2)\left(v_0'^2+w_0'^2\right)\right]\ddot{\gamma}+J_{\xi}c_{\gamma}\dot{\gamma}-D_{\xi}\gamma'' = \\
-\left(D_{\eta}-D_{\zeta}\right)\Big\{\left[\left(v''^2-w''^2\right)\gamma-v''w''\right] \\
+\left[\gamma\left(v''v_0''-w''w_0''\right)+\gamma_0\left(v''^2+w''^2\right)+\gamma_0\left(v''v_0''-w''w_0''\right)\right]\Big\} \\
-D_{\xi}\left\{\left[v_0''w'+w_0'v''\right]'-\left[v_0''w'+w_0'v''+(1/2)\left(v_0'^2+w_0'^2\right)\gamma'\right]\right\} \\
+\left(J_{\eta}-J_{\zeta}\right)\left[\left(\dot{v}'^2-\dot{w}'^2\right)\gamma-\dot{v}'\dot{w}'\right] \\
-J_{\xi}\left\{\left[\int_0^s\left(v'w''\right)^{\bullet}ds-v'\dot{w}'\right]^{\bullet}+\left[\int_0^s\left(v_0'w''+w_0''v'\right)^{\bullet}ds-\left(v_0'w'+v'w_0'\right)^{\bullet}\right]^{\bullet}\right. \\
\left.+\left(\ddot{v}'w_0'\right)\right\}-v_0''\left\{D_{\eta}\left[\gamma\left(v''+v_0''\right)-w''\right]\right\}-w_0''\left\{D_{\zeta}\left[\gamma\left(w''+w_0''\right)+v''\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.130}
$$

Considerando que $v_0=w_0=\gamma_0=0$, as Equações (2.128) à (2.130) recaem nas Equações (2.96) a (2.98).

A seguir, o método de Galerkin é usado para discretização das equações de movimento, resultando, ao final do procedimento, em um sistema de equações integro-diferencial não linear no domínio do tempo, o qual é posteriormente utilizado para investigar as oscilações da barra, sua estabilidade e os tipos de bifurcações associados ao seu movimento tridimensional.

2.11. Autofunções

Um conjunto de funções de interpolação no espaço bastante apropriado para a solução das equações de movimento pelo método de Galerkin são os modos de vibração da viga engastada-livre, que podem ser escritos como:

$$v(s,t)=F_v(s)v(t)=F_v(s)\cos\left(\omega_v\, t\right), \tag{2.131}$$

$$w(s,t)=F_w(s)w(t)=F_w(s)\cos\left(\omega_w\, t\right), \tag{2.132}$$

$$\gamma(s,t)=F_{\gamma}(s)v(t)=F_{\gamma}(s)\cos\left(\omega_{\gamma}\, t\right). \tag{2.133}$$

Para uma barra com propriedades constantes, as autofunções $F_v(s)$ e $F_{\gamma}(s)$ devem satisfazer às seguintes equações diferenciais:

$$\beta_y F_v^{IV} - \omega_v^2 F_v + J_\zeta \omega_v^2 F_v'' = 0 \ , \tag{2.134}$$

$$\beta_\gamma F_\gamma'' + J_\zeta \omega_\gamma^2 F_\gamma = 0 \ , \tag{2.135}$$

e as seguintes condições de contorno:

$$F_v(0) = F_v'(0) = F_\gamma(0) = 0 \ , \tag{2.136}$$

$$F_v''(1) = F_\gamma'(1) = 0 \ . \tag{2.137}$$

A autofunção $F_w(s)$ associada com a parte linearizada de w é obtida fazendo-se $\beta_y = 1$, $\omega_v = \omega_w$ e $J_\zeta = J_\eta$ na Equação (2.134), ou seja,

$$F_w^{IV} - \omega_w^2 F_w + J_\eta \omega_w^2 F_w'' = 0 \ . \tag{2.138}$$

As soluções das Equações (2.134) e (2.135) são dadas por:

$$F_v = C_v \left\{ \cosh(r_1 s) - \cos(r_2 s) - K_v \left[\sinh(r_1 s) - \left(\frac{r_1}{r_2} \right) \sin(r_2 s) \right] \right\} , \tag{2.139}$$

$$F_\gamma = C_\gamma \sin\left[(2n-1)\left(\frac{\pi}{2}\right) s \right] \qquad (n = 1, 2, \ldots) , \tag{2.140}$$

onde,

$$K_v = \frac{r_1^2 \cosh(r_1) + r_2^2 \cos(r_2)}{r_1^2 \sinh(r_1) + r_1 r_2 \sin(r_2)} \ , \tag{2.141}$$

$$r_1 = \sqrt{ -\frac{J_\zeta \omega_v^2}{2\beta_y} + \sqrt{ \left(\frac{J_\zeta \omega_v^2}{2\beta_y} \right)^2 + \frac{\omega_v^2}{\beta_y} } } \ , \tag{2.142}$$

$$r_2 = \sqrt{ \frac{J_\zeta \omega_v^2}{2\beta_y} + \sqrt{ \left(\frac{J_\zeta \omega_v^2}{2\beta_y} \right)^2 + \frac{\omega_v^2}{\beta_y} } } \ , \tag{2.143}$$

$$\omega_\gamma = (2n-1)\left(\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\frac{\beta_\gamma}{J_\xi}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) . \tag{2.144}$$

A solução da Equação (2.138) é dada por:

$$F_w = C_w \left\{ \cosh(r_3\, s) - \cos(r_4\, s) - K_w \left[\sinh(r_3\, s) - \left(\frac{r_3}{r_4} \right) \sin(r_4\, s) \right] \right\}, \tag{2.145}$$

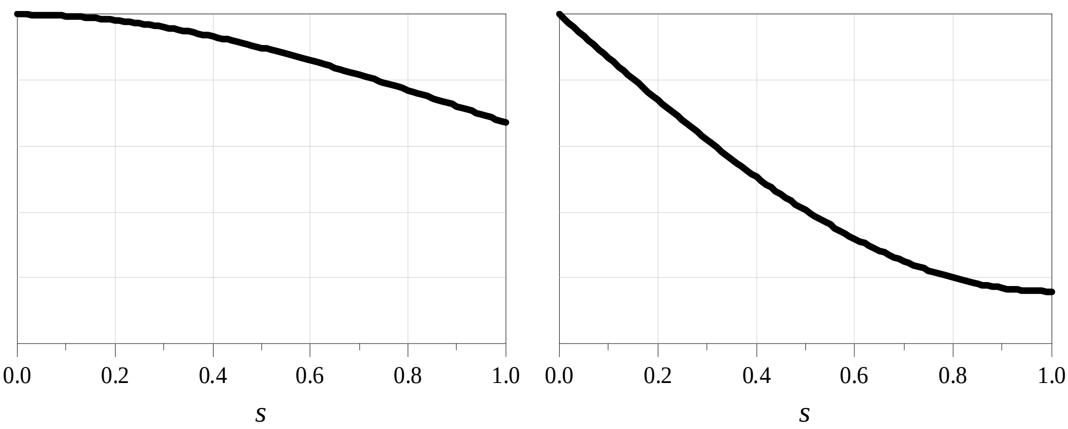
onde,

$$K_w = \frac{r_3^2 \cosh(r_3) + r_4^2 \cos(r_4)}{r_3^2 \sinh(r_3) + r_3\, r_4 \sin(r_4)}, \tag{2.146}$$

$$r_3 = \sqrt{-\frac{J_\eta\, \omega_w^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_\eta\, \omega_w^2}{2} \right)^2 + \omega_w^2}}, \tag{2.147}$$

$$r_4 = \sqrt{\frac{J_\eta\, \omega_w^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{J_\eta\, \omega_w^2}{2} \right)^2 + \omega_w^2}}. \tag{2.148}$$

Na Figura 2.8 mostra-se a forma das autofunções $F_v(s)$, $F_w(s)$ e $F_\gamma(s)$, associadas à menor frequência natural nos modos v, w e γ, dadas pelas Equações (2.139), (2.145) e (2.140), respectivamente.



(a) $F_v(s)$ e $F_w(s)$ (b) $F_\gamma(s)$

Figura 2.8 – Forma das autofunções associadas às equações de movimento linearizadas.

As quantidades r_1 e r_2 satisfazem a equação característica obtida impondo a condição $F_v''' = 1$ à Equação (2.139), isto é,

$$F_v'''(s) = \frac{C_v}{r_1 \sinh(r_1) + r_2 \sin(r_2)} \Big[\sinh(r_1 s) r_1^4 \sinh(r_1) \sinh(r_1 s) r_1^3 r_2$$

$$\sin(r_2) - \sin(r_2 s) r_2^3 r_1 \sinh(r_1) - \sin(r_2 s) r_2^4 \sin(r_2) - r_1^4 \cosh(r_1) \cosh(r_1 s)$$

$$- r_1^2 \cosh(r_1) \cos(r_2 s) r_2^2 - r_2^2 \cos(r_2) \cosh(r_1 s) r_1^2 - r_2^4 \cos(r_2) \cos(r_2 s)\Big],$$

$$F_v'''(1) = -r_1^4 \sinh(r_1) r_1^3 r_2 \sin(r_2) - \sin(r_2) r_2^3 r_1 \sinh(r_1) - r_2^4 - 2 r_1^2$$
$$\cosh(r_1) \cos(r_2) r_2^2 = 0 \ ,$$

$$r_1^4 + r_2^4 + 2 r_1^2 r_2^2 \cosh(r_1) \cos(r_2) + r_1 r_2 \left(r_2^2 - r_1^2\right) \sinh(r_1) \sin(r_2) = 0 \qquad (2.149)$$

De forma similar, as quantidades r_3 e r_4 satisfazem a equação característica obtida impondo a restrição $F_w''' = 1$ à Equação (2.145).

As amplitudes C_v, C_w e C_γ que aparecem respectivamente nas autofunções $F_v(s)$, $F_w(s)$ e $F_\gamma(s)$ são arbitrárias. Crespo da Silva e Zaretzky (1994) atribuem valores a essas constantes de modo a normalizar as amplitudes dos modos de vibração, o que também se faz neste trabalho. Assim:

$$\int_0^1 \left[F_v^2(s) - J_\zeta F_v(s) F_v''(s)\right] ds = 1 \ , \qquad (2.150)$$

$$\int_0^1 \left[F_w^2(s) - J_\eta F_w(s) F_w''(s)\right] ds = 1 \ , \qquad (2.151)$$

$$\int_0^1 \left[F_\gamma^2(s)\right] ds = 1 \ . \qquad (2.152)$$

2.12.
Discretização das equações de movimento pelo método de Galerkin

Como dito anteriormente, a solução aproximada para o movimento da barra é obtida, neste trabalho, aplicando-se o método de Galerkin às Equações de movimento (2.96) à (2.98), com os graus de liberdade $v = v(s,t)$, $w = w(s,t)$ e $\gamma = \gamma(s,t)$ aproximados por $v(s,t) \approx F_v(s)\, v(t)$, $w(s,t) \approx F_w(s)\, w(t)$ e

$\gamma(s,t) \approx F_\gamma(s)\,\gamma(t)$, onde $F_v(s)=F_v$, $F_w(s)=F_w$ e $F_\gamma(s)=F_\gamma$ são dados, respectivamente, pelas Equações (2.139), (2.145) e (2.140).

Seguindo o exposto e utilizando apenas o primeiro modo de flexão e de torção da barra, chega-se às equações finais que governam o movimento acoplado flexão-flexão-torção de barras engasta-livres. Elas são:

$$\left[\int_0^1 F_v^2 ds - J_\zeta \int_0^1 F_v'' F_v ds\right]\ddot{v} + \left[c_v \int_0^1 F_v^2 ds\right]\dot{v} + \left[\beta_y \int_0^1 F_v^{IV} F_v\, ds + \int_0^1 [P_S + q_u \cos(\Omega_u t)] F_v F_v''\, ds + mg\int_0^1 \left(F_v F_v''(s-1) + F_v F_v'\right) ds\right] v =$$
$$\alpha_{v1}\gamma\, w + \alpha_{v2}\, v\, \gamma^2 + \alpha_{v3}\, v\, w^2 + \alpha_{v4}\, v^3 + \alpha_{v5}\left(v^2\right)^{\bullet\bullet} v + \alpha_{v6}\left(w^2\right)^{\bullet\bullet} v + \qquad (2.153)$$
$$\alpha_{v7}\, v^2\, \ddot{v} + \alpha_{v8}\, v\, w\, \ddot{w} + \alpha_{v9}\, \dot{w}\, \dot{\gamma} + \alpha_{v10}\, w\, \dot{v}\, \dot{w} + \alpha_{v11}\, v\, \dot{w}^2 +$$
$$\alpha_{v12}\left(\dot{v}\,\gamma^2\right)^{\bullet} + \alpha_{v13}\,\gamma\,\ddot{w} + \alpha_{v14}\, v\,\dot{v}^2 + \alpha_{v15}\, w\,\dot{\gamma} + \int_0^1 F_v\, q_v \cos(\Omega_v t) ds\ ,$$

$$\left[\int_0^1 F_w^2 ds - J_\eta \int_0^1 F_w'' F_w ds\right]\ddot{w} + \left[c_w \int_0^1 F_w^2 ds\right]\dot{w} + \left[\int_0^1 F_w^{IV} F_w\, ds + \int_0^1 [P_S + q_u \cos(\Omega_u t)] F_w F_w''\, ds + mg\int_0^1 \left(F_w F_w''(s-1) + F_w F_w'\right) ds\right] w =$$
$$\alpha_{w1}\gamma\, v + \alpha_{w2}\, w\, \gamma^2 + \alpha_{w3}\, w\, v^2 + \alpha_{w4}\, w^3 + \alpha_{w5}\left(w^2\right)^{\bullet\bullet} w + \alpha_{w6}\left(v^2\right)^{\bullet\bullet} w + \qquad (2.154)$$
$$\alpha_{w7}\, w^2\, \ddot{w} + \alpha_{w8}\, w v \ddot{v} + \alpha_{w9}\, \dot{v}\, \dot{\gamma} + \alpha_{w10}\, v\, \dot{w}\, \dot{v} + \alpha_{w11}\, w\, \dot{v}^2 +$$
$$\alpha_{w12}\left(\dot{w}\gamma^2\right)^{\bullet} + \alpha_{w13}\,\gamma\ddot{v} + \alpha_{w14}\, w\dot{w}^2 + \int_0^1 F_w\, q_w \cos(\Omega_w t) ds\ ,$$

$$\left[\int_0^1 F_\gamma^2 ds\right]\ddot{\gamma} + \left[c_\gamma \int_0^1 F_\gamma^2 ds\right]\dot{\gamma} - \left[\beta_\gamma \int_0^1 F_\gamma'' F_\gamma\, ds\right]\gamma =$$
$$\alpha_{\gamma 1}\gamma v^2 + \alpha_{\gamma 2}\,\gamma\, w^2 + \alpha_{\gamma 3}\, v\, w + \left[\alpha_{\gamma 4}(v\, w)^{\bullet} + \alpha_{\gamma 5}\, v\, \dot{w}\right]^{\bullet} + \qquad (2.155)$$
$$\alpha_{\gamma 6}\,\gamma\dot{v}^2 + \alpha_{\gamma 7}\,\gamma\,\dot{w}^2 + \alpha_{\gamma 8}\,\dot{v}\,\dot{w}\ ,$$

Os coeficientes α_{vi}, α_{wi} e $\alpha_{\gamma i}$ para $(i=1,2,...)$, nas Equações (2.153), (2.154) e (2.155), são listados no Apêndice 1 deste trabalho.

É importante mencionar que aproximar o campo de deslocamentos não lineares pelos modos de vibração é possível quando se deseja analisar os movimentos tridimensionais da barra na região de ressonância associada à menor frequência de vibração. Se as amplitudes de vibração se tornam elevadas, um modelo discreto mais preciso, incluindo modos mais elevados, pode ser necessário.

Segundo Crespo da Silva e Zaretzky (1994), o valor numérico de diversos termos associados com o momento de inércia da barra é desprezível quando comparado ao valor numérico dos termos associados com a rigidez da barra. Assim, para simplificar a análise, várias parcelas multiplicadas por J_η, J_ζ e $J_\xi = J_\eta + J_\zeta$ nas Equações (2.96) a (2.98) podem ser, segundo os autores, desconsideradas. Quando isto é feito os coeficientes α_{v7} a α_{v15}, α_{w7} a α_{w14} e $\alpha_{\gamma 6}$ a $\alpha_{\gamma 8}$ são desconsiderados nas equações de movimento. A mencionada hipótese é verdadeira quando a frequência ω_γ das oscilações por torção da barra não equivalem às frequências ω_v e ω_w das oscilações de flexão.

Tendo em conta os efeitos de possíveis ou prováveis imperfeições geométricas iniciais, aplica-se agora o método de Galerkin às Equações de movimento (2.128) à (2.130). Para tanto, além das aproximações $v = v(s,t) \approx F_v(s)\,v(t)$, $w = w(s,t) \approx F_w(s)\,w(t)$ e $\gamma = \gamma(s,t) \approx F_\gamma(s)\,\gamma(t)$, as imperfeições geométricas v_0, w_0 e γ_0 são aproximadas por $v_0 = v_0(s) \approx F_v(s)\,v_0$, $w_0 = w_0(s) \approx F_w(s)\,w_0$ e $\gamma_0 = \gamma_0(s) \approx F_\gamma(s)\,\gamma_0$, onde, novamente, $F_v(s) = F_v$, $F_w(s) = F_w$ e $F_\gamma(s) = F_\gamma$ são dados, respectivamente, pelas Equações (2.139), (2.145) e (2.140). Fazendo as aproximações assinaladas, chega-se às equações finais que governam o movimento acoplado flexão-flexão-torção de barras engastada-livres com imperfeições geométricas iniciais. Elas são:

$$
\left\{\left(\int_0^1 F_v^2 ds\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^1 F_v'^2 F_v^2 ds\right)\left(v_0^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^1 F_w'^2 F_v^2 ds\right)\left(w_0^2\right) - \right.
$$

$$
\left.\left(J_\zeta\right)\left(\int_0^1 F_v''\, F_v\, ds\right) + \left[\int_0^1 F_v \left(F_v' \int_1^s \int_0^s F_v'^2 ds\, ds\right)' ds\left(v_0^2\right)\right]\right\} \ddot{v} +
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(c_v\right)\left(\int_0^1 F_v^2 ds\right)\right]\dot{v}+\left\{\left(\beta_y\right)\left(\int_0^1 F_v^{IV}\, F_v\, ds\right)+\right.\\
&2\int_0^1\left[\,P_S+q_u\,\cos\left(\Omega_u\,t\right)\right]F_v\,F_v''\,ds+\\
&\int_0^1\left[\,P_S+q_u\,\cos\left(\Omega_u\,t\right)\right]\left[\,F_v\,F_v''F_w'^2\left(w_0^2\right)\right]ds+\\
&2\int_0^1\left[\,P_S+q_u\,\cos\left(\Omega_u\,t\right)\right]\left[F_v\,F_v'\,F_w'\,F_w''\left(w_0^2\right)\right]ds+\\
&9\int_0^1\left[\,P_S+q_u\,\cos\left(\Omega_u\,t\right)\right]\left[F_v\,F_v''F_v'^2\left(v_0^2\right)\right]ds+\\
&mg\int_0^1\left[F_vF_v''(s-1)+F_v\,F_v'\,\right]ds-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\beta_y\right)\left[\int_0^1 F_v\left(F_v'''\,F_w'^2\right)'\,ds\right]\left(w_0^2\right)+\\
&\left(\beta_y\right)\int_0^1 F_v\left(F_w'''\int_0^s F_v''F_w'\,ds\right)'ds\,\left(w_0^2\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\beta_y\right)\int_0^1 F_v\left(F_v'''\,F_v'^2\right)'\,ds\left(v_0^2\right)-\\
&\left.\left(\beta_y\right)\int_0^1 F_v\left(F_v'\,F_v''^2\right)'\,ds\,\left(v_0^2\right)+\left(1-\beta_y\right)\int_0^1 F_v\left(F_\gamma^2\,F_v''\right)''\,ds\,\left(\gamma_0^2\right)\right\}\,v=\\
&\alpha_{v1}\left(\gamma\,w\right)+\alpha_{v2}\left(v\,\gamma^2\right)+\alpha_{v3}\left(v\,w^2\right)+\alpha_{v4}\left(v^3\right)+\alpha_{v5}\left[\,\left(v^2\right)^{\bullet\bullet}\,v\,\right]+\\
&\alpha_{v6}\left[\,\left(w^2\right)^{\bullet\bullet}\,v\,\right]+\alpha_{v7}\left(v^2\,\ddot{v}\right)+\alpha_{v8}\left(v\,w\,\ddot{w}\right)+\alpha_{v9}\left(\dot{w}\,\dot{\gamma}\right)+\alpha_{v10}\left(w\,\dot{v}\,\dot{w}\right)+\\
&\alpha_{v11}\left(v\,\dot{w}^2\right)+\alpha_{v12}\left(\dot{v}\,\gamma^2\right)^{\bullet}+\alpha_{v13}\left(\gamma\,\ddot{w}\right)+\alpha_{v14}\left(v\,\dot{v}^2\right)+\alpha_{v15}\left(\gamma\right)+\alpha_{v16}\left(v\,w\right)+\\
&\alpha_{v17}\left(w^2\right)+\alpha_{v18}\left(\dot{v}\,\dot{w}\right)+\alpha_{v19}\left(\dot{w}^2\right)+\alpha_{v20}\left(v\,\ddot{w}\right)+\alpha_{v21}\left(w\,\ddot{w}\right)+\alpha_{v22}\left(v^2\right)+\\
&\alpha_{v23}\left(w\right)+\alpha_{v24}\left(\gamma^2\right)+\alpha_{v25}\left(\gamma\,v\right)+\alpha_{v26}\left(v\,\ddot{v}\right)+\alpha_{v27}\left(w^2\right)^{\bullet\bullet}+\alpha_{v28}\left(v^2\right)^{\bullet\bullet}+\\
&\alpha_{v29}\left(\ddot{w}\right)+\alpha_{v30}\left(w\,\dot{\gamma}\right)-\\
&2\int_0^1\left[\,P_S+q_u\,\cos\left(\Omega_u\,t\right)\right]\left[\,F_v\,F_v''\left(v_0\right)\right]ds-
\end{aligned}
\tag{2.156}
$$

$$
\begin{aligned}
&3\int_0^1 \left[P_S + q_u \cos(\Omega_u t)\right]\left[F_v F_v'^2 F_v'' \left(v_0^3\right)\right] ds - \\
&\int_0^1 \left[P_S + q_u \cos(\Omega_u t)\right]\left[\left(F_v F_v'' F_w'^2 + 2 F_v F_v' F_w' F_w''\right)\left(v_0 w_0^2\right)\right] ds - \\
&mg\int_0^1 \left(F_v F_v''(s-1) + F_v F_v'\right) ds \left(v_0\right) ds + \\
&\int_0^1 q_v(s) \cos(\Omega t)\left[F_v + \left(\frac{1}{2}\right)\left(F_v'^2 F_v\right)\left(v_0^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(F_w'^2 F_v\right)\left(w_0^2\right)\right] ds \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left(\int_0^1 F_w^2 ds\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^1 F_v'^2 F_w^2 ds\right)\left(v_0^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_0^1 F_w'^2 F_w^2 ds\right)\left(w_0^2\right) - \right. \\
&\left.\left(J_\eta\right)\left(\int_0^1 F_w'' F_w \, ds\right) + \left[\int_0^1 F_w \left(F_w' \int_1^s \int_0^s F_w'^2 ds\, ds\right)' ds \left(w_0^2\right)\right]\right\} \ddot{w} + \\
&\left[\left(c_w\right)\left(\int_0^1 F_w^2 ds\right)\right]\dot{w} + \left\{\left(\int_0^1 F_w^{IV} F_w \, ds\right) + \right. \\
&2\int_0^1 \left[P_S + q_u \cos(\Omega_u t)\right] F_w F_w'' \, ds + \\
&\int_0^1 \left[P_S + q_u \cos(\Omega_u t)\right]\left[\left(F_w F_w'' F_v'^2\right)\left(v_0^2\right)\right] ds + \\
&2\int_0^1 \left[P_S + q_u \cos(\Omega_u t)\right]\left[\left(F_w F_w' F_v' F_v''\right)\left(v_0^2\right)\right] ds + \\
&\int_0^1 \left[P_S + q_u \cos(\Omega_u t)\right]\left[\left(F_w F_w'' F_w'^2\right)\left(w_0^2\right)\right] ds + \\
&mg\int_0^1 \left(F_w F_w''(s-1) + F_w F_w'\right) ds - \left(\frac{1}{2}\right)\left[\int_0^1 F_w \left(F_w''' F_v'^2\right)' ds\right]\left(v_0^2\right) + \\
&\int_0^1 F_w \left(F_v''' \int_0^s F_v'' F_w' \, ds\right)' ds \left(v_0^2\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1 F_w \left(F_w''' F_w'^2\right)' ds \left(w_0^2\right) + \\
&\left.\int_0^1 F_w \left[F_w' \left(F_w' F_w''\right)'\right]' ds \left(w_0^2\right) - \left(1-\beta_y\right)\int_0^1 F_w \left(F_\gamma^2 F_w''\right)'' ds \left(\gamma_0^2\right)\right\} w =
\end{aligned}
\tag{2.157}
$$

$$
\alpha_{w1}\left(\gamma\, v\right)+\alpha_{w2}\left(w\,\gamma^{2}\right)+\alpha_{w3}\left(w\, v^{2}\right)+\alpha_{w4}\left(w^{3}\right)+\alpha_{w5}\left[\left(w^{2}\right)^{\bullet\bullet} w\right]+
$$

$$
\alpha_{w6}\left[\left(v^{2}\right)^{\bullet\bullet} w\right]+\alpha_{w7}\left(w^{2}\,\ddot{w}\right)+\alpha_{w8}\left(v\, w\,\ddot{v}\right)+\alpha_{w9}\left(\dot{v}\,\dot{\gamma}\right)+\alpha_{w10}\left(v\,\dot{v}\,\dot{w}\right)+
$$

$$
\alpha_{w11}\left(w\,\dot{v}^{2}\right)+\alpha_{w12}\left(\dot{w}\,\gamma^{2}\right)^{\bullet}+\alpha_{w13}\left(\gamma\,\ddot{v}\right)+\alpha_{w14}\left(w\,\dot{w}^{2}\right)+\alpha_{w15}\left(\gamma\right)+\alpha_{w16}\left(v\, w\right)+
$$

$$
\alpha_{w17}\left(v^{2}\right)+\alpha_{w18}\left(\dot{v}\,\dot{w}\right)+\alpha_{w19}\left(\dot{v}^{2}\right)+\alpha_{w20}\left(w\ddot{v}\right)+\alpha_{w21}\left(v\,\ddot{v}\right)+\alpha_{w22}\left(w^{2}\right)+
$$

$$
\alpha_{w23}\left(v\right)+\alpha_{w24}\left(\gamma^{2}\right)+\alpha_{w25}\left(\gamma\, w\right)+\alpha_{w26}\left(w\ddot{w}\right)+\alpha_{w27}\left(v^{2}\right)^{\bullet\bullet}+\alpha_{w28}\left(w^{2}\right)^{\bullet\bullet}+
$$

$$
\alpha_{w29}\left(\ddot{v}\right)-
$$

$$
2\int_{0}^{1}\left[\, P_{S}+q_{u}\,\cos\left(\Omega_{u}\, t\right)\right]\left[\, F_{w}\, F''_{w}\,\left(w_{0}\right)\right]ds-
$$

$$
3\int_{0}^{1}\left[\, P_{S}+q_{u}\,\cos\left(\Omega_{u}\, t\right)\right]\left[\, F_{w}\, F'^{2}_{w}\, F''_{w}\,\left(w_{0}^{3}\right)\right]ds-
$$

$$
\int_{0}^{1}\left[\, P_{S}+q_{u}\,\cos\left(\Omega_{u}\, t\right)\right]\left[\left(F_{w}\, F''_{w}\, F'^{2}_{v}+2\, F_{w}\, F'_{w}\, F'_{v}\, F''_{v}\right)\left(w_{0}\, v_{0}^{2}\right)\right]ds-
$$

$$
mg\int_{0}^{1}\left(F_{w}F''_{w}\left(s-1\right)+F_{w}F'_{w}\right)ds\,\left(w_{0}\right)+
$$

$$
\int_{0}^{1}q_{w}\left(s\right)\,\cos\left(\Omega t\right)\left[F_{w}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(F'^{2}_{v}\, F_{w}\right)\left(v_{0}^{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(F'^{2}_{w}\, F_{w}\right)\left(w_{0}^{2}\right)\right]ds\;,
$$

$$
\left[\left(\int_{0}^{1}F_{\gamma}^{2}ds\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_{0}^{1}F_{\gamma}^{2}F'^{2}_{v}ds\right)\left(v_{0}^{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\int_{0}^{1}F_{\gamma}^{2}F'^{2}_{w}ds\right)\left(w_{0}^{2}\right)\right]\ddot{\gamma}+
$$

$$
\left[\left(c_{\gamma}\right)\int_{0}^{1}F_{\gamma}^{2}ds\right]\dot{\gamma}-\left[\beta_{\gamma}\int_{0}^{1}F''_{\gamma}F_{\gamma}\; ds+\right.
$$

$$
\left(\frac{1}{2}\right)\,\beta_{\gamma}\int_{0}^{1}\left(F_{\gamma}\, F'_{\gamma}\, F'^{2}_{v}\right)ds\left(v_{0}^{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\,\beta_{\gamma}\int_{0}^{1}F_{\gamma}\, F'_{\gamma}\, F'^{2}_{w}\; ds\left(w_{0}^{2}\right)- \tag{2.158}
$$

$$
\left.\int_{0}^{1}F_{\gamma}^{2}F''^{2}_{v}\; ds\,\left(v_{0}^{2}\right)-\beta_{y}\int_{0}^{1}F_{\gamma}^{2}F''^{2}_{w}\; ds\,\left(w_{0}^{2}\right)\right]\gamma=
$$

$$\alpha_{\gamma 1}\left(\gamma\, v^2\right)+\alpha_{\gamma 2}\left(\gamma\, w^2\right)+\alpha_{\gamma 3}\left(v\, w\right)+\left[\alpha_{\gamma 4}\left(v\, w\right)^{\bullet}+\alpha_{\gamma 5}\left(v\ \dot{w}\right)\right]^{\bullet}+$$

$$\alpha_{\gamma 6}\left(\gamma\, \dot{v}^2\right)+\alpha_{\gamma 7}\left(\gamma\, \dot{w}^2\right)+\alpha_{\gamma 8}\left(\dot{v}\ \dot{w}\right)+\alpha_{\gamma 9}\left(\gamma\, v\right)+\alpha_{\gamma 10}\left(\gamma\, w\right)+$$

$$+\alpha_{\gamma 11}\left(v^2\right)+\alpha_{\gamma 12}\left(w^2\right)+\alpha_{\gamma 13}\left(v\right)+\alpha_{\gamma 14}\left(w\right)+\left[\alpha_{\gamma 15}\left(\dot{v}\right)+\alpha_{\gamma 16}\left(\dot{w}\right)\right]^{\bullet}\ .$$

Os coeficientes α_{vi}, α_{wi} e $\alpha_{\gamma i}$ para $(i=1,2,...)$, nas Equações (2.156), (2.157) e (2.158), são listados no Apêndice 2 deste trabalho.

Considerando que $v_0 = w_0 = \gamma_0 = 0$, as Equações (2.156) à (2.158) de movimento e os respectivos coeficientes Galerkin dados no Apêndice 2 recaem, respectivamente, nas Equações (2.153) à (2.155) e nas integrais do Apêndice 1.